ÍNDICE

MATEMÁTICA FINANCEIRA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS. TAXAS DE JUROS: NOMINAL, EFETIVA, REAL, EQUIVALENTE E APARENTE. DESCONTO. VALOR PRESENTE, VALOR FUTURO E MONTANTE

JUROS SIMPLES

Toda vez que falamos em juros estamos nos referindo a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor, pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta).

1. Nomenclatura

a) Os juros são representados pela letra **J**.
b) O dinheiro que se deposita ou se empresta chamamos de capital e é representado pela letra **C**.
c) O tempo de depósito ou de empréstimo é representado pela letra **t**.
d) A taxa de juros é a razão centesimal que incide sobre um capital durante certo tempo. É representado pela letra **i** e utilizada para calcular juros.

Chamamos de simples os juros que são somados ao capital inicial no final da aplicação.

FIQUE ATENTO!
Devemos sempre relacionar taxa e tempo numa mesma unidade:
Taxa anual --------------------- tempo em anos
Taxa mensal-------------------- tempo em meses
Taxa diária---------------------- tempo em dias

Exemplo: Uma pessoa empresta a outra, a juros simples, a quantia de R$ 3000,00, pelo prazo de 4 meses, à taxa de 2% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Resolução:

- Capital aplicado (**C**): R$ 3.000,00
- Tempo de aplicação (**t**): 4 meses
- Taxa (**i**): 2% ou 0,02 a.m. (= ao mês)

Fazendo o cálculo, mês a mês:

No final do 1º período (1 mês), os juros serão: 0,02 R$ 3.000,00 = R$ 60,00
No final do 2º período (2 meses), os juros serão: R$ 60,00 + R$ 60,00 = R$ 120,00
No final do 3º período (3 meses), os juros serão: R$ 120,00 + R$ 60,00 = R$ 180,00
No final do 4º período (4 meses), os juros serão: R$ 180,00 + R$ 60,00 = R$ 240,00

#FicaDica

Para evitar essa sequência de cálculos toda vez que vamos calcular os juros simples, existe uma fórmula que quantifica o total de juros simples do período, e ela está apresentada abaixo:

$J=C \cdot i \cdot t$

Além disso, quando quisermos saber o total que será pago de um empréstimo, ou o quanto se resgatará do investimento, o qual definimos como Montante (**M**), basta somar o capital com os juros, usando o conceito fundamental da matemática financeira:

$M=C+J$
Ou
$M=C(1+i \cdot t)$

EXERCÍCIO COMENTADO

1. Um investidor possui R$ 80.000,00. Ele aplica 30% desse dinheiro em um investimento que rende juros simples a uma taxa de 3% a.m., durante 2 meses, e aplica o restante em investimento que rende 2% a.m., durante 2 meses também. Ao fim desse período, esse investidor possui:

a) R$ 83.680,00
b) R$ 84.000,00
c) R$ 84.320,00
d) R$ 84.400,00
e) R$ 88.000,00

Resposta: Letra A. Temos neste problema um capital sendo investido em duas etapas. Vamos realizar os cálculos separadamente:

1º investimento
30% de R$ 80.000,00 = R$ 24.000,00 valor a ser investido a uma taxa i = 3% a.m., durante um período t = 2 meses.
Lembrando que i = 3% = 0,03.
Cálculo dos juros J, onde : $J=C \cdot i \cdot t$:
$J = 24000 \cdot (0,03) \cdot 2 = 1440$.
Juros do 1º investimento = R$ 1440,00.

2º investimento
R$ 80.000,00 – R$ 24.000,00 = R$ 56.000,00 valor a ser investido a uma taxa i = 2% a.m., durante um período t = 2 meses.
$J = 56000 \cdot (0,02) \cdot 2 = 2240$.
Juros do 2º investimento = R$ 2.240,00.
Portanto, o montante final será de
R$ 80.00,00 + R$ 1.440,00 + R$ 2.240,00 = R$ 83.680,00.

2. Calcule o montante resultante da aplicação de R$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

Resposta:
$M = P \cdot (1 + (i \cdot t))$
$M = 70000\ [1 + (10{,}5/100) \cdot (145/360)] = R\$72.960{,}42$

Observe que expressamos a taxa i e o período t na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

Juros Compostos

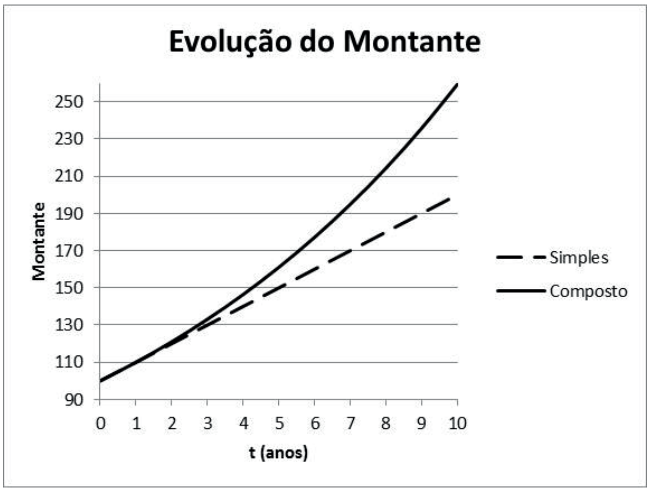
O capital inicial (principal) pode crescer como já sabemos, devido aos juros. Basicamente, há duas modalidades de como se calcular os juros:

Juros simples - ao longo do tempo, somente o principal rende juros.
Juros compostos - após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

Vamos ilustrar a diferença entre os crescimentos de um capital através juros simples e juros compostos, com um exemplo: Suponha que $100,00 são empregados a uma taxa de 10% a.a. (ao ano) Teremos:

Capital = 100	Juros Simples	Juros Compostos
N° de Anos	Montante Simples	Montante Composto
1	100 + 0,1 · 100 = 110	100,00 + 0,1 · (100,00) = 110,00
2	110 + 0,1 · 100 = 120	110,00 + 0,1 · (110,00) = 121,00
3	120 + 0,1 · 100 = 130	121,00 + 0,1 · (121,00) = 133,10
4	130 + 0,1 · 100 = 140	133,10 + 0,1 · (133,10) = 146,41
5	140 + 0,1 · 100 = 150	146,41 + 0,1 · (146,41) = 161,05

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é LINEAR enquanto que o crescimento segundo juros compostos é EXPONENCIAL, e, portanto tem um crescimento muito mais "rápido". Isto poderia ser ilustrado graficamente da seguinte forma:



Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores particulares costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na Economia. Na verdade, o uso de juros simples não se justifica em estudos econômicos.

Fórmula para o cálculo de Juros compostos

Considere o capital inicial (principal P) $1000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (capital + juros), mês a mês:

Após o 1º mês, teremos: $M_1 = 1000 \cdot 1,1 = 1100 = 1000(1 + 0,1)$

Após o 2º mês, teremos: $M_2 = 1100 \cdot 1,1 = 1210 = 1000(1 + 0,1)^2$

Após o 3º mês, teremos: $M_3 = 1210 \cdot 1,1 = 1331 = 1000(1 + 0,1)^3$

....

Após o nº (enésimo) mês, sendo S o montante, teremos evidentemente: $M = 1000(1 + 0,1)^n$

De uma forma genérica, teremos para um capital C, aplicado a uma taxa de juros compostos i durante o período n :

$M = C(1 + i)^n$

Onde M = montante, C = Capital, i = taxa de juros e n = número de períodos que o principal C foi aplicado.

#Fica a dica: Na fórmula acima, as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 3 · 12=36 meses.

Exemplo: Calcule o montante de uma aplicação financeira de R$ 2000,00 aplicada a juros compostos de 2% ao mês durante 2 meses:

Resolução:

$$M = C\cdot(1 + i)^n \rightarrow M = 2000\cdot(1 + 0,02)^2 \rightarrow M = 2000\cdot(1,02)^2 = R\$\ 2080,80$$

Com aplicação da fórmula, obtém-se o montante. Agora, se quisermos os juros? Como se calcula os juros desta aplicação sendo que agora não temos uma fórmula para J como nos juros simples? Para resolver isso, basta relembrar o conceito fundamental:

$M=C+J \rightarrow J=M-C$

Como calculamos o montante e temos o capital:

$J=M-C \rightarrow 2080,80-2000,00=R\$\ 80,80$

Esse exemplo é a aplicação básica de juros compostos.

FIQUE ATENTO!

Alguns concursos podem complicar um pouco as questões, deixando como incógnita o período da operação "n".

Exemplo: Em quanto tempo devo deixar R$ 3000,00 em uma aplicação para que renda um montante de R$ 3376,53 a uma taxa de 3% ao mês.

Resolução: Neste caso, precisamos saber n, vamos isolá-lo na fórmula do montante:

$$M = C(1+i)^n \rightarrow \left(\frac{M}{C}\right) = (1+i)^n \rightarrow \log\left(\frac{M}{C}\right) = \log(1+i)^n$$

$$\log\left(\frac{M}{C}\right) = n \cdot \log(1+i) \rightarrow$$

$$n = \frac{\left(\log\left(\frac{M}{C}\right)\right)}{\log(1+i)}$$

A fórmula envolve logaritmos e você tem dois caminhos: Memorize ou sempre lembre da dedução a partir da fórmula do montante. Substituindo os valores:

$$n = \frac{\left(\log\left(\frac{3376,53}{3000}\right)\right)}{\log(1+0,03)} = \frac{\log(1,1255)}{\log(1,03)} = 4 \text{ meses}$$

EXERCÍCIO COMENTADO

1. Calcule o montante de um empréstimo a juros compostos de R$ 3000,00 a uma taxa de 1% a.m durante 3 meses. Dado: $1,01^3 = 1,0303$

a) R$ 3060,30
b) R$ 3090,90
c) R$ 3121,81
d) R$ 3250,30
e) R$ 3450,40

Resposta: Letra B.
$M = C(1 + i)^n \rightarrow M = 3000\cdot(1 + 0,01)^3 \rightarrow M = 3000\cdot(1,01)^3 = R\$\ 3090,90$

2. Calcule o montante de um empréstimo a juros compostos de R$ 10000,00 a uma taxa de 0,5% a.m durante 6 meses. Dado: $1,005^6 = 1,0304$

a) R$ 10303,77
b) R$ 10090,90
c) R$ 13030,77
d) R$ 13250,80
e) NDA

Resposta: Letra a.
$M = C(1 + i)^n \rightarrow M = 10000\cdot(1 + 0,005)^6 \rightarrow M = 10000\cdot(1,005)^6 = R\$\ 10303,77$

TAXAS DE JUROS

Podemos definir a taxa nominal como aquela em que a unidade de referência do seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. É usada no mercado financeiro, mas para cálculo deve-se encontrar a taxa efetiva. Por exemplo, a taxa nominal de 12% ao ano, capitalizada mensalmente, resultará em uma taxa mensal de 1% ao mês. Entretanto, quando esta taxa é capitalizada pelo regime de juros compostos, teremos uma taxa efetiva de 12,68% ao ano.

1. Taxa Nominal

A taxa nominal de juros relativa a uma operação financeira pode ser calculada pela expressão:

Taxa nominal = Juros pagos / Valor nominal do empréstimo

Assim, por exemplo, se um empréstimo de $100.000,00, deve ser quitado ao final de um ano, pelo valor monetário de $150.000,00, a taxa de juros nominal será dada por:

Juros pagos = J_p = \$150.000 – \$100.000 = \$50.000,00
Taxa nominal = i_n = \$50.000 / \$100.000 = 0,50 = 50%

Sem dúvida, se tem um assunto que gera muita confusão na Matemática Financeira são os conceitos de taxa nominal, taxa efetiva e taxa equivalente. Até na esfera judicial esses assuntos geram muitas dúvidas nos cálculos de empréstimos, financiamentos, consórcios e etc.

Vamos tentar esclarecer esses conceitos, que na maioria das vezes nos livros e apostilas disponíveis no mercado, não são apresentados de uma maneira clara.

Temos a chamada **taxa de juros nominal**, quando esta não é realmente a taxa utilizada para o cálculo dos juros (é uma taxa "sem efeito"). A capitalização (o prazo de formação e incorporação de juros ao capital inicial) será dada através de outra taxa, numa unidade de tempo diferente, **taxa efetiva**.

Como calcular a taxa que realmente vai ser utilizada; isto é, a **taxa efetiva?**

Vamos acompanhar através do exemplo

1.1. Taxa Efetiva

Calcular o montante de um capital de R$ 1.000,00 (mil reais), aplicados durante 18 (dezoito) meses, **capitalizados mensalmente**, a uma taxa de 12% a.a. Explicando o que é taxa Nominal, efetiva mensal e equivalente mensal:

2. Respostas e soluções

1) A taxa Nominal é 12% a.a; pois o capital não vai ser capitalizado com a taxa anual.
2) A taxa efetiva mensal a ser utilizada depende de duas convenções: taxa proporcional mensal ou taxa equivalente mensal.

a) Taxa proporcional mensal (divide-se a taxa anual por 12): 12%/12 = **1% a.m.**
b) Taxa equivalente mensal (é aquela que aplicado aos R$ 1.000,00, rende os mesmos juros que a taxa anual aplicada nesse mesmo capital).

Cálculo da taxa equivalente mensal:

$$i_q = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1$$

onde:
i_q : taxa equivalente para o prazo que eu quero
i_t : taxa para o prazo que eu tenho
q : prazo que eu quero
t : prazo que eu tenho

$$i_q = (1 + 0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}12)^{0{,}083333} - 1$$

i_q = 0,009489 a.m ou i_q = 0,949 % a.m.

3) Cálculo do montante pedido, utilizando a taxa efetiva mensal

a) pela convenção da taxa proporcional:
$M = c\,(1 + i)^n$
$M = 1000\,(1 + 0{,}01)^{18} = 1.000 \times 1{,}196147$
M = 1.196,15

b) pela convenção da taxa equivalente:
$M = c\,(1 + i)^n$
$M = 1000\,(1 + 0{,}009489)^{18} = 1.000 \times 1{,}185296$
M = 1.185,29

NOTA: Para comprovar que a taxa de 0,948% a.m é equivalente a taxa de 12% a.a, basta calcular o montante utilizando a taxa anual, neste caso teremos que transformar 18 (dezoito) meses em anos para fazer o cálculo, ou seja : 18: 12 = 1,5 ano. Assim:
$M = c\,(1 + i)^n$
$M = 1000\,(1 + 0{,}12)^{1{,}5} = 1.000 \times 1{,}185297$
M = 1.185,29

3. Conclusões

- A taxa nominal é 12% a.a, pois não foi aplicada no cálculo do montante. Normalmente a taxa nominal vem sempre ao ano!
- A taxa efetiva mensal, como o próprio nome diz, é aquela que foi utilizado para cálculo do montante. Pode ser uma taxa proporcional mensal (1 % a.m.) ou uma taxa equivalente mensal (0,949 % a.m.).
- Qual a taxa efetiva mensal que devemos utilizar? Em se tratando de concursos públicos, a grande maioria das bancas examinadoras utilizam a convenção da taxa proporcional. Em se tratando do mercado financeiro, utiliza-se a convenção de taxa equivalente.

4. Taxa Equivalente

Taxas Equivalentes são taxas que quando aplicadas ao mesmo capital, num mesmo intervalo de tempo, produzem montantes iguais. Essas taxas devem ser observadas com muita atenção, em alguns financiamentos de longo prazo, somos apenas informados da taxa mensal de juros e não tomamos conhecimento da taxa anual ou dentro do período estabelecido, trimestre, semestre entre outros. Uma expressão matemática básica e de fácil manuseio que nos fornece a equivalência de duas taxas é:

$1 + ia = (1 + ip)^n$, onde:
ia = taxa anual
ip = taxa período
n: número de períodos

Observe alguns cálculos:

Exemplo 1
Qual a taxa anual de juros equivalente a 2% ao mês?
Temos que: 2% = 2/100 = 0,02
$1 + ia = (1 + 0{,}02)^{12}$
$1 + ia = 1{,}02^{12}$
$1 + ia = 1{,}2682$
$ia = 1{,}2682 – 1$
$ia = 0{,}2682$
ia = 26,82%
A taxa anual de juros equivalente a 2% ao mês é de 26,82%.

As pessoas desatentas poderiam pensar que a taxa anual nesse caso seria calculada da seguinte forma: 2% x 12 = 24% ao ano. Como vimos, esse tipo de cálculo não procede, pois a taxa anual foi calculada de forma correta e corresponde a 26,82% ao ano, essa variação ocorre porque temos que levar em conta o andamento dos juros compostos (juros sobre juros).

5. Taxa Real

A taxa real expurga o efeito da inflação. Um aspecto interessante sobre as taxas reais de juros, é que elas podem ser inclusive, negativas.

Vamos encontrar uma relação entre as taxas de juros nominal e real. Para isto, vamos supor que um determinado capital **P** é aplicado por um período de tempo unitário, a certa taxa nominal i_n

O montante S_1 ao final do período será dado por $S_1 = P(1 + i_n)$.

Consideremos agora que durante o mesmo período, a taxa de inflação (desvalorização da moeda) foi igual a **j**. O capital corrigido por esta taxa acarretaria um montante $S_2 = P (1 + j)$.

A taxa real de juros, indicada por **r**, será aquela aplicada ao montante S_2, produzirá o montante S_1. Poderemos então escrever: $S_1 = S_2 (1 + r)$

Substituindo S_1 e S_2 , vem:
$P(1 + i_n) = (1+r). P (1 + j)$

Daí então, vem que:
$(1 + i_n) = (1+r). (1 + j)$, **onde:**
i_n = taxa de juros nominal
j = taxa de inflação no período
r = taxa real de juros
Observe que se a taxa de inflação for nula no período, isto é, **j = 0**, teremos que as taxas nominal e real são coincidentes.

Exemplo
Numa operação financeira com taxas pré-fixadas, um banco empresta \$120.000,00 para ser pago em um ano com \$150.000,00. Sendo a inflação durante o período do empréstimo igual a 10%, pede-se calcular as taxas nominal e real deste empréstimo.
Teremos que a taxa nominal será igual a:
i_n = (150.000 – 120.000)/120.000 = 30.000/120.000 = 0,25 = 25%
Portanto i_n = 25%
Como a taxa de inflação no período é igual a j = 10% = 0,10, substituindo na fórmula anterior, vem:
$(1 + i_n) = (1+r). (1 + j)$
$(1 + 0{,}25) = (1 + r).(1 + 0{,}10)$
$1{,}25 = (1 + r).1{,}10$
$1 + r = 1{,}25/1{,}10 = 1{,}1364$
Portanto, r = 1,1364 – 1 = 0,1364 = 13,64%

Se a taxa de inflação no período fosse igual a 30%, teríamos para a taxa real de juros:
$(1 + 0{,}25) = (1 + r).(1 + 0{,}30)$
$1{,}25 = (1 + r).1{,}30$
$1 + r = 1{,}25/1{,}30 = 0{,}9615$
Portanto, r = 0,9615 – 1 = -,0385 = -3,85% e, portanto teríamos uma taxa real de juros negativa.

