SUMÁRIO

MATEMÁTICA

TEORIA DOS CONJUNTOS

A **Teoria de Conjuntos** deve ser vista como **um dos tópicos mais importantes** da Matemática Contemporânea.

É ela que dá **sustentação lógica** a outros tópicos inerentes à Matemática, como, por exemplo: Funções, Probabilidade, Análise Combinatória, Polinômios, Progressões (Aritméticas e Geométricas) etc.

Acreditar nos alicerces estabelecidos por esta Teoria é ter a **garantia** de que o rigor matemático, a coesão e a elegância na exposição do conteúdo terão seu lugar de destaque garantidos.

NOÇÕES PRIMITIVAS

No contexto da Teoria de Conjuntos, **três noções primitivas** são aceitas sem definição e, portanto, não necessitam de demonstração. São elas:

- Conjunto,
- Elemento;
- Pertinência entre Conjunto e Elemento.

Os **Conjuntos** (ou coleções) devem ser representados por letras latinas Maiúsculas: *A, B, C* etc.

Alguns exemplos de Conjuntos:

- M = {*janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}* é o conjunto dos meses do ano que possuem 31 dias;
- P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} é o conjunto dos números primos até 19;
- N = {*Estados Unidos, Canadá, México}* é o conjunto dos países da América do Norte.

Os **Elementos** referem-se aos objetos inerentes aos Conjuntos. Nos exemplos acima, cada um dos componentes dos Conjuntos apresentados são elementos destes (por exemplo: no conjunto dos números primos, cada número ali destacado representa um elemento deste conjunto).

A **Relação de Pertinência** entre Conjunto e Elemento estabelece a identificação entre estes. Para tanto utilizamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

Nos exemplos acima temos algumas situações para destacar essa relação:

- O mês de abril não pertence ao conjunto *M*, ou, simbolicamente, Abril $\notin$ M;
- O número 11 pertence ao conjunto *P*, ou, simbolicamente, 11 $\in$ P;
- O Haiti não pertence ao conjunto *N*, ou, simbolicamente, Haiti $\notin$ N.

REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Existem 3 maneiras distintas de se representar Conjuntos:

- Analítica;
- Sintética;
- Diagrama de Euler-Venn (ou simplesmente Diagrama).

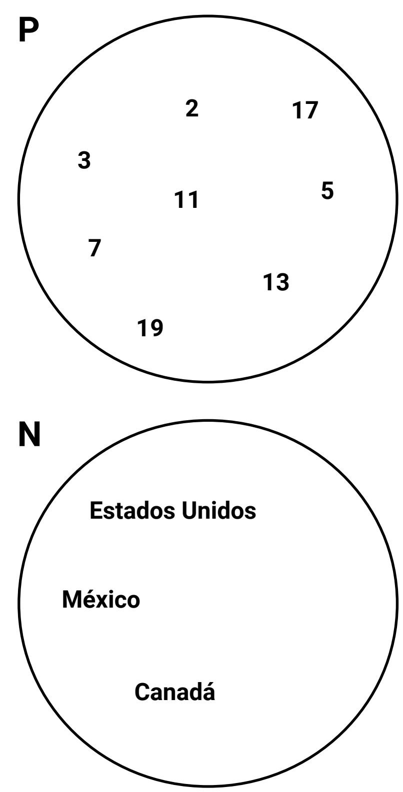
Na representação **Analítica**, destaca-se cada um dos elementos que pertencem a um determinado conjunto. Nos exemplos que foram mencionados (conjuntos *M, P e N*), todos eles foram representados desta maneira.

Na representação **Sintética**, devemos destacar uma característica que seja comum a todos os elementos pertencentes a um conjunto qualquer. Nos exemplos que mencionamos, esta representação ficaria da seguinte maneira (a seguir, lê-se x/x como “x é tal que x tem a propriedade”):

- M = {x / x é mês do ano com 31 dias};
- P = {x / x é número primo};
- N = {x / x é país da América do Norte}.

Na representação por **Diagramas**, devemos definir uma região (normalmente um círculo) onde devem ser representados todos os elementos pertencentes ao conjunto. É importante não esquecer de nomear o conjunto.

Observe as situações a seguir (já apresentadas anteriormente) que são exemplos desta representação:



Representação de conjuntos por diagramas

CONJUNTO UNITÁRIO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Unitário** quando ele apresentar exatamente um único elemento (ou objeto).

São **exemplos** de Conjuntos Unitários:

- H = {1986} é o conjunto formado pelo ano do século XX em que o Cometa Halley pôde ser visto por quem estava na Terra. Observe que este conjunto apresenta somente um único elemento, ou seja, 1986;

- F = {Michael Phelps} é o conjunto formado pelo esportista que mais ganhou medalhas olímpicas. Observe que este conjunto apresenta somente um único elemento, ou seja, ele é composto pelo medalhista Norte-Americano Michael Phelps (ganhador de 28 medalhas olímpicas, em um total de 4 Olímpiadas que participou);
- Conjunto dos números primos pares. Neste caso, a este conjunto pertence somente o número 2.

CONJUNTO VAZIO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Vazio** quando ele não apresentar elemento (ou objeto) algum. A notação utilizada para representar um Conjunto Vazio é: {} ou ∅

> **Importante!**
>
> **É muito comum as pessoas representarem o Conjunto Vazio da seguinte maneira: {∅}**
> Na verdade, o que se tem aí é um conjunto que possui um único elemento que é o conjunto vazio. Complicado? O importante é não cometer esse erro de forma alguma: utilize {} ou ∅, mas nunca as duas representações ao mesmo tempo!

São **exemplos** de Conjuntos Vazios:

- Conjunto dos meses que apresentam 32 dias;
- Países que fazem parte da América do Norte e que começam com a letra W;
- Número primo irracional;
- Seleção de Futebol que tenha conquistado 10 Copas do Mundo.

CONJUNTO UNIVERSO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Universo** quando a ele pertencem todos os elementos.

No **exemplo** a seguir, o conjunto universo considerado poderia ser o seguinte:

- Se fossemos escolher um aluno qualquer do 1º ano B do Ensino Médio de uma Escola que apresentasse uma determinada característica (como por exemplo o uso de óculos de grau), nosso Conjunto Universo poderia ser representado pela Turma ao qual o aluno pertence (no caso o 1º ano B), ou ainda pela escola onde ele estuda. Perceba que neste caso dá para escolher mais de um conjunto Universo.

Você poderá escolher o Conjunto Universo ao qual pertencem todos os elementos que são de seu interesse. Dentre estes, você selecionará aqueles que apresentam a característica procurada (ou de interesse).

CONJUNTOS IGUAIS

Dois conjuntos A e B são **iguais** quando todo elemento de A pertence a B, e vice-versa.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ (Lê-se: A é igual a B, se, e somente se, qualquer que seja x, x pertence a A se, e somente se, x pertence a B).

Duas observações são bastante importantes e impactam diretamente na compreensão de outros conteúdos que dependem de Teoria de Conjuntos:

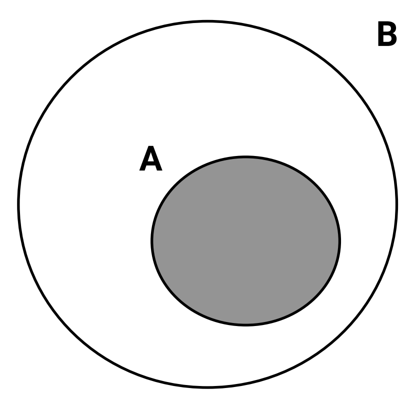
- A **ordem** na Teoria de Conjuntos não importa (não interfere)! Observe o conjunto A = {1, 2, 3, 4}. Se trocarmos a ordem dos elementos deste conjunto, como por exemplo {3, 1, 4, 2}, este conjunto continua recebendo o nome de *A*, pois apresenta os mesmos elementos (mesmo estando estes em ordem distinta daquela apresentada inicialmente). Portanto, variações do conjunto *A* (outras possíveis são: {1, 3, 4, 2}, {4, 3, 1, 2}, {2, 3, 4, 1} etc.), no que tange à ordem dos elementos, não interferem em sua nomeação;
- A **repetição** na Teoria de Conjuntos não importa (não interfere)! Observe o mesmo conjunto A = {1, 2, 3, 4]. Se repetirmos os elementos deste conjunto, como, por exemplo {2, 2, 3, 4, 4, 1, 1, 1}, este conjunto continua recebendo o nome de *A*, pois apresenta os mesmos elementos (mesmo estando estes repetidos). Cabe destacar que, neste caso, a quantidade de elementos continua sendo a mesma, ou seja, 4 elementos pertencem ao conjunto *A*. Portanto, variações do conjunto *A* (outras possíveis são: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}, {1, 2, 3, 3, 3, 4}, {4, 4, 2, 2, 3, 1, 4} etc.), no que tange à repetição dos elementos, não interferem em sua nomeação.