Exemplo
\$100.000,00 foi emprestado para ser quitado por \$150.000,00 ao final de um ano. Se a inflação no período foi de 20%, qual a taxa real do empréstimo?
Resposta: 25%

6. Taxas Proporcionais

Para se compreender mais claramente o significado destas taxas deve-se reconhecer que toda operação envolve dois prazos:
- o prazo a que se refere à taxa de juros; e
- o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros. (ASSAF NETO, 2001).

Taxas Proporcionais: duas (ou mais) taxas de juro simples são ditas proporcionais quando seus valores e seus respectivos períodos de tempo, reduzidos a uma mesma unidade, forem uma proporção. (PARENTE, 1996). Exemplos
Prestação = amortização + juros

Há diferentes formas de amortização, conforme descritas a seguir.

Para os exemplos numéricos descritos nas tabelas, em todas as diferentes formas de amortização, utilizaremos o mesmo exercício: uma dívida de valor inicial de R$ 100 mil, prazo de três meses e juros de 3% ao mês.

Pagamento único

É a quitação de toda a dívida (amortização + juros) em um único pagamento, ao final do período. Utilizamos a mesma fórmula do montante:

Nos juros simples:

$M = C\,(1 + i \times n)$

M = montante

C = capital inicial

i = taxa de juros

n = período

Nos juros compostos:

$M = C\,(1+i)^n$

M = montante

C = capital inicial

i = taxa de juros

n = período

Nos juros simples:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	-	-	103.000,00
2	3.000,00	-	-	106.000,00
3	3.000,00	100.000,00	109.000,00	-

Nos juros compostos:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	-	-	103.000,00
2	3.090,00	-	-	106.090,00
3	3.182,70	100.000,00	109.272,70	-

7. Sistema *Price* (Sistema Francês)

Foi elaborado para apresentar pagamentos iguais ao longo do período do desembolso das prestações. A fórmula para encontrarmos a prestação é dada a seguir:

$$PMT = V_P \cdot \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

PMT = valor da prestação

V_P = valor inicial do empréstimo

i = taxa de juros
n = período

A fórmula foi desenvolvida, considerando-se apenas a capitalização por juros compostos. O resultado é listado a seguir:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	32.353,04	35.353,04	67.646,96
2	2.029,41	33.323,63	35.353,04	34.323,33
3	1.029,71	34.323,33	35.353,04	-

8. **Sistema de Amortização Misto (SAM)**

É a média aritmética das prestações calculadas nas duas formas anteriores (SAC e *Price*). É encontrado pela fórmula:

$PMT_{SAM} = (PTM_{SAC} + PMT_{PRICE}) / 2$

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	32.843,19	35.843,19	67.156,81
2	2.014,70	33.328,49	35.343,19	33.828,32
3	1.014,87	33.828,32	34.843,19	-

9. Sistema de Amortização Crescente (SACRE)

Este sistema, criado pela Caixa Econômica Federal (CEF), é uma das formas utilizadas para o cálculo das prestações dos financiamentos imobiliários. Usa-se, para o cálculo do valor das prestações, a metodologia do sistema de amortização constante (SAC) anual, desconsiderando-se o valor da Taxa Referencial de Juros (TR). Esta é incluída posteriormente, resultando em uma amortização variável. Chamar de "amortização crescente" parece-nos inadequado, pois pode resultar em amortizações decrescentes, dependendo da ocorrência de TR com valor muito baixo.

10. Sistema Alemão

Neste caso, a dívida é liquidada também em prestações iguais, exceto a primeira, onde no ato do empréstimo (momento "zero") já é feita uma cobrança dos juros da operação. As prestações, a primeira amortização e as seguintes são definidas pelas três seguintes fórmulas:

$$PMT = \frac{V_p . i}{1 - (1+i)^n}$$

PMT = valor da prestação
V_p = valor inicial do empréstimo
i = taxa de juros
n = período

$A_1 = PMT . (1 - i)^{n-1}$
A_1 = primeira amortização
PMT = valor da prestação
i = taxa de juros
n = período

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{(1-i)}$$

A_n = amortizações posteriores (2º, 3º, 4º, ...)
A_{n-1} = amortização anterior
i = taxa de juros
n = período

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	3.000,00	-	3.000,00	100.000,00
1	2.030,30	32.323,34	34.353,64	67.676,66
2	1.030,61	33.323,03	34.353,64	34.353,63
3	-	34.353,64	34.353,64	(0,01)

OBS: os resíduos em centavos, como saldo devedor final na tabela anterior, são resultados de arredondamento do cálculo e serão desconsiderados.

11. Sistema de Amortização Constante – SAC

Consiste em um sistema de amortização de uma dívida em prestações periódicas, sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, em que o valor da prestação é composto por uma parcela de juros uniformemente decrescente e outra de amortização que permanece constante.

Sistema de Amortização Constante (SAC) é uma forma de amortização de um empréstimo por prestações que incluem os juros, amortizando assim partes iguais do valor total do empréstimo.

Neste sistema o saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais. Desta forma, no sistema SAC o valor das prestações é decrescente, já que os juros diminuem a cada prestação. O valor da amortização é calculado dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento, ou seja, de parcelas.

O SAC é um dos tipos de sistema de amortização utilizados em financiamentos imobiliários. A principal característica do SAC é que ele amortiza um percentual fixo do saldo devedor desde o início do financiamento. Esse percentual de amortização é sempre o mesmo, o que faz com que a parcela de amortização da dívida seja maior no início do financiamento, fazendo com que o saldo devedor caia mais rapidamente do que em outros mecanismos de amortização.

Exemplo:

Um empréstimo de R$ 120.000,00 (cento e vinte mil reais) a ser pago em 12 meses, a uma taxa de juros de 1% ao mês (em juros simples). Aplicando a fórmula para obtenção do valor da amortização, iremos obter um valor igual a R$ 10.000,00 (dez mil reais). Essa fórmula é o valor do empréstimo solicitado divido pelo período, sendo nesse caso: R$ 120.000,00 / 12 meses = R$ 10.000,00. Logo, a tabela SAC fica:

Nº Prestação	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				120000
1	11200	1200	10000	110000
2	11100	1100	10000	100000
3	11000	1000	10000	90000
4	10900	900	10000	80000
5	10800	800	10000	70000
6	10700	700	10000	60000
7	10600	600	10000	50000
8	10500	500	10000	40000
9	10400	400	10000	30000

10	10300	300	10000	20000
11	10200	200	10000	10000
12	10100	100	10000	0

Note que o juro é sempre 10% do saldo devedor do mês anterior, já a prestação é a soma da amortização e o juro. Sendo assim, o juro é decrescente e diminui sempre na mesma quantidade, R$ 100,00. O mesmo comportamento tem as prestações. A soma das prestações é de R$ 127.800,00, gerando juros de R$ 7.800,00.

Outra coisa a se observar é que as parcelas e juros diminuem em progressão aritmética (PA) de r=100.

12. Sistema Americano

O tomador do empréstimo paga os juros mensalmente e o principal, em um único pagamento final.

Considera-se apenas o regime de juros compostos:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	-	3.000,00	100.000,00
2	3.000,00	-	3.000,00	100.000,00
3	3.000,00	100.000,00	103.000,00	-

13. Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês

O tomador do empréstimo amortiza o saldo devedor em valores iguais e constantes ao longo do período.

Considera-se apenas o regime de juros compostos:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	100.000,00
1	3.000,00	33.333,33	36.333,33	66.666,67
2	2.000,00	33.333,33	35.333,33	33.333,34
3	1.000,00	33.333,34	34.333,34	-

Qual a melhor forma de amortização?

A tabela abaixo lista o fluxo de caixa nos diversos sistemas de amortização discutidos nos itens anteriores.

N	Pgto único (jrs comp.)	Sistema Americano	SAC	PRICE	SAM	Alemão
0	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	97.000,00
1	-	(3.000,00)	(36.333,33)	(35.353,04)	(35.843,19)	(34.353,64)
2	-	(3.000,00)	(35.333,33)	(35.353,04)	(35.343,19)	(34.353,64)
3	(109.272,70)	(103.000,00)	(34.333,34)	(35.353,04)	(34.843,19)	(34.353,64)

As várias formas de amortização utilizadas pelo mercado brasileiro, em sua maioria, consideram o regime de capitalização por juros compostos. A comparação entre estas, por meio do VPL (vide item 6.2), demonstra que o custo entre elas se equivale. Vejam: no nosso exemplo, todos, exceto no sistema alemão, os juros efetivos cobrados foram de 3% ao mês (regime de juros compostos) ou 9,27% no acumulado dos três meses.

n	Pgto único (jrs comp.)	Sistema Americano	SAC	PRICE	SAM	Alemão
0	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	97.000,00
1	-	(2.912,62)	(35.275,08)	(34.323,34)	(34.799,21)	(33.353,04)
2	-	(2.827,79)	(33.305,05)	(33.323,63)	(33.314,35)	(32.381,60)
3	(100.000,00)	(94.259,59)	(31.419,87)	(32.353,04)	(31.886,45)	(31.438,44)
VPL	-	-	-	-	-	(173,09)

OBS: tabela com as prestações dos sistemas anteriores, descontada da taxa (juros compostos) de 3% ao mês.

Considerando o custo de oportunidade de 2% ao mês, isto é, abaixo do valor do empréstimo, teríamos a tabela abaixo. Isso seria uma situação mais comum: juros do empréstimo mais caro que uma aplicação no mercado. Neste caso, quanto menor (em módulo) o VPL, melhor para o tomador do empréstimo, ou seja, o sistema SAC seria o melhor sob o ponto de vista financeiro.

n	Pgto único (jrs comp.)	Sistema Americano	SAC	PRICE	SAM	Alemão
0	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	97.000,00
1	-	(2.941,18)	(35.620,91)	(34.659,84)	(35.140,38)	(33.680,04)
2	-	(2.883,51)	(33.961,29)	(33.980,24)	(33.970,77)	(33.019,64)
3	(102.970,11)	(97.059,20)	(32.353,07)	(33.313,96)	(32.833,52)	(32.372,20)
VPL	(2.970,11)	(2.883,88)	(1.935,28)	(1.954,04)	(1.944,67)	(2.071,88)

OBS: tabela com as prestações dos sistemas anteriores, descontada da taxa (juros compostos) de 2% ao mês.

Outra situação seria considerarmos um empréstimo com taxa de juros abaixo do mercado. Neste exemplo a seguir, teremos como custo de oportunidade a taxa de 4% ao mês. Isso, na vida real, não será comum: juros do empréstimo mais barato do que uma aplicação no mercado. Assim, como no exemplo anterior, quanto maior o VPL, melhor para o tomador do empréstimo, ou seja, o sistema de pagamento único, sob o ponto de vista financeiro, é o melhor, como no caso abaixo.

n	Pgto único (jrs comp.)	Sistema Americano	SAC	PRICE	SAM	Alemão
0	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	100.000,00	97.000,00
1	-	(2.884,62)	(34.935,89)	(33.993,31)	(34.464,61)	(33.032,34)
2	-	(2.773,67)	(32.667,65)	(32.685,87)	(32.676,77)	(31.761,87)
3	(97.143,03)	(91.566,62)	(30.522,21)	(31.428,72)	(30.975,47)	(30.540,26)
VPL	2.856,97	2.775,09	1.874,24	1.892,10	1.883,16	1.665,53

OBS: tabela com as prestações dos sistemas anteriores, descontada da taxa (juros compostos) de 4% ao mês.

Referências

*Passei Direto. Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/1599335/exercicios_matematica_finaceiraexercicios_matematica_finaceira*Nos juros compostos:

$M = C\,(1+i)^n$
M = montante
C = capital inicial
i = taxa de juros
n = período

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (TRE/PR – ANALISTA JUDICIÁRIO – FCC/2017) Para comprar um automóvel, Pedro realizou uma pesquisa em 3 concessionárias e obteve as seguintes propostas de financiamento:

Concessionária 1: Entrada de R$ 12.000,00 + 1 prestação de R$ 29.120,00 para 30 dias após a entrada.
Concessionária 2: Entrada de R$ 13.000,00 + 1 prestação de R$ 29.120,00 para 60 dias após a entrada.
Concessionária 3: Entrada de R$ 13.000,00 + 2 prestações R$ 14.560,00 para 30 e 60 dias após a entrada, respectivamente.

Sabendo que a taxa de juros compostos era 4% ao mês, para a aquisição do automóvel

a) a melhor proposta é a 1, apenas.
b) a melhor proposta é a 2, apenas.
c) a melhor proposta é a 3, apenas.
d) as melhores propostas são 2 e 3, por serem equivalentes.
e) as melhores propostas são 1 e 2, por serem equivalentes.

Resposta: Letra B..

Concessionária 1

$$12000 + \frac{29120}{1{,}04} = 12000 + 28000 = 40000$$

Concessionária 2

$$13000 + \frac{29120}{1{,}04^2} = 13000 + \frac{28000}{1{,}04} = 39923{,}07$$

Concessionária 3

$$13000 + \frac{14560}{1{,}04} + \frac{14560}{1{,}04^2} = 13000 + 14000 + \frac{14000}{1{,}04} = 13000 + 14000 + 13461{,}54 = 40461{,}53$$

2. (TST – ANALISTA JUDICIÁRIO – FCC/2017) Um empréstimo foi obtido para ser liquidado em 10 parcelas mensais de R$ 2.000,00, vencendo-se a primeira parcela um mês após a data da obtenção. A taxa de juros negociada com a instituição financeira foi 2% ao mês no regime de capitalização composta. Se, após o pagamento da oitava parcela, o devedor decidir liquidar o saldo devedor do empréstimo nesta mesma data, o valor que deverá ser pago, desprezando-se os centavos, é, em reais,

a) 3.846,00.
b) 3.883,00.
c) 3.840,00.
d) 3.880,00.
e) 3.845,00.

Resposta: Letra B.

$$\frac{2000}{1{,}02} + \frac{2000}{1{,}02^2} = 1960 + 1923 = 3883$$

3. (POLICIA CIENTIFICA/PR – PERITO CRIMINAL – IBFC/2017) Assinale a alternativa correta. Uma pessoa comprou um vídeo game de última geração em uma loja, parcelando em 12 prestações mensais de 140,00 cada uma, sem entrada. Sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pela loja foi de 3% ao mês, sendo que os valores estão arredondados e que: $(1{,}03)^{12} = 1{,}4258$

$(1{,}03)^{12} \times 0{,}03 = 0{,}0428$
$0{,}4258/0{,}0428 = 9{,}95$

O valor do vídeo game era de:

a) R$ 1.393
b) R$ 1.820
c) R$ 1.680
d) R$ 1.178
e) R$ 1.423

Resposta: Letra A.
Sendo PMT o valor da parcela e PV o valor presente, usaremos o sistema de amortização PRICE, por ser parcelas fixas:

$$PMT = \frac{PV(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$P = \frac{140[(1+0{,}03)^{12} - 1]}{(1+0{,}03)^{12} \cdot 0{,}03} = \frac{140 \cdot (1{,}4258 - 1)}{0{,}0428} = 140 \cdot \frac{0{,}4258}{0{,}0428} = 140 \cdot 9{,}95 = 1393$$

4. (TST – ANALISTA JUDICIÁRIO – FCC/2017) Um investidor aplicou R$ 10.000,00 em títulos que remuneram à taxa de juros compostos de 10% ao ano e o prazo para resgate da aplicação foi de 2 anos. Sabendo-se que a inflação no prazo total da aplicação foi 15%, a taxa real de remuneração obtida pelo investidor no prazo total da aplicação foi

a) 5,00%.
b) 6,00%.
c) 5,22%.
d) 5,00% (negativo).
e) 4,55%.

Resposta: Letra C.
Sendo i a taxa de juros nominal
R a taxa de juros real
J a taxa de juros de inflação
$1+i=(1+r)(1+j)$
$(1+0{,}1)^2=(1+r)\cdot(1+0{,}15)$
$1{,}1^2=(1+r)\cdot 1{,}15$

1,21=1,15+1,15r
0,06=1,15r
R=0,05217≅0,0522=5,22%

5. (TST - ANALISTA JUDICIÁRIO - FCC/2017) Uma empresa obteve um empréstimo no valor de R$ 100.000,00 para ser liquidado em uma única parcela no final do prazo de 2 meses. A taxa de juros compostos negociada foi 3% ao mês e a empresa deve pagar, adicionalmente, na data da obtenção do empréstimo, uma taxa de cadastro no valor de R$ 1.000,00. Na data do vencimento do empréstimo a empresa deve pagar, junto com o valor que pagará à instituição financeira, um imposto no valor de R$ 530,00. O custo efetivo total para a empresa no prazo do empréstimo, foi

a) 7,70%.
b) 6,09%.
d) 7,62%.
d) 6,00%.
e) 7,16%.

Resposta: Letra A.
$M=C(1+i)^t$
$M=100000(1+0{,}03)^2=106090$
Como teve uma taxa de 1000, a empresa recebeu então 99000
A empresa teve eu pagar 106090+530=106620
106620=99000(1+i)
106620=99000+99000i
7620=99000i
I=0,0769=7,69%

6. (TRE/PR - ANALISTA JUDICIÁRIO - FCC/2017) A Cia. Ted está avaliando a alternativa de compra de um novo equipamento por R$ 480.000,00 à vista. Estima-se que a vida útil do equipamento seja de 3 anos, que o valor residual de revenda no final do terceiro ano seja R$ 70.000,00 e que os fluxos líquidos de caixa gerados por este equipamento ao final de cada ano sejam R$ 120.000,00, R$180.000,00 e R$ 200.000,00, respectivamente. Sabendo que a taxa mínima de atratividade é de 10% a.a., a alternativa

a) apresenta valor presente líquido positivo.
b) apresenta valor presente líquido negativo.
c) apresenta taxa interna de retorno maior que 10% a.a.
d) é economicamente viável à taxa mínima de atratividade de 10% a.a..
e) é economicamente viável à taxa mínima de atratividade de 12% a.a..