SUBCONJUNTO

Um conjunto A é **Subconjunto** de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (lê-se: A está contido em B, se, e somente se, qualquer que seja x, x pertence a A, então x pertence a B).

Por **diagramas** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:



Subconjunto A do conjunto B

Perceba que todo elemento pertencente ao conjunto *A* (no interior da região verde), automaticamente, pertence também a *B*.

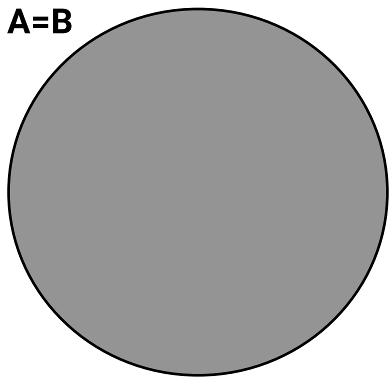
É desta maneira que representamos por Diagramas a relação de inclusão $A \subset B$. Concluímos que *A* é subconjunto de *B*.

Diferentemente do que acontece quando relacionamos elementos com conjuntos (ali vigoram as relações de pertinência, ou seja, somente utilizamos ∈ (pertence) ou ∉ (não pertence), quando tratamos da **relação entre conjuntos**, utilizamos os símbolos a seguir:

- ⊂ (está contido);

- ⊄ (não está contido);
- ⊃ (contém);
- ⊅ (não contém).

Dá-se o nome de **Subconjunto Impróprio** de *B* à seguinte situação:



Subconjunto Impróprio de B

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ e $B \subset A)$ (lê-se: A é igual a B, se, e somente se, A está contido em B e B está contido em A).

Duas propriedades são bastante importantes e impactam diretamente na compreensão de outros conteúdos que dependem de Teoria de Conjuntos:

- **O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto**! Representamos esta situação da seguinte maneira: $\emptyset \subset A$. Apesar de parecer insignificante em um primeiro momento (aquelas observações que passam desapercebidas quando estudamos determinado assunto), esta propriedade é extremamente importante para a simplificação de demonstrações de Teoremas. Sem ela, diversas situações envolvendo conjuntos teriam suas “comprovações” apresentadas de uma maneira muito mais extenuante (cansativa)!
- **Todo conjunto está contido em si mesmo**! Representamos esta situação da seguinte maneira: $A \subset A$. Também aparentemente insignificante, esta propriedade tem seu “lugar de destaque” no contexto da Teoria de Conjuntos e é extremamente útil no que se refere a simplificação de demonstrações de Teoremas. Ela também recebe o nome de Propriedade Reflexiva.

CONJUNTO DAS PARTES OU PARTIÇÃO

Dado um conjunto A, chama-se **Conjunto das Partes** (ou Partição) de A (representado por P(*A*)), aquele que é formado por todos os subconjuntos de A.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$, onde X é subconjunto de A (lê-se: X é tal que, X está contido em *A*).

Por intermédio do Conjunto das Partes de um determinando conjunto dado (*A* por exemplo), podemos reforçar aquilo que talvez você já tenha percebido intuitivamente, ou seja, **um conjunto pode ser elemento de outro conjunto**.

Antes de apresentarmos um exemplo que possa ilustrar esta situação, uma **propriedade importante** deve ser destacada: o número de elementos de P (A) é dado por 2^n, ou seja, 2 elevado ao número de elementos do conjunto A.

Exemplo 1: Determine o conjunto das partes de B = {1, 2, 3, 4}.

Resposta:

P(B) = {{1}, {2}, {3}, {4}, {1, 1}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, ∅}

Observe que temos acima representados todos os subconjuntos do conjunto *B*, ou seja, P(B). Atenção especial deve ser dada aos elementos (que aqui são conjuntos) {1, 2, 3, 4} (perceba que é o próprio conjunto *B*, pois todo conjunto está contido nele mesmo) e ∅ (o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto).

Observe também que a quantidade de elementos é dada por $2^n = 2^4 = 16$ subconjuntos!

Exemplo 2: Determine o conjunto das partes de C = {1, 2, 3}.