Resposta: Letra B.
VPL = valor presente das entradas – valor presente das saídas

$$VPL = \frac{120000}{1,1} + \frac{180000}{1,1^2} + \frac{270000}{1,1^3} - 480000 = -19296$$

7. (FUNAPE – ANALISTA EM GESTÃO PREVIDENCIÁRIA – FCC/2017) Um empréstimo foi contratado com uma taxa nominal de juros de 6% ao trimestre e com capitalização mensal. A taxa efetiva desse empréstimo é igual a

(A) 6,2302%.
(B) 6,3014%.
(C) 6,1385%.
(D) 6,2463%.
(E) 6,1208%.

Resposta: Letra E.
Temos que transformar os 6% ao trimestre em capitalização mensal
6/3=2%a.m
$1{,}02^3=1{,}061208=6{,}1208\%$

8. (TRE/BA – TÉCNICO JUDICIÁRIO – CESPE/2017) Um banco emprestou a uma empresa R$ 100.000, entregues no ato, sem prazo de carência, para serem pagos em quatro prestações anuais consecutivas pelo sistema de amortização constante (SAC). A taxa de juros compostos contratada para o empréstimo foi de 10% ao ano, e a primeira prestação será paga um ano após a tomada do empréstimo.
Nessa situação, o valor da segunda prestação a ser paga pela empresa será

a) superior a R$ 33.000.
b) inferior a R$ 30.000.
c) superior a R$ 30.000 e inferior a R$ 31.000.
d) superior a R$ 31.000 e inferior a R$ 32.000.
e) superior a R$ 32.000 e inferior a R$ 33.000.

Resposta: Letra E.
SD=100000
A=100000/4=25000
J=(100000-25000)⋅0,1
J=7500
P=A+J
P=25000+7500=32500

9. (EMBASA – CONTADOR – IBFC/2017) Um cliente fez um empréstimo no valor de R$ 2.000,00 no Banco ABC em 31/12/2013 para reaplicar em um investimento em sua empresa. A taxa de juros cobrada pelo Banco era de 10% ao ano. Após um ano, em 31/12/2014, o fluxo de caixa da empresa foi de R$ 1.100,00. Após dois anos, em 31/12/2015, o fluxo de caixa da empresa foi de R$ 1.210,00 e em 31/12/2016, após três anos, o fluxo de caixa da empresa foi de R$ 1.331,00.
O valor presente líquido dos valores do fluxo de caixa, trazidos a valor presente em 31/12/2013, era de:

a) R$ 1.100,00
b) R$ 1.000,00
c) R$ 2.210,00
d) R$ 2.331,00

Resposta: Letra B.

$$VPL = \frac{1100}{1,1} + \frac{1210}{1,1^2} + \frac{1331}{1,1^3} - 2000 = 1000 + 1000 + 1000 - 2000 = 3000 - 2000 = 1000$$

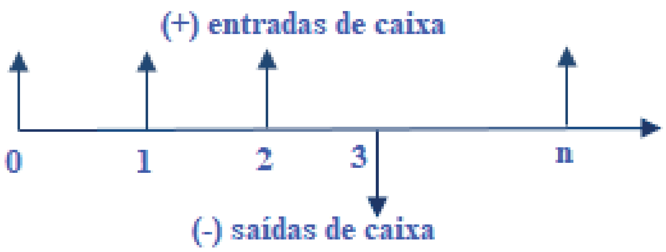
10.(DPE/PR – CONTADOR – INAZ DO PARÁ/2017) Um comerciante recebeu, no meio do mês, uma excelente oferta de compra de material para sua empresa no valor de R$8.000,00. No entanto, por estar desprovido de recursos, precisou tomar um empréstimo junto ao seu banco, em parcelas de 15 vezes a uma taxa de juros 2,5% a.m. Determine o valor da última prestação do empréstimo, lembrando que o Sistema de financiamento usado é o SAC.

a) R$ 533,33
b) R$ 733,33
c) R$ 653,33
d) R$ 560,00
e) R$ 546,67

Resposta: Letra E.
8000/15 = 533,33
Portanto, a última parcela será de 533,33 · 1,025=546,66

FLUXO DE CAIXA

Um fluxo de caixa se caracteriza pela representação de um conjunto de entradas e saídas do dinheiro do caixa a longo do tempo. A representação gráfica de um fluxo de caixa pode ser ilustrada a seguir.



Percebe-se que no fluxo de caixa os valores de entrada ou saída de caixa estão em períodos diferente. Assim, é necessário recorrer as relações de equivalência para obter valores do fluxo de caixa que se equivalem no tempo.

VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO – JUROS SIMPLES

Na capitalização por juros simples, o cálculo dos rendimentos se baseia na premissa de que apenas o Valor Presente (P), ou seja, o capital inicial, rende juros. Dessa forma, o Montante ou Valor Futuro (F) pode ser calculado a partir do Valor Presente (P), no regime de juros simples, por meio do cálculo a seguir.

$$F = P(1 + in)$$

Sendo que: i = taxa de desconto e n = número de períodos.

Para o cálculo de um Valor Presente (P) a partir de dado Valor Futuro (F), o princípio é o mesmo, em que o cálculo representado por:

$$P = \frac{F}{(1+in)}$$

Temos a seguir alguns exercícios comentados de problemas básicos envolvendo o regime de capitalização por juros simples.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (BR DISTRIBUIDORA – TÉCNICO DE SUPRIMENTO E LOGÍSTICA JUNIOR – CESGRANRIO – 2013) Um título no valor de R$ 2.000,00 foi pago com atraso de dez dias. Se são cobrados juros simples de 12% ao mês, o montante pago, em reais, é:

a) 2.080
b) 2.120
c) 2.240
d) 2.400
e) 2.510

Resposta: Letra A. Visto que o montante é o sinônimo de Valor Futuro (*F*), o problema é solucionado utilizando a fórmula de cálculo de *F*, no regime de juros simples. Veja a apresentação do cálculo.

$$F = P(1+in)$$

No enunciado é possível extrair as seguintes informações: P = 2.000; i = 0,12 ao mês; n = $\frac{1}{3}$ mês (10 dias correspondem a um terço de um mês). Dessa forma, temos que:

$$F = 2.000\left(1+0,12\times\frac{1}{3}\right)$$

F = 2.080

2. (CETRO – ANALISTA ADMINISTRATIVO – ÁREA 2 – ANVISA – 2013) Um empresário do ramo petrolífero aplicou seus recursos financeiros e obteve rendimentos de R$3.500,00 de juros simples à taxa mensal de 1,2%, num período de 75 dias. Assinale a alternativa que apresenta o capital aplicado pelo empresário.

a) R$ 116.666,67
b) R$ 11.166,67
c) R$ 3.888,89
d) R$ 9.722,22
e) R$ 29.166,67

Resposta: Letra A. A resolução deste problema é feita utilizando-se a fórmula de cálculo do Valor Presente (P), no regime de juros simples. Veja a representação do cálculo a seguir.

$$P = \frac{F}{(1+in)}$$

A partir do enunciado temos as seguintes informações: F = P + 3.500 (valor presente + juros); i = 0,012 ao mês; n = 2,5 meses (75 dias correspondem a 2 meses e meio). Assim, calculamos:

$$P = \frac{P+3.500}{(1+0,012\times 2,5)}$$

$$1,03P = P + 3.500$$

$$0,03P = 3.500$$

P = R$ 116.666,67

VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO – JUROS COMPOSTOS

Na capitalização por juros compostos, os juros do período anterior são incorporados ao Valor Presente (*P*) na data zero, e, portanto, também rendem juros no período seguinte. Dessa forma, no regime de juros compostos, o cálculo do Montante ou Valor Futuro (F) em determinado período (n) com uma taxa de desconto (i) pode ser feito assim:

$$F = P(1+i)^n$$

A seguir temos um exemplo de cálculo do Valor Futuro a partir de dado Valor Presente:

$$P = \frac{F}{(1+in)}$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (CELESC – ADMINISTRADOR – FEPESPE – 2018) Considere que você aplicou R$ 3.000,00 em uma aplicação bancária por um período de 2 meses, com uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Ao final desse período você terá um valor acumulado de:

a) R$ 3.300,00
b) R$ 3.307,50
c) R$ 3.325,00
d) R$ 3.375,00
e) R$ 3.450,00

Resposta: Letra B. Para resolver, basta aplicar a fórmula que representa a relação de equivalência entre Valor Presente e Valor Futuro.

$$F = P(1+i)^n$$

Sendo:
P = 3.000;
i = 0,05 e n = 2

Assim, temos:
F = 3.000 · $(1,05)^2$
F = R$ 3.307,50

Para encontrar um Valor Presente (P) a partir de um dado Valor Futuro (F), o princípio é o mesmo, a partir da seguinte expressão:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

No exercício a seguir tem-se a resolução de um problema em que se deve calcular o Valor Presente (P) utilizando-se o Valor Futuro (F) no regime de juros compostos. Antes de olhar a resolução, tente resolver a questão.

2. (SETRABES – CONTADOR – UERR – 2018) Calcule o valor presente de uma operação no regime de capitalização composta rendeu um montante igual a R$9.500,00 após 6 meses. Sabendo que a taxa da operação foi igual a 3% ao mês. Assinale a alternativa correta.

a) R$ 7.946,10
b) R$ 9.215,00
c) R$ 7.790,00
d) R$ 7.956,10
e) R$ 11.314,65

Resposta: Letra D. Para solucionar, aplica-se a fórmula $P = \frac{F}{(1+i)^n}$. Neste caso, sabemos do enunciado que:

F = 9.500
i = 0,03
n = 6

Assim:

$$P = \frac{9.500}{(1,03)^6}$$

P = R$ 7.956,10

DESCONTOS

Os descontos são representados pela diferença entre Valor Futuro e Valor Presente. O Valor Futuro (F) também é caracterizado como Valor Nominal em problemas envolvendo descontos; o Valor Presente (P), também é comumente chamado de Valor Atual. Portanto, os descontos podem ser descritos assim:

D = F - P

1. Desconto Comercial Simples

Desconto Comercial Simples é caracterizado pela liquidação do pagamento de um compromisso com um respectivo Valor Futuro (**F**) em **n** períodos antes do vencimento. Para o seu cálculo, utiliza-se o cálculo a seguir. Sendo **i** a taxa de desconto.

$$D = Fin$$

A seguir apresentamos a resolução de um exercício envolvendo o desconto comercial simples.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (PREFEITURA DE TERESINA-PI – TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR – ADMINISTRADOR – ARSETE – FCC — 2016) Se um título de valor nominal igual a R$ 22.500,00 for descontado em um banco 3 meses antes de seu vencimento, então apresentará um valor de desconto igual a R$ 1.350,00. Considerando que as operações neste banco sejam somente do desconto comercial simples e com a mesma taxa de desconto, obtém-se que se este mesmo título for descontado 4 meses antes de seu vencimento o seu valor atual será, em reais:

a) 22.050,00
b) 20.500,00
c) 21.150,00
d) 21.600,00
e) 20.700,00

Resposta: Letra E. Inicialmente, é necessário encontrar a taxa de desconto (**i**) do título. O enunciado fornece as seguintes informações: F = 22.500; n = 3 meses; D = 1.350.

Dessa forma, temos:

$$1.350 = 22.500 \times i \times 3$$

i = 0,02 (2% ao mês)

Com a taxa de desconto obtida, é possível calcular o Valor Presente (**P**) caso o título seja descontado com 4 meses de antecedência. Veja a resolução a seguir.

$$D = Fin$$

$$D = 22.500 \times 0,02 \times 4$$

D = 1.800
Visto que o desconto (D) equivale a D = F – P, podemos obter o Valor Presente (P), assim:
P = F – D
P = 22.500 – 1.800
P = 20.700

2. Desconto Comercial Composto

Refere-se a um desconto no regime de capitalização de juros compostos por meio do Valor Futuro (**F**) ou Valor Nominal aplicado a partir de determinada taxa de desconto (**i**). A fórmula de cálculo do desconto comercial composto se dá por:

$$D = F[1-(1-i)^n]$$

A seguir a resolução de uma questão de problema sobre o desconto comercial composto:

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (INSTITUTO – UFGD – ANALISTA ADMINISTRATIVO – ECONOMIA – AOCP – 2014) Assinale a alternativa que apresenta o valor atual de um título de R$40.000,00 descontado um ano antes do vencimento à taxa de desconto bancário composto de 8% ao semestre, capitalizável semestralmente.

a) R$ 33.800,00
b) R$ 34.600,00
c) R$ 32.850,00
d) R$ 31.700,00
e) R$ 33.856,00

Resposta: Letra E. Inicialmente, calcula-se o desconto bancário (comercial) composto do título, utilizando a fórmula a seguir.

$$D = F[1-(1-i)^n]$$

São dados: F = 40.000; i = 0,08 ao semestre, n = 2 (1 ano equivale a 2 semestres). Assim:

$$D = 40.000[1-(1-0,08)^2]$$

D = 6.144
Para o cálculo do Valor Atual, ou Valor Presente (P), basta fazer a seguinte subtração:
P = *F* – *D*
P = 40.000 – 6.144
P = R$ 33.856,00

3. Desconto Racional Simples

Ao contrário dos descontos comerciais, os descontos racionais são iguais aos juros. Os juros foram calculados partindo-se de uma taxa de juros que incide sobre o Valor Presente **(P**) em **n** períodos antes do vencimento. No caso do desconto racional simples, o cálculo pode ser representado por:

$$D = Pin$$

A seguir tem-se a resolução de um problema com base no Desconto Racional Simples.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (SEFAZ-RS – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO – CESPE – 2018) Um título cujo valor nominal era de R$ 18.200,00 com vencimento para daqui a 6 meses, foi pago na data de hoje à taxa de desconto racional simples de 5% ao mês. Nesse caso, o título foi pago pelo valor de
a) R$ 14.000,00
b) R$ 12.740,00
c) R$ 17.333,33
d) R$ 17.290,00
e) R$ 15.470,00

Resposta: Letra A. Sabendo que D = F – P, podemos reescrever a fórmula de desconto racional simples da seguinte forma:

$$F - P = Pin$$

Do enunciado, temos as informações: F = 18.200; i = 0,05 ao mês; n = 6 meses.
Assim, reescrevemos:

$$18.200 - P = P \times 0,05 \times 6$$

P = R$ 14.000,00

4. Desconto Racional Composto

Desconto Racional Composto é calculado sobre o Valor Presente (**P**) ou Valor Atual, aplicado a juros compostos, sendo representado pela fórmula a seguir.

$$D = P[(1+i)^n - 1]$$

A seguir uma questão que apresenta um problema envolvendo o desconto racional composto.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (COPS-UEL – AGENTE UNIVERSITÁRIO – ADMINISTRADOR – UEL – 2015) O setor de compras de uma universidade possui um orçamento de material de consumo no valor de R$ 2.850,00 para pagamento em 90 dias. Considerando que, para o pagamento à vista, há um desconto composto de 1,5% ao mês, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, esse valor.
a) R$ 2.721,75
b) R$ 2.273,50
c) R$ 2.724,25
d) R$ 2.725,50
e) R$ 2.726,75

Resposta: Letra D. Para resolver o problema, aplicamos a fórmula de Desconto Racional Composto. Do enunciado, seguem as informações: i = 0,015 ao mês; n = 3 meses (90 dias equivale a 3 meses); F = 2.850 (esse é o Valor Nominal ou Valor Futuro a ser pago daqui a 90 dias).
Sabendo que D = F- P, representa-se a resolução da seguinte forma:

$$F - P = P[(1+i)^n - 1]$$

$$2.850 - P = P[(1+0,015)^3 - 1]$$

2.850 = 1,045 P
P = R$ 2725,50

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: ANÁLISE COMBINATÓRIA; NOÇÕES DE PROBABILIDADE; PROBABILIDADE CONDICIONAL; NOÇÕES DE ESTATÍSTICA; POPULAÇÃO E AMOSTRA; ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DE TABELAS E GRÁFICOS; REGRESSÃO, TENDÊNCIAS, EXTRAPOLAÇÕES E INTERPOLAÇÕES; TABELAS DE DISTRIBUIÇÃO EMPÍRICA DE VARIÁVEIS E HISTOGRAMAS; ESTATÍSTICA DESCRITIVA (MÉDIA, MEDIANA, VARIÂNCIA, DESVIO PADRÃO, PERCENTIS, QUARTIS, OUTLIERS, COVARIÂNCIA)

CONTAGEM E ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Princípio fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem permite quantificar situações ou casos de uma determinada situação ou evento. Em outras palavras, é uma maneira sistemática de “contar” a quantidade de “coisas”.

A base deste princípio se dá pela separação de casos e quantificação dos mesmos. Após isso, uma multiplicação de todos estes números é feita para achar a quantidade total de possibilidades. O exemplo a seguir irá ilustrar isso.

Exemplo: João foi almoçar em um restaurante no centro da cidade, ao chegar no local, percebeu que oferecem 3 tipos de saladas, 2 tipos de carne, 6 bebidas diferentes e 5 sobremesas diferentes. De quantas maneiras distintas ele pode fazer um pedido, pegando apenas 1 tipo de cada alimento?

Resolução: O princípio da contagem depende fortemente de uma organização do problema. A sugestão é sempre organizar cada caso em traços e preenchendo a quantidade de possibilidades. Como temos 4 casos distintos (salada, carne, bebida e sobremesa), iremos fazer 4 traços:

______	______	______	______
Salada	**Carne**	**Bebida**	**Sobremesa**

Agora, preencheremos a quantidade de possibilidades de cada caso:

3	2	6	5
Salada	Carne	Bebida	Sobremesa

Finalmente, multiplicamos os números:

$$\underset{\text{Salada}}{3} \times \underset{\text{Carne}}{2} \times \underset{\text{Bebida}}{6} \times \underset{\text{Sobremesa}}{5} = 180$$

Assim, João tem 180 possibilidades diferentes de se montar um prato.

2.Fatorial

Antes de definirmos casos particulares de contagem, iremos definir uma operação matemática que será utilizada nas próximas seções, o fatorial. Define-se o sinal de fatorial pelo ponto de exclamação, ou seja " ! ". Assim, quando encontrarmos 2! Significa que estaremos calculando o "fatorial de 2" ou "2 fatorial". A definição de fatorial está apresentada a seguir:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ou seja, o fatorial de um número é caracterizado pelo produto deste número e seus antecessores, até se chegar no número 1. Vejam os exemplos abaixo:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Assim, basta ir multiplicando os números até se chegar ao número 1. Observe que os fatoriais aumentam muito rápido, veja quanto é 10!:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Já estamos na casa dos milhões! Para não trabalharmos com valores tão altos, as operações com fatoriais são normalmente feitas por último, procurando fazer o maior número de simplificações possíveis. Observe este exemplo:

Calcule $\frac{10!}{7!}$

Resolução: Ao invés de calcular os valores de 7! e 10! separadamente e depois fazer a divisão, o que levaria muito tempo, nós simplificamos os fatoriais primeiro. Pela definição de fatorial, temos o seguinte:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observe que o denominador pode ser inteiramente cancelado, pois 10! Possui todos os termos de 7!. Essa é uma particularidade interessante e facilitará demais a simplificação. Se cancelarmos, restará apenas um produto de 3 termos:

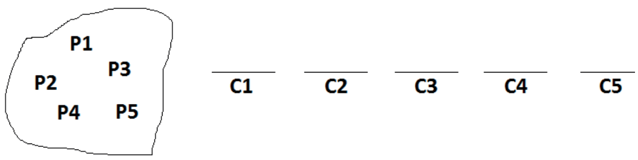
$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Essa operação é muito mais fácil que calcular os fatoriais desde o começo!

Agora que sabemos o que é fatorial e como simplificá-lo, podemos passar para os casos particulares de contagem: Permutações, Combinações e Arranjos.

3. Permutações

As permutações são definidas como situações onde o número de elementos é igual ao número de posições que podemos colocá-los. Considere o exemplo onde temos 5 pessoas e 5 cadeiras alinhadas. Queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos posicionar essas pessoas. Esquematizando o problema, chamando de P as pessoas e C as cadeiras:



Em problemas onde o número de elementos é igual ao número de posições, teremos uma permutação. A fórmula da permutação, considerando que não há repetição de elementos é a seguinte:

$$P_n = n!$$

Ou seja, para permutar 5 elementos em 5 posições, basta eu calcular o fatorial de 5:

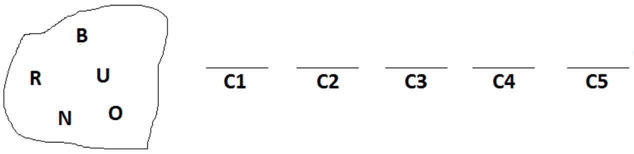
$$P_5 = 5! = 120$$

Logo, eu posso posicionar as pessoas de 120 maneiras diferentes na fileira de cadeiras.

Observe que a fórmula da permutação é utilizada como não há repetição de elementos, mas e quando ocorre repetição? Neste caso, a fórmula da permutação terá uma complementação, para desconsiderar casos repetidos que serão contados 2 ou mais vezes se utilizarmos a fórmula diretamente.

O exemplo mais comum destes casos é o que chamamos de Anagrama. Os anagramas são permutações das letras de uma palavra, formando novas palavras, sem a necessidade de terem sentido ou não. Usando primeiramente um exemplo sem repetição, conte quantos anagramas podemos formar com o nome BRUNO.

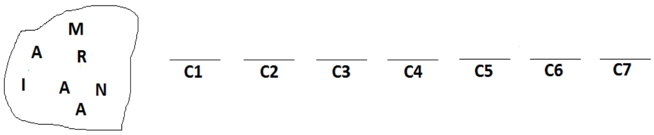
Montando a esquematização:



Ou seja, temos que posicionar as letras nas 5 casas correspondentes e neste caso, é um problema de permutação sem repetição:

$$P_5 = 5! = 120$$

Logo, podemos formar 120 anagramas com a palavra BRUNO. Agora, vamos olhar a palavra MARIANA. Ela possui 7 letras, logo teremos 7 posições:



Entretanto, temos a repetição da letra A. Veja o que acontece quando montarmos um anagrama qualquer da palavra:

A	M	A	N	A	R	I
C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**

Não conseguimos saber qual letra "A" foi utilizada nas posições C1,C3 e C5. Se trocarmos as mesmas de posição entre si, ficaremos com os mesmos anagramas, caracterizando uma repetição. Assim, para saber a quantidade de anagramas com repetição, corrigiremos a fórmula da permutação da seguinte forma:

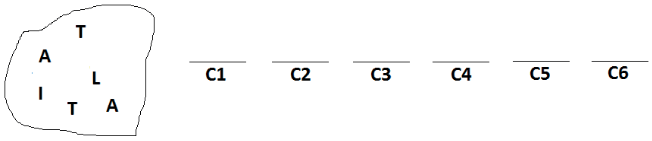
$$P_n^a = \frac{n!}{a!}$$

Ou seja, calcula-se a permutação de "n" elementos com "a" repetições. Considerando que MARIANA tem 7 letras (n=7) e a letra "A" se repete 3 vezes, temos que:

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Assim, a palavra MARIANA tem 840 anagramas possíveis.

Outro exemplo para deixar este conceito bem claro, é quando temos dois elementos se repetindo. Por exemplo, calcule os anagramas da palavra TALITA:



Observe que a letra “T” repete 2 vezes e a letra “A” também repete duas vezes. Na fórmula da permutação com repetição, faremos duas divisões:

$$P_n^{a,b} = \frac{n!}{a!\,b!}$$

Ou seja, se houver 2 ou mais elementos se repetindo, a correção é feita, dividindo pelas repetições de cada um. Como ambos repetem duas vezes:

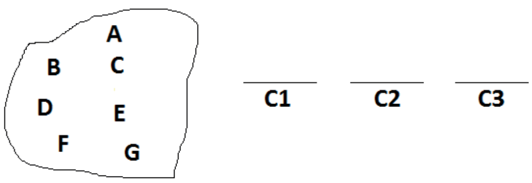
$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \ \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{360}{2} = 180$$

Assim, a palavra TALITA tem 180 anagramas.

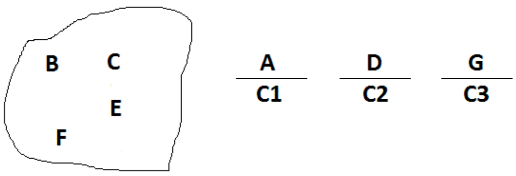
4. Combinações

As combinações e os arranjos, que serão apresentados a seguir, possuem uma característica diferente da permutação. A diferença está no fato do número de posições ser MENOR que o número de elementos, ou seja, quando os elementos forem agrupados, sobrarão alguns. Veja este exemplo: De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 membros, dentro os 7 funcionários de uma empresa?

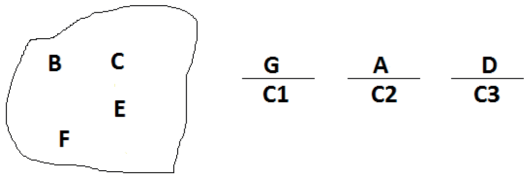
Resolução: Este exemplo mostrará também como diferenciar combinação de arranjo. Logo de início, podemos ver que não se trata de um problema de permutação, pois temos 3 posições para 7 elementos. Para diferenciar combinação e arranjo, temos que verificar se a ordem de escolha dos elementos importa ou não. Neste caso, a ordem não importa, pois estamos escolhendo 3 pessoas e não importa a ordem que escolhemos elas pois a comissão será a mesma. Observe a esquematização:



As pessoas foram chamadas pelas letras de A até G. Vamos supor que escolheremos as pessoas A,D e G mas em ordens diferentes:



MATEMÁTICA FINANCEIRA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE



É importante notar que as comissões ADG e GAD não possuem diferenças, já que as casas C1,C2 e C3 não possuem nenhuma particularidade descrita no enunciado. Assim, trata-se de um problema de combinação. A fórmula da combinação depende do número de elementos “n” e o número de posições “p”:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

No exemplo, temos 7 elementos e 3 posições, assim:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,.3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\ \cdot\ 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$$

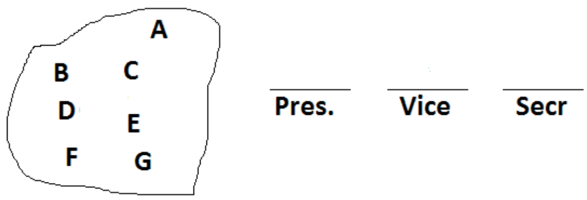
Ou seja, podemos formar 35 comissões distintas.

5. Arranjos

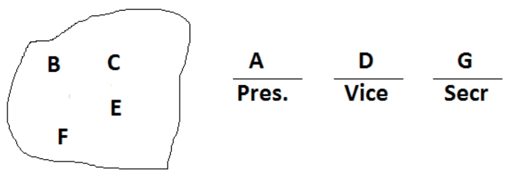
Os arranjos seguem a mesma linha da combinação, onde o número de elementos deve ser maior que o número de posições possíveis, mas com a diferença que a ordem de escolha dos elementos deve ser considerada. Vamos utilizar o mesmo exemplo descrito na combinação, mas com algumas diferenças:

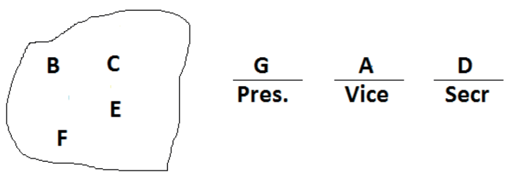
De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 membros, composta por um presidente, um vice-presidente e um secretário, dentro os 7 funcionários de uma empresa?

Observe que agora o enunciado classifica explicitamente as posições, e podemos montar o esquema da seguinte forma:



As posições agora foram classificadas de acordo com a posição que foi pedida no enunciado. Vamos observar agora o que acontece quando selecionando novamente as pessoas A,D e G:





Neste caso, as duas comissões são diferentes, pois em uma a pessoa A é presidente e na outra ela é vice-presidente. Como a ordem importa, temos um problema de arranjo. A fórmula de arranjo é mais simples que a fórmula de combinação:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Tomando n=7 e p = 3 novamente:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Ou seja, é possível formar 210 comissões neste caso. Veja que o número é maior que o número da combinação. A razão é que comissões que antes eram repetidas na combinação, deixaram de ser no arranjo.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (IF-BA – Professor – AOCP/2016) Na sequência crescente de todos os números obtidos, permutando-se os algarismos 1, 2, 3, 7, 8, a posição do número 78.312 é a :

a) 94ª
b) 95ª
c) 96ª
d) 97ª
e) 98ª

Resposta: Letra B. Deve-se contar todos os números anteriores a ele. Iniciando com 1_ _ _ _, temos 4! = 24 números; iniciando com 2 _ _ _ _ temos outros 24 números, assim como iniciando com 3_ _ _ _. Depois temos os números iniciados com "71_ _ _" que são 6 (3!), assim como os iniciados em "72_ _ _" e "73_ _ _". Depois aparece o iniciado com "781_ _" que são 2 números, assim como o "782 _ _". O próximo já será o 78312. Somando: 24+24+24+6+6+6+2+2=94. Logo, ele será o 95ª número.

2. Quantas senhas com 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,e 9?

Resposta: Esse exercício pode ser feito tanto com a fórmula, quanto usando a princípio fundamental da contagem.
1ª maneira: usando o princípio fundamental da contagem.
Como o exercício indica que não ocorrerá repetição nos algarismos que irão compor a senha, então teremos a seguinte situação:
• 9 opções para o algarismo das unidades;
• 8 opções para o algarismo das dezenas, visto que já utilizamos 1 algarismo na unidade e não pode repetir;
• 7 opções para o algarismo das centenas, pois já utilizamos 1 algarismo na unidade e outro na dezena;
• 6 opções para o algarismo do milhar, pois temos que tirar os que já usamos anteriormente.
Assim, o número de senhas será dado por:

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024$ senhas

2ª maneira: usando a fórmula
Para identificar qual fórmula usar, devemos perceber que a ordem dos algarismos é importante. Por exemplo 1234 é diferente de 4321, assim iremos usar a fórmula de arranjo.
Então, temos 9 elementos para serem agrupados de 4 a 4. Desta maneira, o cálculo será:

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 3024 \text{ senhas}$$

BINÔMIO DE NEWTON

1.Definição

Denomina-se Binômio de Newton, a todo binômio da forma , sendo n um número natural.

Ex: $(3x - 2y)^4$, onde $a = 3x, b = -2y$ e $n = 4$

Primeiramente, vamos desenvolver alguns binômios, variando o seu grau (exponente):

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Observe que, conforme o grau do binômio é aumentado, a quantidade de termos aumenta, mas que certo padrão é seguido. Observando os coeficientes dos termos desenvolvidos, temos o seguinte padrão:

$(a+b)^0$	1					
$(a+b)^1$	1	1				
$(a+b)^2$	1	2	1			
$(a+b)^3$	1	3	3	1		
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1

Esse padrão é conhecido como Triângulo de Pascal e pode ser expandido da seguinte forma: Os termos das pontas (primeiro e último) serão sempre iguais a 1 e os termos interiores serão sempre a soma dos dois termos correspondentes da linha anterior. Vamos desenvolver os coeficientes dos termos para , lembrando que ele terá 1 termo a mais:

$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	

$(a+b)^6$	**1**						**1**

Com o primeiro e último termos iguais a 1, vamos agora efetuar as somas para encontrar os termos seguintes:

$(a+b)^5$	**1**	**5**	10	10	5	1	
$(a+b)^6$	1	1+5=6					1

Analogamente:
Terceiro termo:

$(a+b)^5$	1	**5**	**10**	10	5	1	
$(a+b)^6$	1	6	5+10=15				1

Quarto termo:

$(a+b)^5$	1	5	**10**	**10**	5	1	
$(a+b)^6$	1	6	15	5+10=15			1

Quinto termo:

$(a+b)^5$	1	5	10	**10**	**5**	1	
$(a+b)^6$	1	6	15	20	5+10=15		1

Sexto termo:

$(a+b)^5$	1	5	10	10	**5**	**1**	
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	5+1=6	1

Assim, seguindo o padrão de soma, consegue-se construir qualquer linha do triângulo. Expandindo até o expoente 10, temos que:

$(a+b)^0$	1										
$(a+b)^1$	1	1									
$(a+b)^2$	1	2	1								
$(a+b)^3$	1	3	3	1							
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1						
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1					
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1				
$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1			
$(a+b)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$(a+b)^9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$(a+b)^{10}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Obviamente, se tivermos um expoente alto, gastaríamos muito tempo para montar todo o triângulo. Para resolver este problema, os conceitos de fatorial são bem úteis. Relembrando a fórmula da combinação:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Temos que o triângulo de Pascal pode ser reescrito da seguinte forma:

$(a+b)^0$	$\binom{0}{0}$										
$(a+b)^1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$									
$(a+b)^2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$								
$(a+b)^3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$							
$(a+b)^4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$						
$(a+b)^5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$					
$(a+b)^6$	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$				
$(a+b)^7$	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$			
$(a+b)^8$	$\binom{8}{0}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{8}{8}$		
$(a+b)^9$	$\binom{9}{0}$	$\binom{9}{1}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{9}{8}$	$\binom{9}{9}$	
$(a+b)^{10}$	$\binom{10}{0}$	$\binom{10}{1}$	$\binom{10}{2}$	$\binom{10}{3}$	$\binom{10}{4}$	$\binom{10}{5}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{9}$	$\binom{10}{10}$

Ou seja, dado o expoente, você tem o valor de "n". O valor de "p" será em função de qual termo você deseja obter o coeficiente.

Observe que se desejar o 5° termo de um binômio desenvolvido, você terá p = 4, ou seja, não possui a mesma correspondência direta que temos em cada linha com o valor de n.

2.Fórmula do termo geral de um Binômio de Newton

Agora que sabemos como obter cada coeficiente, falta responder se há algum padrão para os expoentes de "a" e "b" quando o binômio é desenvolvido.

Um termo genérico T_{p+1} do desenvolvimento de $(a+b)^n$, sendo um número natural, é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^{p}$$

Essa expressão pode obter qualquer termo de qualquer expoente de um determinado binômio. Basta aplicarmos adequadamente a fórmula, usando os valores de "n" e "p", além de identificarmos quem são os termos "a" e "b".

Ex: 4° termo de $(a+b)^5$

Aplicando a fórmula, temos então que $p + 1 = 4 \rightarrow p = 3$ e n=5:

$$T_4 = \binom{5}{3} \cdot a^{5-3} \cdot b^{3} = \left(\frac{5!}{3!\,(5-3)!}\right) a^2b^3 = 10a^2b^3$$

Se você observar os exemplos anteriores, verá que este é exatamente o valor do termo do desenvolvimento.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Determine o 7º termo do binômio $(2x + 1)^9$.

Resposta: $672x^3$. Desenvolvendo o termo geral para $a = 2x, b = 1, n = 9$ e $p + 1 = 7 \rightarrow p = 6$, chega-se ao resultado.

2.Qual o termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

Resposta: $90720x^4y^4$. Desenvolve-se o termo geral para $a = 2x, b = 3y, n = 8$. Além disso, para n=8, o binômio desenvolvido terá 9 termos, portanto o termo do meio será o quinto termo, logo e $p + 1 = 5 \rightarrow p = 4$.

3. Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtemos um polinômio de 16 termos. Qual o valor de n?

Resposta: 5 Se o binômio desenvolvido possui 16 termos, seu grau será um dígito anterior a esse número, ou seja 15. Assim, 3n=15.

4. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

Resposta: 20. Problema clássico de binômio de Newton, o termo independente será aquele onde os expoentes de e são iguais, pois neste caso o x se cancela, restando apenas números.
Para resolver, basta igualar os expoentes de "a" e "b" do termo geral: n-p=p→n=2p. . Resolvendo para a=x, $b = \frac{1}{x}$ e n=6, temos p=3→p+1=4, ou seja, o termo independente é o quarto termo do desenvolvimento.

PROBABILIDADE

1. Ponto Amostral, Espaço Amostral e Evento

Em uma tentativa com um número limitado de resultados, todos com chances iguais, devemos considerar três definições fundamentais:

Ponto Amostral: Corresponde a qualquer um dos resultados possíveis.

Espaço Amostral: Corresponde ao conjunto dos resultados possíveis; será representado por S e o número de elementos do espaço amostra por n(S).

Evento: Corresponde a qualquer subconjunto do espaço amostral; será representado por A e o número de elementos do evento por n(A).

Os conjuntos S e $\emptyset$ também são subconjuntos de S, portanto são eventos.

$\emptyset$ = evento impossível.
S = evento certo.