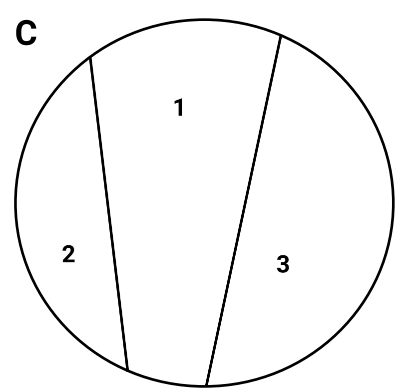
Resposta:

P(C) = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, ∅}

Observe que temos acima representados todos os subconjuntos do conjunto C, ou seja, P(C). Atenção especial deve ser dada aos elementos (que aqui são conjuntos) {1, 2, 3} (perceba que é o próprio conjunto C, pois todo conjunto está contido nele mesmo) e ∅ (o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto).

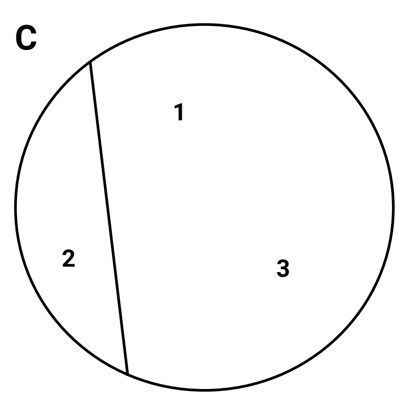
Observe também que a quantidade de elementos é dada por $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos!

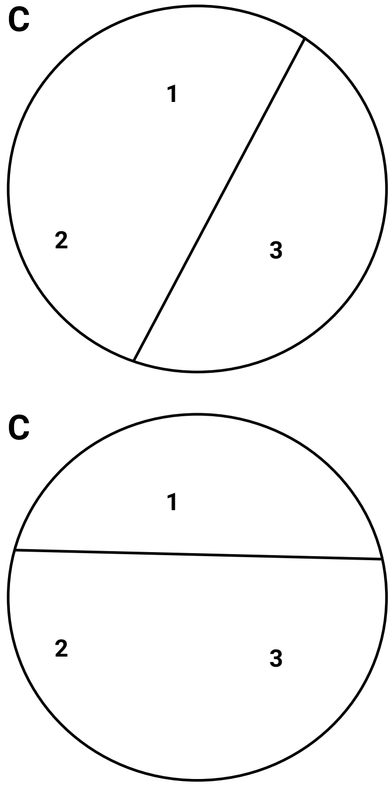
Vamos utilizar diagramas para entender melhor a importância da Partição do conjunto *C*:



Partição do conjunto C, com elementos tomados 1 a 1

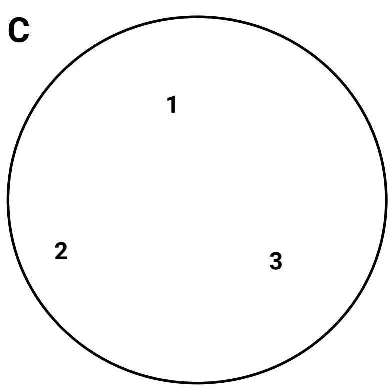
Situação que apresenta cada um dos elementos de *C* tomados 1 a 1, ou seja, 3 subconjuntos aparecem claramente separados: {1}, {2} e {3}.





Partições do conjunto C, com elementos tomados 2 a 2

Situação que apresenta cada um dos elementos de *C* tomados 2 a 2, ou seja, 3 subconjuntos aparecem claramente separados: {1, 3}, {1, 2}, {2, 3}. Perceba que aqui vale a observação referente à repetição de elementos na Teoria de Conjuntos, ou seja, os elementos {1}, {2} e {3} aqui aparecem repetidos, mas já foram tomados na primeira situação abordada neste exemplo. Portanto, você não irá tomá-los novamente!



Partição do conjunto C, com elementos tomados 3 a 3

Situação que apresenta o próprio conjunto C tomado 3 a 3, ou seja, 1 subconjunto aparece claramente: {1, 2, 3}. Perceba que aqui vale a observação referente ao fato de que todo conjunto está contido nele mesmo.