2. Conceito de Probabilidade

As probabilidades têm a função de mostrar a chance de ocorrência de um evento. A probabilidade de ocorrer um determinado evento A, que é simbolizada por P(A), de um espaço amostral S≠$\emptyset$, é dada pelo quociente entre o número de elementos A e o número de elemento S. Representando:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(S)}$$

Ex: Ao lançar um dado de seis lados, numerados de 1 a 6, e observar o lado virado para cima, temos:

a) um espaço amostral, que seria o conjunto S {1,2,3,4,5,6}..

b) um evento número par, que seria o conjunto A_1 = {2,4,6} C S.

c) o número de elementos do evento número par é $n(A_1) = 3$.

d) a probabilidade do evento número par é 1/2, pois

$$P(A) = \frac{n(A_1)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.Propriedades de um Espaço Amostral Finito e Não Vazio

a) Em um evento impossível a probabilidade é igual a zero. Em um evento certo S a probabilidade é igual a 1. Simbolicamente: P($\emptyset$) = 0 e P(S)= 1
b) Se A for um evento qualquer de S, neste caso: 0 ≤ P(A) ≤ 1.
c) Se A for o complemento de A em S, neste caso P(A) = 1 - P(A)

4. Demonstração das Propriedades

Considerando S como um espaço finito e não vazio, temos:

$$\begin{cases} n(\emptyset) = 0 \rightarrow P(\emptyset) = \dfrac{0}{n(S)} \rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} \rightarrow P(S) = 1 \end{cases}$$

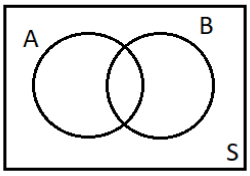
$$\begin{cases} \emptyset \subset A \subset A \leftrightarrow n(\emptyset) \le n(A) \le n(S) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \dfrac{n(\emptyset)}{n(S)} \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le \dfrac{n(S)}{n(S)} \leftrightarrow 0 \le P(A) \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = S \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \leftrightarrow n(A) + n(\overline{A}) = n(S) \leftrightarrow \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(\overline{A})}{n(S)} = \dfrac{n(S)}{n(S)} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$$

5.União de Eventos

Considere A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, temos:

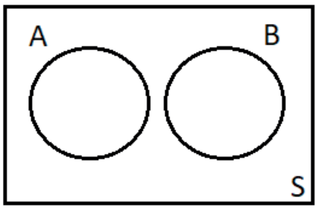


n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B)↔

$$\leftrightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

Logo: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6. Eventos Mutuamente Exclusivos



Considerando que $A \cap B$, nesse caso A e B serão denominados mutuamente exclusivos. Observe que $A \cap B = 0$, portanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Quando os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de S forem, de dois em dois, sempre mutuamente exclusivos, nesse caso temos, analogicamente:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

7. Eventos Exaustivos

Quando os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de S forem, de dois em dois, mutuamente exclusivos, estes serão denominados exaustivos se:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = S$$

ESTATÍSTICA

1.Definições Básicas

Estatística: ciência que tem como objetivo auxiliar na tomada de decisões por meio da obtenção, análise, organização e interpretação de dados.

População: conjunto de entidades (pessoas, objetos, cidades, países, classes de trabalhadores, etc.) que apresentem no mínimo uma característica em comum. Exemplos: pessoas de uma determinada cidade, preços de um produto, médicos de um hospital, estudantes que prestam determinado concurso, etc.

Amostra: É uma parte da população que será objeto do estudo. Como em muitos casos não é possível estudar a população inteira, estuda-se uma amostra de tamanho significativo (há métodos para determinar isso) que retrate o comportamento da população. Exemplo: pesquisa de intenção de votos de uma eleição. Algumas pessoas são entrevistadas e a pesquisa retrata a intenção de votos da população.

Variável: é o dado a ser analisado. Aqui, será chamado de e cada valor desse dado será chamado de . Essa variável pode ser quantitativa (assume valores) ou qualitativa (assume características ou propriedades).

2. Medidas de tendência central

São medidas que auxiliam na análise e interpretação de dados para a tomada de decisões. As três medidas de tendência central são:

<u>Média aritmética simples:</u> razão entre a soma de todos os valores de uma mostra e o número de elementos da amostra. Expressa por . Calculada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

<u>Média aritmética ponderada:</u> muito parecida com média aritmética simples, porém aqui cada variável tem um peso diferente que é levado em conta no cálculo da média.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

<u>Mediana:</u> valor que divide a amostra na metade. Em caso de número para de elementos, a mediana é a média entre os elementos intermediários

<u>Moda:</u> valor que aparece mais vezes dentro de uma amostra.

Ex: Dada a amostra {1,3,1,2,5,7,8,7,6,5,4,1,3,2} calcule a média, a mediana e a moda.

Solução
Média:

$$\bar{x} = \frac{1+3+1+2+5+7+8+7+6+5+4+1+3+2}{14} = \frac{55}{14} = 3{,}92$$

Mediana:
Inicialmente coloca-se os valores em ordem crescente:
{1,1,1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8}

Como a amostra tem 14 valores (número par), os elementos intermediários são os 7º e 8º elementos. Nesse exemplo, são os números 3 e 4. Portanto, a mediana é a média entre eles: $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Moda:
O número que aparece mais vezes é o número 1 e, portanto, é a moda da amostra nesse exemplo.

Ex: Dada a amostra {2,4,8,10,15,6,9,11,7,4,15,15,11,6,10} calcule a média, a mediana e a moda.
Solução:

Média:

$$\bar{x} = \frac{2+4+8+10+15+6+9+11+7+4+15+15+11+6+10}{15} = \frac{133}{14} = 8{,}867$$

Mediana:
Inicialmente coloca-se os valores em ordem crescente
{2,4,4,6,6,7,8,9,10,10,11,11,15,15,15}
Como a amostra tem 15 valores (número par), o elemento intermediário é o 8º elemento. Logo, a mediana é igual a 9.

Moda:
O número que aparece mais vezes é o número 15 e, portanto, é a moda da amostra nesse exemplo.

Ex: A média de uma disciplina é calculada por meio da média ponderada de três provas. A primeira tem peso 3, a segunda tem peso 4 e a terceira tem peso 5. Calcule a média de um aluno que obteve nota 8 na primeira prova, 5 na segunda e 6 na terceira.
Solução:
Trata-se de um caso de média aritmética ponderada.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{3+4+5} = \frac{74}{12} = 6{,}167$$

3. Tabelas e Gráficos

3.1.Tabelas

Tabelas podem ser utilizadas para expressar os mais diversos tipos de dados. O mais importante é saber interpretá-las e para isso é conveniente saber como uma tabela é estruturada. Toda tabela possui um título que indica sobre o que se trata a tabela. Toda tabela é dividida em linhas e colunas onde, no começo de uma linha ou de uma coluna, está indicado qual o tipo de dado que aquela linha/coluna exibe.

Ex:
Tabela 1 - Número de estudantes da Universidade ALFA divididos por curso

Curso	Número de Estudantes
Administração	2000
Arquitetura	1450
Direito	2500
Economia	1800
Enfermagem	800
Engenharia	3500
Letras	750
Medicina	1500
Psicologia	1000
TOTAL	15300

Nesse caso, as colunas são: curso e número de estudantes e cada linha corresponde a um dos cursos da Universidade com o respectivo número de alunos de cada curso.

Tabela 2 - Número de estudantes da Universidade ALFA divididos por curso e gênero

Curso	Gênero	Número de Estudantes
Administração	Homem	1200
	Mulher	800
Arquitetura	Homem	850
	Mulher	600
Direito	Homem	1600
	Mulher	900
Economia	Homem	800
	Mulher	1000
Enfermagem	Homem	350
	Mulher	450
Engenharia	Homem	2500
	Mulher	1000
Letras	Homem	200
	Mulher	550
Medicina	Homem	700
	Mulher	800
Psicologia	Homem	400
	Mulher	600
	TOTAL	15300

Nesse caso, as colunas são: curso, gênero e número de estudantes e cada linha corresponde a um dos cursos da Universidade com o respectivo número de alunos de cada curso separados por gênero.

#FicaDica

Acima foram exibidas duas tabelas como exemplos. Há uma infinidade de tabelas cada uma com sua particularidade o que torna impossível exibir todos os tipos de tabelas aqui. Porém em todas será necessário identificar linhas, colunas e o que cada valor exibido representa.

3.2. Gráficos

Para falar de gráficos em estatística é importante apresentar o conceito de frequência.

Frequência: Quantifica a repetição de valores de uma variável estatística.

Tipos de frequência
Absoluta: mede a quantidade de repetições.
Ex. Dos 30 alunos, seis tiraram nota 6,0. Essa nota possui freqüência absoluta:

$$f_i = 4$$

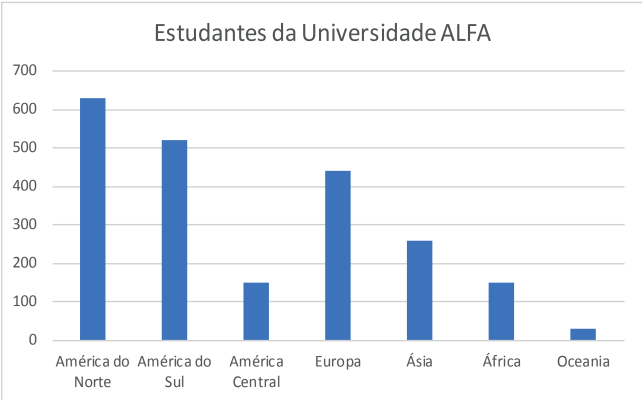
Relativa: Relaciona a quantidade de repetições com o total (expresso em porcentagem)
Ex. Dos 30 alunos, seis tiraram nota 6,0. Essa nota possui freqüência relativa:

$$f_r = \left(\frac{6}{30}\right) \cdot 100 = 20\%$$

4. Tipos de Gráficos

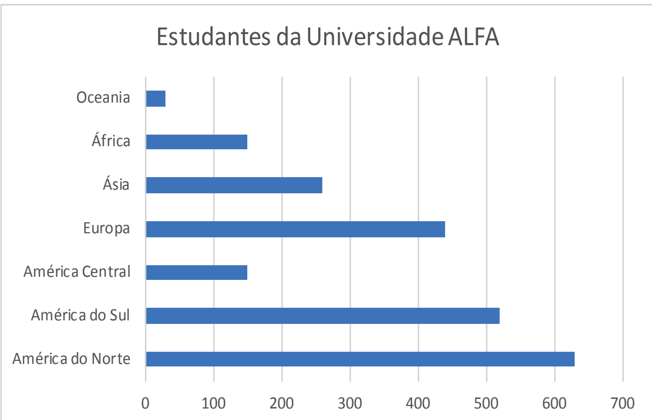
Gráficos de coluna: gráficos que têm como objetivo atribuir quantidades a certos tipos de grupos. Na horizontal são apresentados os grupos (dados qualitativos) dos quais deseja-se apresentar dados enquanto na vertical são apresentados os valores referentes a cada grupo (dados quantitativos ou frequências absolutas)

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a quantidade de estudantes separados pelos seus continentes de origem:



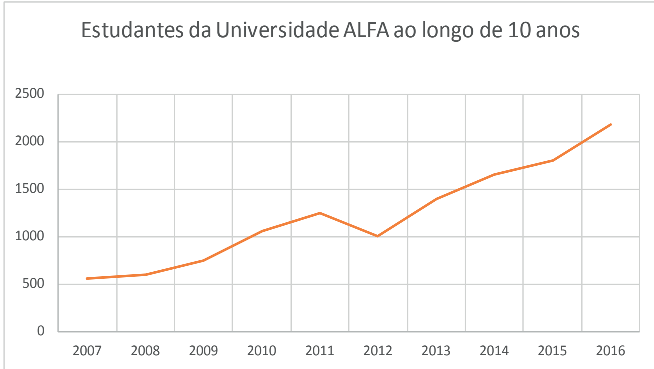
Gráficos de barras: gráficos bastante similares aos de colunas, porém, nesse tipo de gráfico, na horizontal são apresentados os valores referentes a cada grupo (dados quantitativos) enquanto na vertical são apresentados os grupos (dados qualitativos)

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a quantidade de estudantes separados pelos seus continentes de origem:



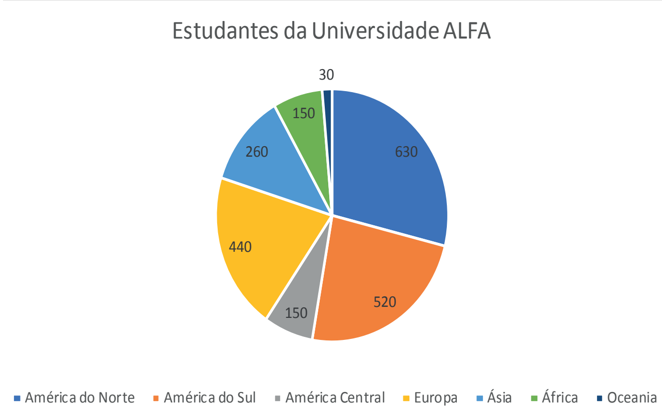
Gráficos de linhas: gráficos nos quais são exibidas séries históricas de dados e mostram a evolução dessas séries ao longo do tempo.

Ex: A Universidade ALFA tem 10 anos de existências e seu reitor apresentou um gráfico mostrando o número de alunos da Universidade ao longo desses 10 anos.



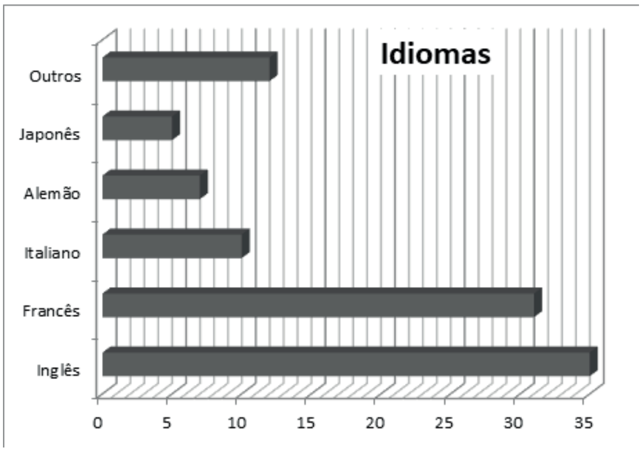
Gráficos em pizzas: gráficos nos quais são expressas relações entre grandezas em relação a um todo. Nesse gráfico é possível visualizar a relação de proporcionalidade entre as grandezas. Recebe esse nome pois lembram uma pizza pelo formato redondo com seus pedaços (frequências relativas).

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a distribuição de estudantes de acordo com seus continentes de origem

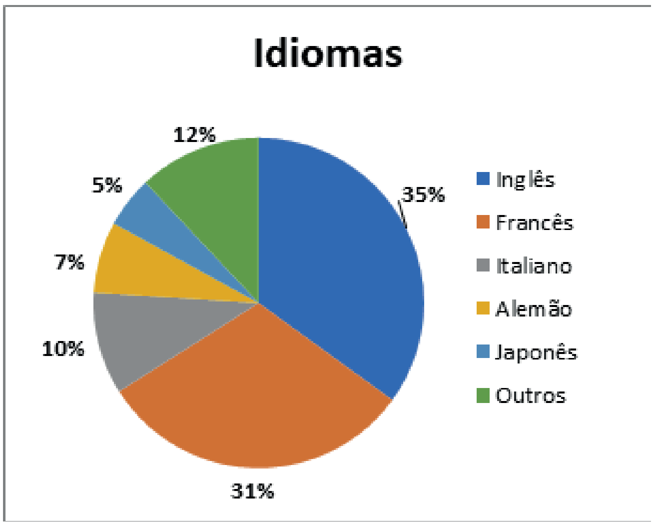


Ex: Foi feito um levantamento do idioma falado pelos alunos de um curso da Universidade ALFA.

Frequências absolutas:



Frequências relativas:



EXERCÍCIO COMENTADO

1. (SEGEP-MA - Técnico da Receita Estadual – FCC/2016) Três funcionários do Serviço de Atendimento ao Cliente de uma loja foram avaliados pelos clientes que atribuíram uma nota (1; 2; 3; 4; 5) para o atendimento recebido. A tabela mostra as notas recebidas por esses funcionários em um determinado dia.

Funcionário	Número de Cada Nota Recebida pelos Funcionários					Total de Atendimentos no Dia
	1	2	3	4	5	
A	2	7	2	9	10	30
B	6	6	9	14	5	40
C	0	5	10	6	4	25

Considerando a totalidade das 95 avaliações desse dia, é correto afirmar que a média das notas dista da moda dessas mesmas notas um valor absoluto, aproximadamente, igual a:

a) 0,33
b) 0,83
c) 0,65
d) 0,16
e) 0,21

Resposta: Letra c. Trata-se de um caso de média aritmética ponderada. Considerando as 95 avaliações, o peso de cada uma das notas é igual ao total de pessoas que atribuiu a nota. Analisando a tabela
8 pessoas atribuíram nota 1
18 pessoas atribuíram nota 2
21 pessoas atribuíram nota 3
29 pessoas atribuíram nota 4
19 pessoas atribuíram nota 5
Assim, a média das 95 avaliações é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 29 \cdot 4 + 19 \cdot 5}{8 + 18 + 21 + 29 + 19} = \frac{318}{95} = 3{,}34$$

2. (UFC - 2016) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 6,5
b) 7,2
c) 7,4
d) 7,8
e) 8,0

Resposta: Letra B. Primeiramente, será identificada a soma das notas dos meninos por x e a da nota das meninas por y. Se a turma tem 5 meninos e a média aritmética de suas notas é igual a 6, então a soma das notas dos meninos (x) dividida pela quantidade de meninos (5) deve ser igual a 6, isto é:

$$\frac{x}{5} = 6$$

$$x = 6 \cdot 5$$

$$x = 30$$

Do mesmo modo, se a turma tem 25 meninas (Me é a média aritmética de suas notas), o quociente da soma das notas das meninas (y) e a quantidade de meninas (25) deve ser igual a Me, isto é:
(x + y)/(25+5) = 7
y = 25·Me
Para calcular a média da turma, devemos somar as notas dos meninos (30) às notas das meninas (y) e dividir pela quantidade de alunos (25 + 5 = 30). O resultado deverá ser 7. Sendo assim, temos:

$$\frac{x + y}{25 + 5} = 7$$

$$\frac{30 + 25 \cdot Me}{30} = 7$$

$$30 + 25 \cdot Me = 7 \bullet 30$$

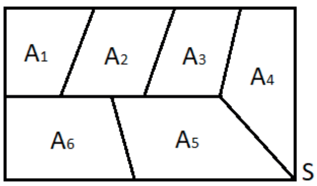
$$30 + 25 \cdot Me = 210$$

$$25 \cdot Me = 210 - 30$$

$$25 \cdot Me = 180$$

$$Me = 7{,}2$$

Portanto, a média aritmética das notas das meninas é 7,2. A alternativa correta é a letra b.



Então, logo:

$$\begin{cases} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = P(S) = 1 \end{cases}$$

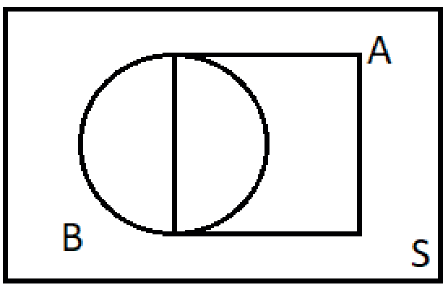
Portanto:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$$

8. Probabilidade Condicionada

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. A probabilidade de B condicionada a A é dada pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que já ocorreu A. É representada por P(B/A).

Veja: $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$



9. Eventos Independentes

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. Estes serão independentes somente quando:

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$

10. Intersecção de Eventos

Considerando A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, logo:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(A) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(B) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Assim sendo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Considerando A e B como eventos independentes, logo P(B/A) = P(B), P(A/B) = P(A), sendo assim: P(A ∩ B) = P(A)· P(B). Para saber se os eventos A e B são independentes, podemos utilizar a definição ou calcular a probabilidade de A ∩ B. Veja a representação:

A e B independentes ↔ P(A/B) = P(A) ou
A e B independentes ↔ P(A ∩ B) = P(A) · P(B)

FIQUE ATENTO!
Um exercício de probabilidade pode envolver aspectos relativos à análise combinatória. É importante ter em mente a diferença conceitual que existe entre ambos.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

Resposta: 5/12. Neste exercício o espaço amostral possui 12 elementos, que é o número total de bolas, portanto a probabilidade de ser retirada uma bola verde está na razão de 5 para 12.
Sendo S o espaço amostral e E o evento da retirada de uma bola verde, matematicamente podemos representar a resolução assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$P(E) = \frac{5}{12}$$

Logo, a probabilidade desta bola ser verde é 5/12.

2. (IBGE – Analista Censitário – FGV/2017) Entre os cinco números 2, 3, 4, 5 e 6, dois deles são escolhidos ao acaso e o produto deles dois é calculado. A probabilidade desse produto ser um número par é:

a) 60%
b) 75%
c) 80%
d) 85%
e) 90%

Resposta: Letra E. Para sabermos o tamanho do espaço amostral, basta calcularmos a combinação dos 5 elementos tomados 2 a 2 (a ordem não importa, pois a ordem dos fatores não altera o produto):

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Para o produto ser par, os dois números escolhidos deverão ser par ou um deles é par. O único caso onde o produto não dá par é quando os dois números são ímpares. Assim, apenas o produto 3 5 não pode ser escolhido. Logo, se 1/10 = 10% não terá produto par, os outros 90% terão.

GRÁFICOS E TABELAS

Os gráficos e tabelas apresentam o cruzamento entre dois dados relacionados entre si.

A escolha do tipo e a forma de apresentação sempre vão depender do contexto, mas de uma maneira geral um bom gráfico deve:

-Mostrar a informação de modo tão acurado quanto possível.

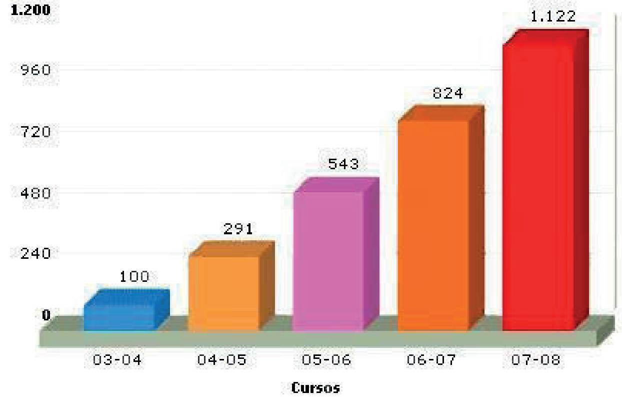
-Utilizar títulos, rótulos, legendas, etc. para tornar claro o contexto, o conteúdo e a mensagem.

-Complementar ou melhorar a visualização sobre aspectos descritos ou mostrados numericamente através de tabelas.

-Utilizar escalas adequadas.

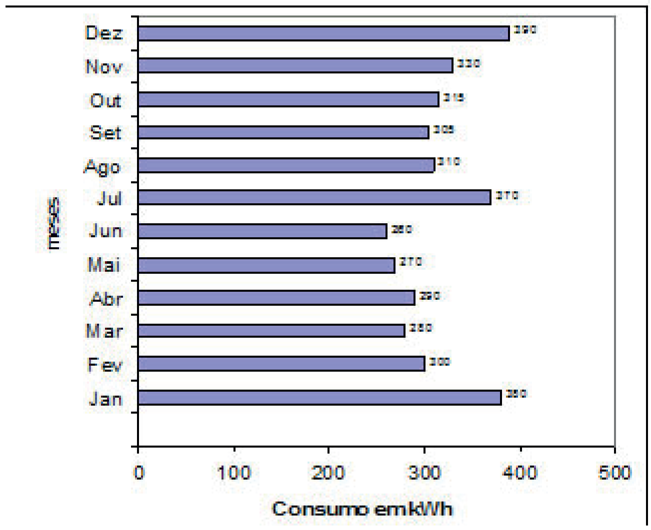
-Mostrar claramente as tendências existentes nos dados.

1. Tipos de gráficos



Fonte: tecnologia.umcomo.com.br

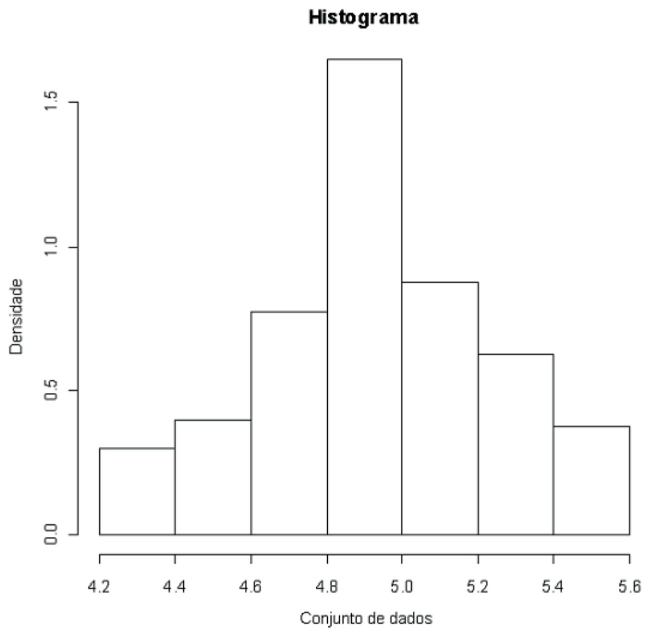
Barra horizontal



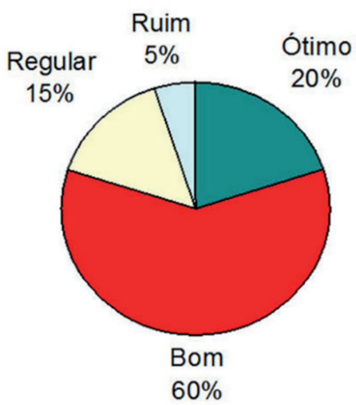
Fonte: mundoeducacao.bol.uol.com.br

Histogramas

São gráfico de barra que mostram a frequência de uma variável específica e um detalhe importante que são faixas de valores em x.

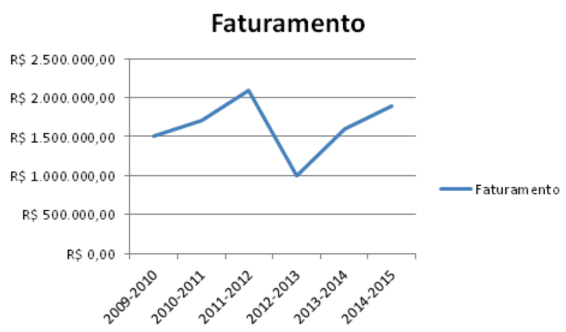


Setor ou pizza- Muito útil quando temos um total e queremos demonstrar cada parte, separando cada pedaço como numa pizza.



Fonte: educador.brasilescola.uol.com.br

Linhas- É um gráfico de grande utilidade e muito comum na representação de tendências e relacionamentos de variáveis



Pictogramas – são imagens ilustrativas para tornar mais fácil a compreensão de todos sobre um tema.

Da mesma forma, as tabelas ajudam na melhor visualização de dados e muitas vezes é através dela que vamos fazer os tipos de gráficos vistos anteriormente.

Podem ser tabelas simples:

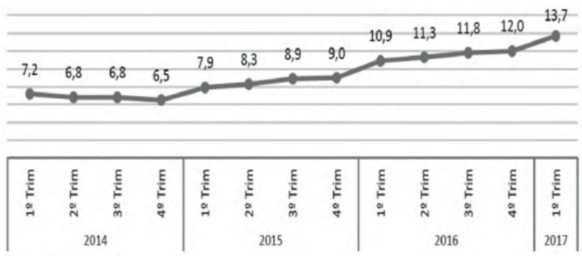
Quantos aparelhos tecnológicos você tem na sua casa?

aparelho	quantidade
televisão	3
celular	4
Geladeira	1

Até as tabelas que vimos nos exercícios de raciocínio lógico

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (TJ/RS - TÉCNICO JUDICIÁRIO – FAURGS/2017) Na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua, realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), foram obtidos os dados da taxa de desocupação da população em idade para trabalhar. Esses dados, em porcentagem, encontram-se indicados na apresentação gráfica abaixo, ao longo de trimestres de 2014 a 2017.



Fonte: IBGE, 18/5/2017.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a que apresenta a melhor aproximação para o aumento percentual da taxa de desocupação do primeiro trimestre de 2017 em relação à taxa de desocupação do primeiro trimestre de 2014.

a) 15%.
b) 25%.
c) 50%.
d) 75%.
e) 90%.

Resposta: Letra E.
13,7/7,2=1,90
Houve um aumento de 90%.

2. (CÂMARA DE SUMARÉ – ESCRITURÁRIO - VUNESP/2017) A tabela seguinte, incompleta, mostra a distribuição, percentual e quantitativa, da frota de uma empresa de ônibus urbanos, de acordo com o tempo de uso destes.

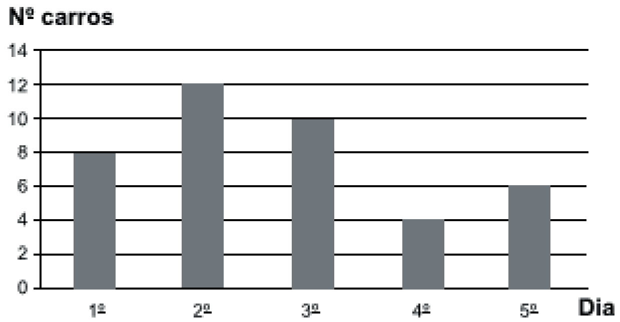
Tempo de uso	Quantidade de ônibus	% do total
Até 5 anos	-----	35%
6 a 10 anos	81	-----
11 a 15 anos	27	-----
Mais de 15 anos	-----	5%

O número total de ônibus dessa empresa é

a) 270.
b) 250.
c) 220
d) 180.
e) 120.

Resposta: Letra D
81+27=108
108 ônibus somam 60%(100-35-5)
108-----60
x--------100
x=10800/60=180

3. (CÂMARA DE SUMARÉ – ESCRITURÁRIO - VUNESP/2017) O gráfico mostra o número de carros vendidos por uma concessionária nos cinco dias subsequentes à veiculação de um anúncio promocional.



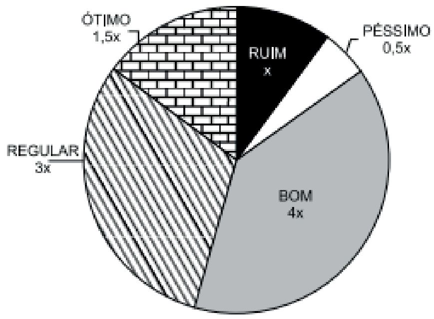
O número médio de carros vendidos por dia nesse período foi igual a

a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 7.
e) 6.

Resposta: Letra C.

$$M = \frac{8+12+10+4+6}{5} = 8$$

4. (CRBIO – Auxiliar Administrativo – VUNESP/2017) Uma professora elaborou um gráfico de setores para representar a distribuição, em porcentagem, dos cinco conceitos nos quais foram agrupadas as notas obtidas pelos alunos de uma determinada classe em uma prova de matemática. Observe que, nesse gráfico, as porcentagens referentes a cada conceito foram substituídas por x ou por múltiplos e submúltiplos de x.



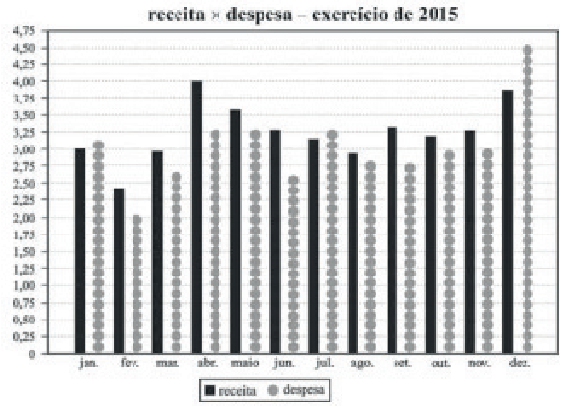
Analisando o gráfico, é correto afirmar que a medida do ângulo interno correspondente ao setor circular que representa o conceito BOM é igual a

a) 144º.
b) 135º.
c) 126º
d) 117º
e) 108º.

Resposta: Letra A.

X+0,5x+4x+3x+1,5x=360
10x=360
X=36
Como o conceito bom corresponde a 4x: 4x36=144°

5. (TCE/PR – CONHECIMENTOS BÁSICOS – CESPE/2016)

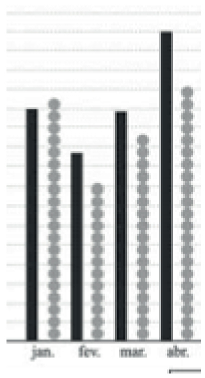


Internet: <www.gestaodinheiropublico.pr.gov.br> (com adaptações).

Tendo como referência o gráfico precedente, que mostra os valores, em bilhões de reais, relativos à arrecadação de receitas e aos gastos com despesas do estado do Paraná nos doze meses do ano de 2015, assinale a opção correta.

a) No ano considerado, o segundo trimestre caracterizou-se por uma queda contínua na arrecadação de receitas, situação que se repetiu no trimestre seguinte.
b) No primeiro quadrimestre de 2015, houve um período de queda simultânea dos gastos com despesas e da arrecadação de receitas e dois períodos de aumento simultâneo de gastos e de arrecadação.
c) No último bimestre do ano de 2015, foram registrados tanto o maior gasto com despesas quanto a maior arrecadação de receitas.
d) No ano em questão, janeiro e dezembro foram os únicos meses em que a arrecadação de receitas foi ultrapassada por gastos com despesas.
e) A menor arrecadação mensal de receitas e o menor gasto mensal com despesas foram verificados, respectivamente, no primeiro e no segundo semestre do ano de 2015.

Resposta: Letra B.
Analisando o primeiro quadrimestre, observamos que os dois primeiros meses de receita diminuem e os dois meses seguintes aumentam, o mesmo acontece com a despesa.



6. (BRDE – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – FUNDATEC/2015) Assinale a alternativa que representa a nomenclatura dos três gráficos abaixo, respectivamente.

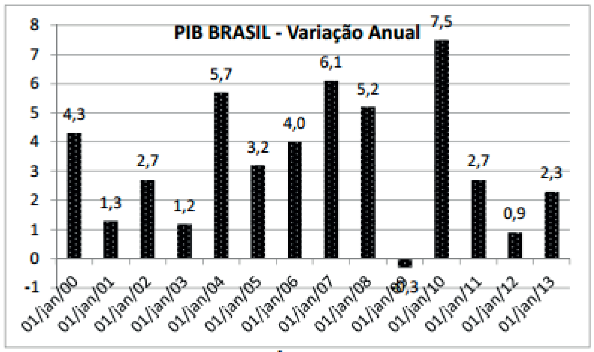


GRÁFICO 1

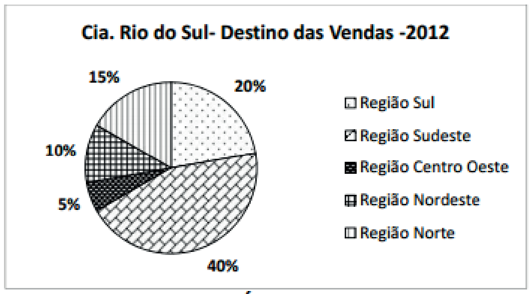


GRÁFICO 2

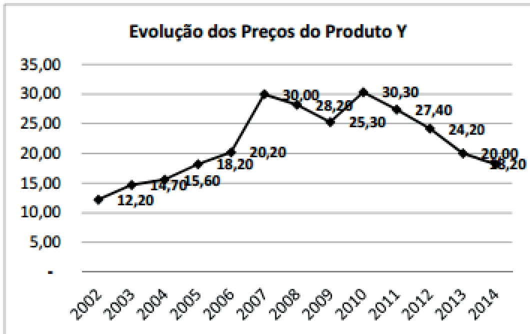


GRÁFICO 3

a) Gráfico de Setores – Gráfico de Barras – Gráfico de Linha.
c) Gráfico de Pareto – Gráfico de Pizza – Gráfico de Tendência.
c) Gráfico de Barras – Gráfico de Setores – Gráfico de Linha.
d) Gráfico de Linhas – Gráfico de Pizza – Gráfico de Barras.
e) Gráfico de Tendência – Gráfico de Setores – Gráfico de Linha.

Resposta: Letra C.
Como foi visto na teoria, gráfico de barras, de setores ou pizza e de linha

7. (TJ/SP – ESTATÍSTICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2015)
A distribuição de salários de uma empresa com 30 funcionários é dada na tabela seguinte.