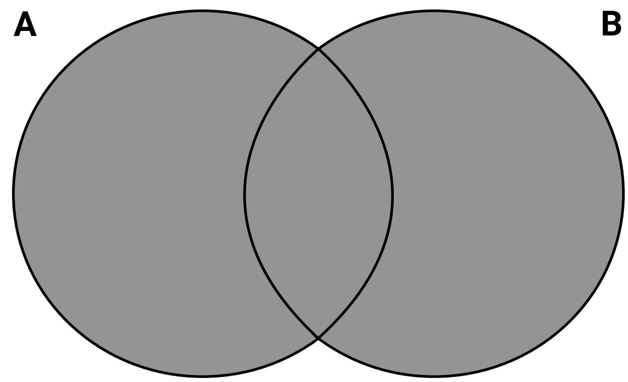
Por fim, tente aprimorar sua abstração e perceber que o conjunto vazio é complementar (veremos adiante o que isso significa. Depois de ter acesso a este conteúdo, não se esqueça de voltar aqui!) do conjunto *C*. De certa maneira, podemos dizer que ele está representado acima (onde aparece o próprio conjunto *C*).

UNIÃO OU REUNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **União** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B (disjunção lógica).

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A$ ou $x \in B\}$ (lê-se: os elementos do conjunto *A união com B* são representados por x, tal que x pertence a *A* ou x pertence a *B*).

Por **diagramas** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:



União dos conjuntos A e B

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cup B$ (*A união com B*) são aqueles que pertencem exclusivamente a *A*, unidos com aqueles que pertencem exclusivamente a *B*, unidos com aqueles que pertencem a intersecção (como veremos em seguida!).

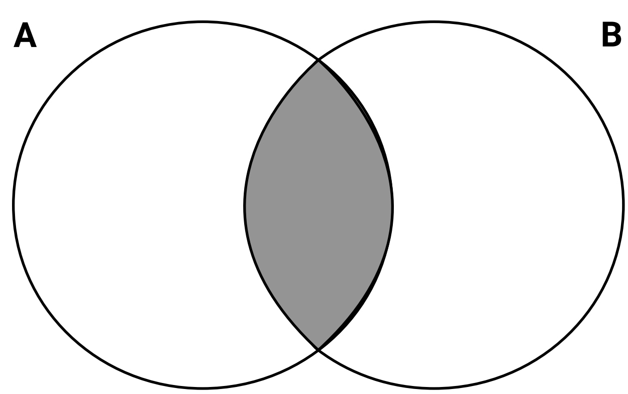
É desta maneira que representamos por Diagramas a relação de disjunção lógica $A \cup B$.

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **Intersecção** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B (conjunção lógica).

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A$ e $x \in B\}$ (lê-se: os elementos do conjunto *A intersecção com B* são representados por x, tal que x pertence a *A* e x pertence a *B*).

Por **diagramas** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:



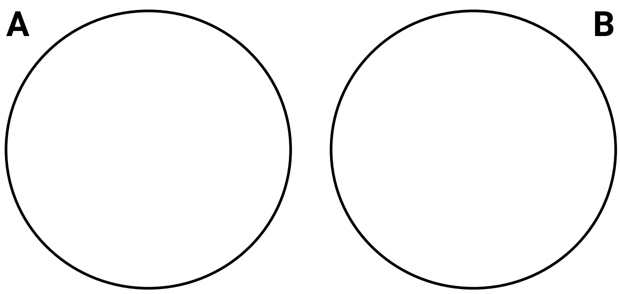
Intersecção dos conjuntos A e B

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cap B$ (*A intersecção com B*) são aqueles que pertencem a *A* e *B* simultaneamente.

É desta maneira que representamos por Diagramas a relação de conjunção lógica $A \cap B$.

Dica

Existe uma diferença entre **Conjuntos Disjuntos** (intersecção vazia) e **Conjuntos Intersecantes** (intersecção não vazia).
Anteriormente, por diagramas, representamos dois conjuntos A e B Intersecantes. Veja na figura a seguir como devemos representar Conjuntos Disjuntos:

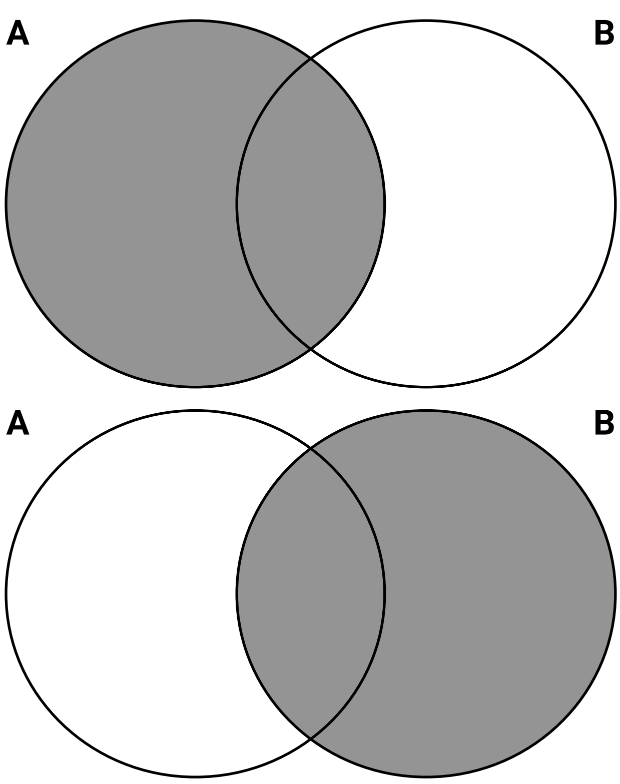


Conjuntos A e B disjuntos

Apresentadas as operações de União e Intersecção entre dois ou mais conjuntos (isso mesmo, você poderia expandir o que aprendemos nestes dois últimos tópicos para 3 ou 4 conjuntos, por exemplo), um princípio é de extrema importância para não contabilizarmos a mais a quantidade de elementos de um conjunto qualquer.

Trata-se do **Princípio da Inclusão-Exclusão,** cuja notação (mais rigorosa e carregada de símbolos) é a seguinte: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (lê-se: o número de elementos do conjunto *A união com B* é dado pelo número de elementos de *A* somado com o número de elementos de *B* menos o número de elementos de *A intersecção com B*).

Observe as seguintes passagens a seguir para constatar a veracidade do Princípio:



Intersecção em relação ao Princípio da Inclusão-Exclusão

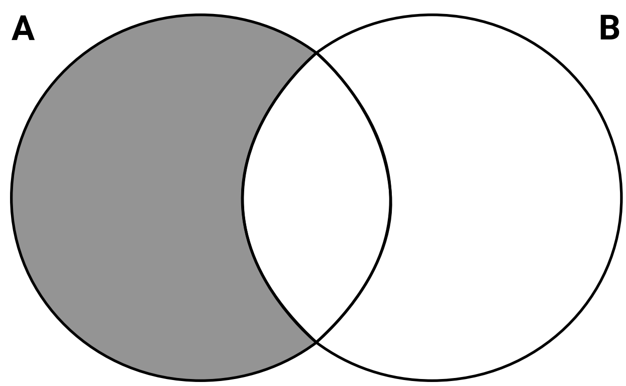
Observe que ao representarmos na figura (à esquerda) o conjunto *A*, automaticamente a intersecção de *A* com *B* ($A \cap B$) foi adicionada, pois ela está contida em *A* ($(A \cap B) \subset A$). O mesmo ocorre em relação ao conjunto B: automaticamente a intersecção de *A* com *B* ($A \cap B$) foi adicionada (figura à direita), pois ela está contida em *B* ($(A \cap B) \subset B$). Portanto, **temos que eliminar a intersecção uma vez** (correspondente ao termo $n(A \cap B)$ no Princípio da Inclusão-Exclusão), para que esta contagem não seja excedida.

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **Diferença** entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (Lê-se: os elementos do conjunto *A diferença com B* são representados por x, tal que x pertence a *A* e x não pertence a *B*).

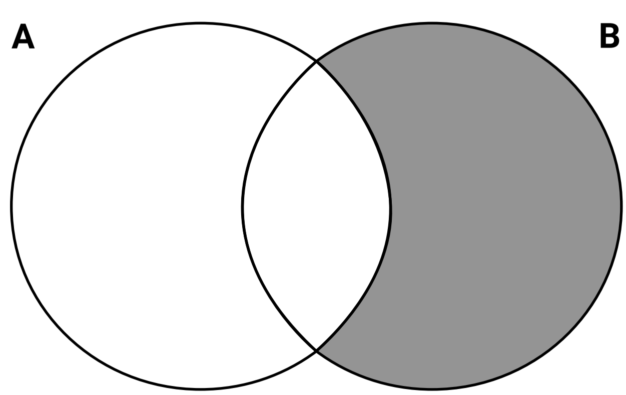
Por **diagramas** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:



Conjunto A diferença com B

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto *A – B* (*A diferença com B*) são aqueles que pertencem exclusivamente ao conjunto *A.*

Da mesma maneira podemos definir o conjunto *B – A* (*B diferença com A*); são aqueles que pertencem exclusivamente ao conjunto *B* (veja figura a seguir).



Conjunto B diferença com A