Salário (em salários mínimos)	Funcionários
1,8	10
2,5	8
3,0	5
5,0	4
8,0	2
15,0	1

Pode-se concluir que

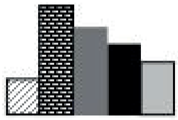
a) o total da folha de pagamentos é de 35,3 salários.
b) 60% dos trabalhadores ganham mais ou igual a 3 salários.
c) 10% dos trabalhadores ganham mais de 10 salários.
d) 20% dos trabalhadores detêm mais de 40% da renda total.
e) 60% dos trabalhadores detêm menos de 30% da renda total.

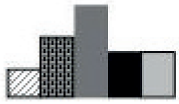
Resposta: Letra D.
a) 1,8x10+2,5x8+3,0x5+5,0x4+8,0x2+15,0x1=104 salários
b) 60% de 30=18 funcionários e se juntarmos quem ganha mais de 3 salários (5+4+2+1=12)
c)10% de 30=0,1x30=3 funcionários
E apenas 1 pessoa ganha
d) 40% de 104=0,4x104= 41,6
20% de 30=0,2x30=6
5x3+8x2+15x1=46, que já é maior.
e) 60% de 30=0,6x30=18
30% de 104=0,3x104=31,20da renda: 31,20

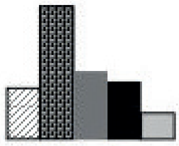
8. (TJ/SP – ESTATÍSTICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2015)
Considere a tabela de distribuição de frequência seguinte, em que x_i é a variável estudada e f_i é a frequência absoluta dos dados.

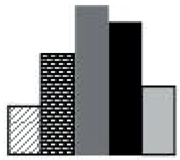
xi	fi
30-35	4
35-40	12
40-45	10
45-50	8
50-55	6
TOTAL	40

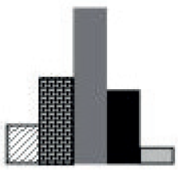
Assinale a alternativa em que o histograma é o que melhor representa a distribuição de frequência da tabela.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resposta: Letra A.
Colocando em ordem crescente: 30-35, 50-55, 45-50, 40-45, 35-40,

9. (DEPEN – AGENTE PENITENCIÁRIO FEDERAL – CESPE/2015)

região	quantidade de detentos no sistema penitenciário brasileiro (mil pessoas)	déficit de vagas no sistema penitenciário (mil vagas)	população brasileira (milhões de habitantes)
Norte	37	13	17
Centro-oeste	51	24	15
Nordeste	94	42	55
Sudeste	306	120	85
Sul	67	16	28
total	555	215	200

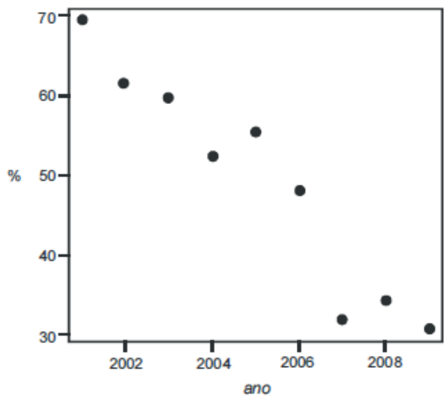
Ministério da Justiça — Departamento Penitenciário Nacional — Sistema Integrado de Informações Penitenciárias – InfoPen, Relatório Estatístico Sintético do Sistema Prisional Brasileiro, dez./2013 Internet:<www.justica.gov.br> (com adaptações)

A tabela mostrada apresenta a quantidade de detentos no sistema penitenciário brasileiro por região em 2013. Nesse ano, o déficit relativo de vagas — que se define pela razão entre o déficit de vagas no sistema penitenciário e a quantidade de detentos no sistema penitenciário — registrado em todo o Brasil foi superior a 38,7%, e, na média nacional, havia 277,5 detentos por 100 mil habitantes.
Com base nessas informações e na tabela apresentada, julgue o item a seguir.
Em 2013, mais de 55% da população carcerária no Brasil se encontrava na região Sudeste.

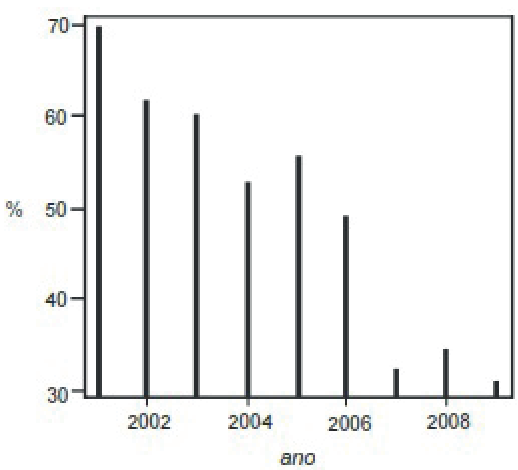
( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: CERTA.
555----100%
x----55%
x=305,25
Está correta, pois a região sudeste tem 306 pessoas.

10. (DEPEN – AGENTE PENITENCIÁRIO FEDERAL – CESPE/2015)



A partir das informações e do gráfico apresentados, julgue o item que se segue.
Se os percentuais forem representados por barras verticais, conforme o gráfico a seguir, então o resultado será denominado histograma.



( ) CERTO ( ) ERRADO

REFERÊNCIAS

http://www.galileu.esalq.usp.br

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

1. Teste de Hipóteses

Definição: Processo que usa estatísticas amostrais para testar a afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional.

Para testar um parâmetro populacional, você deve afirmar cuidadosamente um par de hipóteses – uma que represente a afirmação e outra, seu complemento. Quando uma é falsa, a outra é verdadeira.

Uma hipótese nula H_0 é uma hipótese estatística que contém uma afirmação de igualdade, tal como ≤, =, ≥

A hipótese alternativa H_a é o complemento da hipótese nula. Se H_0 for falsa, H_a deve ser verdadeira, e contém afirmação de desigualdade, como <, ≠, >.

Vamos ver como montar essas hipóteses
Um caso bem simples.

$$\begin{cases} H_0: \mu = k \\ H_a: \mu \neq k \end{cases}$$

Assim, fica fácil, se H_0 for falsa, H_a é verdadeira
Há uma regrinha para formular essas hipóteses

Formulação verbal H_0 A média é	Formulação Matemática	Formulação verbal H_a A média é
...maior ou igual a k. ....pelo menos k. ...não menos que k.	$\begin{cases} H_0: \mu \geq k \\ H_a: \mu < k \end{cases}$	...menor que k ... abaixo de k ...menos que k.
...menor ou igual a k. ....no máximo k. ...não mais que k.	$\begin{cases} H_0: \mu \leq k \\ H_a: \mu > k \end{cases}$	..maior que k ... acima de k ...mais do que k.

... igual a k. .... k. ...exatamente k.	$\begin{cases} H_0: \mu = k \\ H_a: \mu \neq k \end{cases}$	... não igual a k. .... diferente de k. ...não k.

Exemplo: Um fabricante de torneiras anuncia que o índice médio de fluxo de água de certo tipo de torneira é menor que 2,5 galões por minuto.

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 2{,}5 \text{ galões por minuto} \\ H_a: \mu < 2{,}5 \text{ galões por minuto} \end{cases}$$

Referências

Larson, Ron. Estatística Aplicada. 4ed – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

FREQUÊNCIAS

A primeira fase de um estudo estatístico consiste em recolher, contar e classificar os dados pesquisados sobre uma população estatística ou sobre uma amostra dessa população.

1. Frequência Absoluta

É o número de vezes que a variável estatística assume um valor.

1.1. Frequência Relativa

É o quociente entre a frequência absoluta e o número de elementos da amostra.

Na tabela a seguir, temos exemplo dos dois tipos:

Alturas	Frequências		Relativa Percentual
	Absoluta	Relativa	
1,69 $\mapsto$ 1,74	6	6/20 = 0,30	30%
1,74 $\mapsto$ 1,79	3	3/20 = 0,15	15%
1,79 $\mapsto$ 1,84	2	2/20 = 0,10	10%
1,84 $\mapsto$ 1,89	4	4/20 = 0,20	20%
1,89 $\mapsto$ 1,94	5	5/20 = 0,25	25%
Total	20		100%

1.2. Distribuição de frequência sem intervalos de classe:

É a simples condensação dos dados conforme as repetições de seu valores. Para um **ROL** de tamanho razoável esta distribuição de frequência é inconveniente, já que exige muito espaço. Veja exemplo abaixo:

Dados	Frequência
41	3
42	2
43	1
44	1
45	1
46	2
50	2
51	1
52	1
54	1
57	1
58	2
60	2
Total	20

1.3. Distribuição de frequência com intervalos de classe:

Quando o tamanho da amostra é elevado é mais racional efetuar o agrupamento dos valores em vários intervalos de classe.

Classes	Frequências
41 |------- 45	7
45 |------- 49	3
49 |------- 53	4
53 |------- 57	1
57 |------- 61	5
Total	20

2. Média aritmética

Média aritmética de um conjunto de números é o valor que se obtém dividindo a soma dos elementos pelo número de elementos do conjunto.

Representemos a média aritmética por $\overline{X}$.

A média pode ser calculada apenas se a variável envolvida na pesquisa for quantitativa. Não faz sentido calcular a média aritmética para variáveis quantitativas.

Na realização de uma mesma pesquisa estatística entre diferentes grupos, se for possível calcular a média, ficará mais fácil estabelecer uma comparação entre esses grupos e perceber tendências.

Considerando uma equipe de basquete, a soma das alturas dos jogadores é:

$$1{,}85 + 1{,}85 + 1{,}95 + 1{,}98 + 1{,}98 + 1{,}98 + 2{,}01 + 2{,}01 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}10 + 2{,}13 + 2{,}18 = 30{,}0$$

Se dividirmos esse valor pelo número total de jogadores, obteremos a **média aritmética** das alturas:

$$média = \frac{30,3}{15} = 2,02$$

A média aritmética das alturas dos jogadores é 2,02m.

2.1. Média Ponderada

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição e na qual cada elemento tem um "determinado peso" é chamada média aritmética ponderada.

$$x = \frac{P_1 . x_1 ; P_2 x_2 ; P_3 x_3 ; \ldots ; P_n x_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}$$

2.2. Mediana (Md)

Sejam os valores escritos em rol:
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

Sendo n ímpar, chama-se **mediana** o termo x_i tal que o número de termos da sequência que precedem x_i é igual ao número de termos que o sucedem, isto é, x_i é termo médio da sequência (x_n) em rol.

Sendo n par, chama-se **mediana** o valor obtido pela média aritmética entre os termos x_j e x_{j+1}, tais que o número de termos que precedem x_j é igual ao número de termos que sucedem x_{j+1}, isto é, a mediana é a média aritmética entre os termos centrais da sequência (x_n) em rol.

Exemplo 1:
Determinar a mediana do conjunto de dados:
{12, 3, 7, 10, 21, 18, 23}

Solução:
Escrevendo os elementos do conjunto em rol, tem-se: (3, 7, 10, 12, 18, 21, 23). A mediana é o termo médio desse rol. Logo: Md=12
Resposta: Md=12.

Exemplo 2:
Determinar a mediana do conjunto de dados:
{10, 12, 3, 7, 18, 23, 21, 25}.

Solução:
Escrevendo-se os elementos do conjunto em rol, tem-se:
(3, 7, 10, 12, 18, 21, 23, 25). A mediana é a média aritmética entre os dois termos centrais do rol.

Logo: $Md = \frac{12+18}{2} = 15$

Resposta: Md=15

3. Moda (Mo)
Num conjunto de números: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, chama-se moda aquele valor que ocorre com maior frequência.

Observação:
A moda pode não existir e, se existir, pode não ser única.

Exemplo 1:
O conjunto de dados 3, 3, 8, 8, 8, 6, 9, 31 tem moda igual a 8, isto é, Mo=8.

Exemplo 2:
O conjunto de dados 1, 2, 9, 6, 3, 5 não tem moda.

4. Medidas de dispersão

Duas distribuições de frequência com medidas de tendência central semelhantes podem apresentar características diversas. Necessita-se de outros índices numéricas que informem sobre o grau de dispersão ou variação dos dados em torno da média ou de qualquer outro valor de concentração. Esses índices são chamados **medidas de dispersão**.

5. Variância

Há um índice que mede a "dispersão" dos elementos de um conjunto de números em relação à sua média aritmética, e que é chamado de **variância**. Esse índice é assim definido:
Seja o conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, tal que $\bar{x}$ é sua média aritmética. Chama-se **variância** desse conjunto, e indica-se por σ^2, o número:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

E para amostra

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

Exemplo 1:
Em oito jogos, o jogador A, de bola ao cesto, apresentou o seguinte desempenho, descrito na tabela abaixo:

Jogo	Número de pontos
1	22
2	18
3	13
4	24
5	26
6	20
7	19
8	18

a) Qual a média de pontos por jogo?
b) Qual a variância do conjunto de pontos?

Solução:

a) A média de pontos por jogo é:

$$\bar{x} = \frac{22 + 18 + 13 + 24 + 26 + 20 + 19 + 18}{8}$$

$$\therefore \bar{x} = 20$$

b) A variância é:

$$\sigma^2 = \frac{(22-20)^2 + (18-20)^2 + (13-20)^2 + (24-20)^2 + (26-20)^2 + (20-20^2) + (19-20)^2 + (18-20)^2}{8}$$

$$\therefore \sigma^2 = 14{,}25$$

DESVIO MÉDIO

1. Definição

Medida da dispersão dos dados em relação à média de uma sequência. Esta medida representa a média das distâncias entre cada elemento da amostra e seu valor médio.

$$DM = \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$$

2. Desvio padrão

2.1. Definição

Seja o conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, tal que $\bar{x}$ é sua média aritmética. Chama-se desvio padrão desse conjunto, e indica-se por σ, o número:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Isto é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Exemplo:

As estaturas dos jogadores de uma equipe de basquetebol são: 2,00 m; 1,95 m; 2,10 m; 1,90 m e 2,05 m. Calcular:

a) A estatura média desses jogadores.

b) O desvio padrão desse conjunto de estaturas.

Solução:

$$\bar{x} = \frac{2{,}00 + 1{,}95 + 2{,}10 + 1{,}90 + 2{,}05}{5}$$

$$\therefore \bar{x} = 2{,}00\,m$$

Sendo σ o desvio padrão, tem-se:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2{,}00-2{,}00)^2 + (1{,}95-2{,}00)^2 + (2{,}10-2{,}00)^2 + (1{,}90-2{,}00)^2 + (2{,}05-2{,}00)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}005\,m} \approx 0{,}07m$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (CRBIO – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – VUNESP/2017) Uma empresa tem 120 funcionários no total: 70 possuem curso superior e 50 não possuem curso superior. Sabe-se que a média salarial de toda a empresa é de R$ 5.000,00, e que a média salarial somente dos funcionários que possuem curso superior é de R$ 6.000,00. Desse modo, é correto afirmar que a média salarial dos funcionários dessa empresa que não possuem curso superior é de

a) R$ 4.000,00.
b) R$ 3.900,00.
c) R$ 3.800,00.
d) R$ 3.700,00.
e) R$ 3.600,00.

Resposta: Letra E.
S=cursam superior
M=não tem curso superior

$$\frac{S+M}{120} = 5000$$

S+M=600000

$$\frac{S}{70} = 6000$$

S=420000
M=600000-420000=180000

$$\frac{M}{50} = \frac{180000}{50} = 3600$$

2. (TJM/SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2017) Leia o enunciado a seguir para responder a questão.
A tabela apresenta o número de acertos dos 600 candidatos que realizaram a prova da segunda fase de um concurso, que continha 5 questões de múltipla escolha

Número de acertos	Número de candidatos
5	204
4	132
3	96
2	78
1	66
0	24

A média de acertos por prova foi de

a) 3,57.
b) 3,43
c) 3,32.
d) 3,25.
e) 3,19.

Resposta: Letra B.

$$M = \frac{204 \cdot 5 + 132 \cdot 4 + 96 \cdot 3 + 78 \cdot 2 + 66 \cdot 1 + 24 \cdot 0}{204 + 132 + \cdot 96 + 78 + 66 + 24} = \frac{2058}{600} = 3{,}43$$

3. (PREF. GUARULHOS/SP – ASSISTENTE DE GESTÃO ESCOLAR – VUNESP/2016) Certa escola tem 15 classes no período matutino e 10 classes no período vespertino. O número médio de alunos por classe no período matutino é 20, e, no período vespertino, é 25. Considerando os dois períodos citados, a média aritmética do número de alunos por classe é

a) 24,5.
b) 23.
c) 22,5.
d) 22.
e) 21.

Resposta: Letra D.

$$\frac{M}{15} = 20$$

M=300

$$\frac{V}{10} = 25$$

V=250

$$\frac{M+V}{25} = \frac{300+250}{25} = 22$$

4. (SEGEP/MA – TÉCNICO DA RECEITA ESTADUAL – FCC/2016) Para responder à questão, considere as informações abaixo.
Três funcionários do Serviço de Atendimento ao Cliente de uma loja foram avaliados pelos clientes que atribuíram uma nota (1; 2; 3; 4; 5) para o atendimento recebido. A tabela mostra as notas recebidas por esses funcionários em um determinado dia.

Funcionário	Número de Cada Nota Recebida pelos Funcionários					Total de Atendimentos no Dia
	1	2	3	4	5	
A	2	7	2	9	10	30
B	6	6	9	14	5	40
C	0	5	10	6	4	25

Considerando a avaliação média individual de cada funcionário nesse dia, a diferença entre as médias mais próximas é igual a

a) 0,32.
b) 0,21.
c) 0,35.
d) 0,18.
e) 0,24.

Resposta: Letra B.

$$M_A = \frac{2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5}{30} = \frac{108}{30} = 3{,}6$$

$$M_B = \frac{6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{40} = \frac{126}{40} = 3{,}15$$

$$M_C = \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{25} = \frac{84}{25} = 3{,}36$$

3,36-3,15=0,21

5. (UFES – ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO – UFES/2017) Considere n números x1, x2, ... , xn, em que x1 ≤ x2 ≤ ··· ≤ xn . A mediana desses números é igual a x(n + 1)/2, se n for ímpar, e é igual à média aritmética de xn ⁄ 2 e x(n + 2)/2, se n for par. Uma prova composta por 5 questões foi aplicada a uma turma de 24 alunos. A tabela seguinte relaciona o número de acertos obtidos na prova com o número de alunos que obtiveram esse número de acertos.

Número de acertos	Número de alunos
0	4
1	5
2	4
3	3
4	5
5	3

A penúltima linha da tabela acima, por exemplo, indica que 5 alunos tiveram, cada um, um total de 4 acertos na prova. A mediana dos números de acertos é igual a

a) 1,5
b) 2
c) 2,5
d) 3
e) 3,5

Resposta: Letra B.
Como 24 é um número par, devemos fazer a segunda regra:

$$x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}} = x_{\frac{24}{12}} + x_{\frac{26}{2}} = \frac{x_{12} + x_{13}}{2} = 2$$

6. (UFAL – AUXILIAR DE BIBLIOTECA – COPEVE/2016) A tabela apresenta o número de empréstimos de livros de uma biblioteca setorial de um Instituto Federal, no primeiro semestre de 2016.

Mês	Empréstimos
Janeiro	15
Fevereiro	25
Março	22
Abril	30
Maio	28
Junho	15

Dadas as afirmativas,
I. A biblioteca emprestou, em média, 22,5 livros por mês.
II. A mediana da série de valores é igual a 26.
III. A moda da série de valores é igual a 15.

Verifica-se que está(ão) correta(s)

a) II, apenas.
b) III, apenas.
c) I e II, apenas.
d) I e III, apenas.
e) I, II e III.

Resposta: Letra D.

$$m = \frac{15+25+22+30+28+15}{6} = \frac{135}{6} = 22{,}5$$

Mediana
Vamos colocar os números em ordem crescente

15,15,22,25,28,30

$$Mediana = \frac{22+25}{2} = \frac{47}{2} = 23{,}5$$

Moda é o número que mais aparece, no caso o 15.

7. (COSANPA - QUÍMICO – FADESP/2017) Algumas Determinações do teor de sódio em água (em mg L-1) foram executadas (em triplicata) paralelamente por quatro laboratórios e os resultados são mostrados na tabela abaixo.

Replicatas	Laboratório			
	1	2	3	4
1	30,3	30,9	30,3	30,5
2	30,4	30,8	30,7	30,4
3	30,0	30,6	30,4	30,7
Média	30,20	30,77	30,47	30,53
Desvio Padrão	0,20	0,15	0,21	0,15

Utilize essa tabela para responder à questão.
O laboratório que apresenta o maior erro padrão é o de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

Resposta: Letra C.
Como o desvio padrão é maior no 3, o erro padrão é proporcional, portanto também é maior em 3.

8. (ANAC – ANALISTA ADMINISTRATIVO- ESAF/2016) Os valores a seguir representam uma amostra

3 3 1 5 4 6 2 4 8

Então, a variância dessa amostra é igual a

a) 4,0
b) 2,5.
c) 4,5.
d) 5,5
e) 3,0

Resposta: Letra C.

$$\bar{x} = \frac{3+3+1+5+4+6+2+4+8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-4)^2+(3-4)^2+(1-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(8-4)^2}{8} = \frac{1+1+9+1+0+4+4+0+16}{8} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

9. (MPE/SP – OFICIAL DE PROMOTORIA I – VUNESP/2016) A média de salários dos 13 funcionários de uma empresa é de R$ 1.998,00. Dois novos funcionários foram contratados, um com o salário 10% maior que o do outro, e a média salarial dos 15 funcionários passou a ser R$ 2.013,00. O menor salário, dentre esses dois novos funcionários, é igual a

a) R$ 2.002,00.
b) R$ 2.006,00.
c) R$ 2.010,00.
d) R$ 2.004,00.
e) R$ 2.008,00.

Resposta: Letra C.
Vamos chamar de x a soma dos salários dos 13 funcionários
x/13=1998
X=13.1998
X=25974
Vamos chamar de y o funcionário contratado com menor valor e, portanto, 1,1y o com 10% de salário maior, pois ele ganha y+10% de y
Y+0,1y=1,1y
(x+y+1,1y)/15=2013
25974+2,1y=15·2013
2,1y=30195-25974
2,1y=4221
Y=2010

10. (PREF. DE NITERÓI – AGENTE FAZENDÁRIO – FGV/2015) Os 12 funcionários de uma repartição da prefeitura foram submetidos a um teste de avaliação de conhecimentos de computação e a pontuação deles, em uma escala de 0 a 100, está no quadro abaixo.

50	55	55	55	55	60
62	63	65	90	90	100

O número de funcionários com pontuação acima da média é:

a) 3;
b) 4;
c) 5;
d) 6;
e) 7.

Resposta: Letra A.

$$M = \frac{50+55+55+55+55+60+62+63+65+90+90+100}{12} = \frac{800}{12}$$

M=66,67
Apenas 3 funcionários estão acima da média.

HORA DE PRATICAR!

1. (SESAU-RO - TÉCNICO EM INFORMÁTICA – FUNRIO/2017) Numa vila, há quatro caminhos que ligam o campo de futebol ao mercado central e há quatro caminhos que ligam o mercado central à sede da prefeitura. João está no campo de futebol e pretende ir à sede da prefeitura passando primeiro pelo mercado central. O número de maneiras diferentes de João fazer o percurso é igual a:

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

2. (SESAU-RO - TÉCNICO EM INFORMÁTICA – FUNRIO/2017) Um anagrama é uma reordenação das letras de uma palavra. Por exemplo: MOCA e AOCM são anagramas da palavra COMA. O número de anagramas que a palavra COMA possui é igual a:

a) 12
b) 24
c) 30
d) 36
e) 42

3. (EBSERH - ENGENHEIRO ELETRICISTA – IBFC/2016) Um fazendeiro possui oito tipos de sementes para plantar, porém, apenas quatro podem ser plantadas ao mesmo tempo. As possibilidades que ele tem de escolher quatro tipos de sementes, sem ocorrer repetição está descrita na alternativa:

a) Cento e Trinta
b) Cento e dez
c) Setenta
d) Quarenta e Oito
e) Cinquenta e seis

4. (IF-ES/2016) Um grupo de oito amigos foi acampar e levou duas barracas distintas, uma com capacidade máxima para três pessoas e a outra para cinco pessoas. De quantas formas distintas eles podem se agrupar para passar a noite, ficando cinco em uma barraca e três na outra?Parte superior do formulário

a) $A_{8,3} \cdot A_{8,5}$
b) $C_{8,3} \cdot C_{5,5}$
c) $C_{8,3} \cdot C_{8,5}$
d) $A_{8,3}$
e) $5! \cdot 3!$

5. (CELESC - ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – FEPESE/2016) Em um colégio os alunos irão eleger o diretor, vice-diretor e tesoureiro entre os 20 professores do colégio. De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?

a) 6980
b) 6840
c) 6720
d) 6660
e) 6220

6. (IF-BA – PROFESSOR – AOCP-2016) Em uma aula de matemática, foi solicitada aos alunos a resolução do seguinte exercício: "Paula comprou um cofre e criou uma senha formada por 4 algarismos distintos. Lembrava-se apenas do primeiro, 8, e sabia que o algarismo 3 também fazia parte da senha. Qual é o número máximo de tentativas para ela abrir o cofre?". Percorrendo as carteiras, o professor verificou diferentes raciocínios combinatórios. Apresentamos, a seguir, cinco deles.

Aluno A: $A_{8,2} + C_{8,2}$
Aluno B: $3.A_{8,2}$
Aluno C: $3.C_{8,2}$
Aluno D: . $3.P_8$
Aluno E: . $A_{8,2}.C_{8,2}$

Assinale a alternativa que indica o aluno que apresentou o raciocínio correto para a resolução da questão.

a) Aluno A
b) Aluno B
c) Aluno C
d) Aluno D
e) Aluno E

7. (SESC-PA – ENCARREGADO ADMINISTRATIVO – CONED-2016) Com as letras da palavra MATEUS, quantos anagramas se iniciando com consoante e terminando com vogal, podem ser formados?

a) 720
b) 240
c) 740
d) 216
e) 420

8. (SEGEP-MA – AUDITOR FISCAL DA RECEITA FEDERAL – FCC/2016) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

a) 40
b) 56
c) 30
d) 26
e) 36

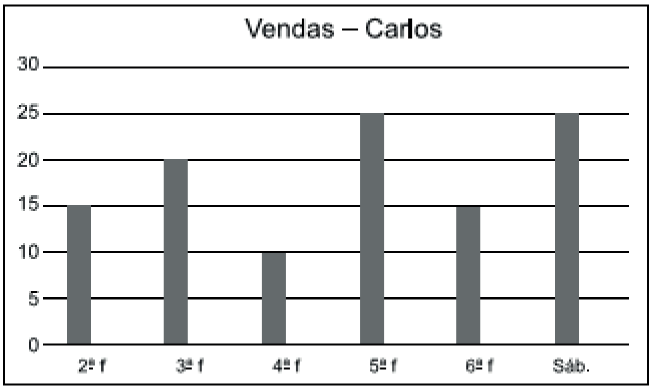
9.(MS CONCURSOS – ASSISTENTE DE ALUNO – 2014) Os vagões de um trem de carga possuem capacidade máxima de carregamento correspondente a 50 sacos de soja ou a 400 telhas de barro. Um dos vagões está com 32 sacos de soja. O número máximo de telhas que pode ser carregado neste vagão será de:

a) 148
b) 146
c) 144
d) 132

10.(FUNDATEC – ESCRITURÁRIO – 2015) Utilizando a palavra FLORESTA, quantos anagramas podem ser formados considerando que as letras FLR sempre apareçam juntas e nessa ordem?

a) 520
b) 660
c) 720
d) 1580
e) 2160

11. (UNESP – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – VUNESP/2017) Utilize os dados do gráfico a seguir, que mostra o número de rascunho vendas realizadas pelo vendedor Carlos em seis dias de uma semana, para responder à questão.



A média diária de vendas de Carlos, nessa semana, é, aproximadamente, igual a:

a) 12
b) 15
c) 18
d) 20
e) 21

12. (TJM-SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – UNVUNESP/2017) Leia o enunciado a seguir para responder a questão.
A tabela apresenta o número de acertos dos 600 candidatos que realizaram a prova da segunda fase de um concurso, que continha 5 questões de múltipla escolha.

Número de acertos	Número de candidatos
5	204
4	132
3	96
2	78
1	66
0	24

Analisando-se as informações apresentadas na tabela, é correto afirmar que:

a) mais da metade dos candidatos acertou menos de 50% da prova.
b) menos da metade dos candidatos acertou mais de 50% da prova.
c) exatamente 168 candidatos acertaram, no mínimo, 2 questões.
d) 264 candidatos acertaram, no máximo, 3 questões.
e) 132 candidatos acertaram a questão de número 4.

13. (IF-BA – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – AOCP/2016) Sobre medidas de tendência central, considerando o conjunto T das temperaturas, em grau Celsius, registradas nos dez primeiros dias do mês de junho em determinada região, respectivamente: 11°C; 11°C; 6°C; 6°C; 3°C; 3°C; 0°C; 3°C; 5°C; 6°C, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta a(s) correta(s).

I. A média aritmética das temperaturas é 6°C.
II. A mediana é igual a 5°C ou 6°C.
III. P é multimodal.

a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas III
d) Apenas I e III
e) Apenas II e III

14. (SEGEP-MA - ANALISTA AMBIENTAL – FCC/2016) Considere a tabela abaixo.

Produtos	Aquisição alimentar domiciliar *per capita* anual, por áreas urbanas (2008-2009)								
	Aquisição alimentar domiciliar *per capita* anual, por áreas urbanas dos Municípios das Capitais (Kg)								
	Porto Velho	Rio Branco	Manaus	Boa Vista	Belém	Macapá	Palmas	São Luís	Teresina
Arroz	35	24	20	32	18	14	28	40	42
Feijão	9	7	10	7	10	7	6	6	9

(Adaptado de: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa de Orçamentos Familiares. 2008-2009)
A partir dos dados da tabela, é possível concluir que, nas áreas urbanas consideradas, a média da aquisição per capita anual de arroz supera a da aquisição per capita de feijão em, aproximadamente,

a) 10 kg
b) 20 kg
c) 15 kg
d) 5 kg
e) 25 kg

15. (SEGEP-MA – AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL – FCC/2016) Os registros da temperatura máxima diária dos primeiros 6 dias de uma semana foram: 25 °C; 26 °C, 28,5 °C; 26,8 °C; 25 °C; 25,6 °C. Incluindo também o registro da temperatura máxima diária do 7º dia dessa semana, o conjunto dos sete dados numéricos será unimodal com moda igual a 25 °C, e terá mediana igual a 26 °C. De acordo com os dados, é correto afirmar que, necessariamente, a temperatura máxima diária do 7º dia foi

a) Inferior a 25°C
b) Superior a 26,8°C
c) Igual a 26°C
d) Inferior a 25,6°C
e) Superior a 26°C

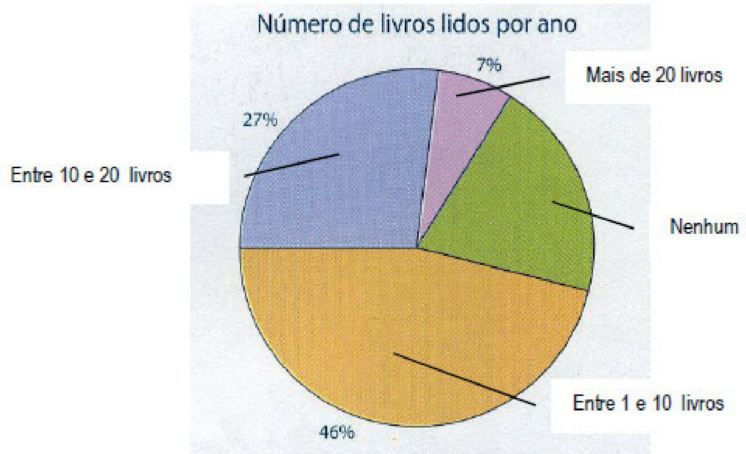
16. (SEGEP-MA – AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL – FCC/2016) Três funcionários do Serviço de Atendimento ao Cliente de uma loja foram avaliados pelos clientes que atribuíram uma nota (1; 2; 3; 4; 5) para o atendimento recebido. A tabela mostra as notas recebidas por esses funcionários em um determinado dia.

Funcionário	Número de Cada Nota Recebida pelos Funcionários					Total de Atendimentos no Dia
	1	2	3	4	5	
A	2	7	2	9	10	30
B	6	6	9	14	5	40
C	0	5	10	6	4	25

Considerando a avaliação média individual de cada funcionário nesse dia, a diferença entre as médias mais próximas é igual a:

a) 0,32
b) 0,21
c) 0,35
d) 0,18
e) 0,24

17. (PREF. DE CARPINA-PE – ASSISTENTE ADIMINISTRATIVO – CONPASS/2016) Efetuou-se uma pesquisa com 30 pessoas, escolhidas aleatoriamente, para saber o número de livros que liam por ano. Com base nas respostas obtidas, elaborou-se o seguinte gráfico:



Pode-se afirmar que o número de pessoas que, num ano, não leem livro algum é:

a) 6
b) 2
c) 14
d) 20
e) 12

MATEMÁTICA FINANCEIRA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

18. (PREF. LAURO MULLER-SC – AUXILIAR ADMINISTRATIVO FAPESUL/2016) Assinale a assertiva que apresenta a média aritmética simples, a moda e a mediana, respectivamente, da sequência (8,9,6,4,3,11,7,10,14,14).

a) 8,6 – 8 – 14
b) 8,6 – 14 – 8
c) 8,6 – 14 – 8,5
d) 8 – 14 – 9,1
e) 7,8 – 14 – 9

19. (Professor – Pref. Rio de Janeiro/2016) A tabela abaixo representa o consumo de carne mensal, em kg, de uma determinada família durante um semestre.

Meses	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
Consumo em kg	8	10	9	7	10	11

A mediana das seis quantidades de carne mostradas na tabela é igual a:

a) 9,0
b) 9,2
c) 9,5
d) 9,7

20. (STM – ANALISTA JUDICIÁRIO –CESPE/2018) Uma pessoa atrasou em 15 dias o pagamento de uma dívida de R$ 20.000, cuja taxa de juros de mora é de 21% ao mês no regime de juros simples.
Acerca dessa situação hipotética, e considerando o mês comercial de 30 dias, julgue o item subsequente.

No regime de juros compostos, o valor dos juros de mora na situação apresentada será R$ 100 menor que no regime de juros simples.

( ) CERTO ( ) ERRADO

21. (SEFAZ-GO – AUDITOR FISCAL – FCC/2018) O preço à vista de um apartamento é R$ 210.000,00. Jorge fez uma proposta ao proprietário para adquirir esse imóvel pagando-o em três parcelas iguais, a primeira à vista, a segunda após 1 ano e a terceira depois de 2 anos. O proprietário aceitou a proposta, desde que fossem cobrados juros compostos de 100% ao ano sobre o saldo devedor após o pagamento de cada parcela. Nas condições impostas pelo proprietário, o valor de cada uma das três parcelas a serem pagas por Jorge, em reais, deverá ser igual a

a) 120.000,00.
b) 90.000,00.
c) 100.000,00.
d) 70.000,00.
e) 130.000,00.

22. (UFLA – ADMINITRADOR – UFLA/2018) A alternativa que apresenta o valor futuro correto de uma aplicação de R$ 100,00 à taxa de juros compostos de 10% ao ano pelo período de dois anos é:

a) R$ 121,00
b) R$ 112,00
c) R$ 120,00
d) R$ 110,00

23. (LIQUIGÁS – ASSITENTE ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2018) Um cliente fez um empréstimo de 200 mil reais, a taxa de 5% ao mês, no sistema de juros compostos, em jan/2018. Após exatos dois meses da data do primeiro empréstimo, em mar/2018, ele pegou mais 100 mil reais, mantendo a taxa e o sistema de juros. Em abr/2018, exatamente um mês após o último empréstimo, liquidou as duas dívidas, zerando o seu saldo devedor.
O valor pago pelo cliente, em milhares de reais, foi de, aproximadamente,

a) 300,0
b) 336,5
c) 325,6
d) 345,0
e) 347,3

24. (IBFC – PERITO – 2017) Assinale a alternativa correta. Uma empresa recebeu um empréstimo bancário de R$ 120.000,00 por 1 ano, pagando o montante de R$ 180.000,00. A taxa anual de juros desse empréstimo foi de:

a) 0,5% a.a
b) 5% a.a
c) 5,55% a.a
d) 150% a.a
e) 50% a.a

25. (IBGP – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – 2017) João deposita, mensalmente, a quantia de R$ 15,00 em um fundo que rende 3% ao mês, compostos mensalmente. Assinale a alternativa CORRETA para o montante que João terá imediatamente após o 11º depósito.

a) 171,96
b)189,16
c) 192,12
d) 192,00

26. (FCM – PESQUISA OPERACIONAL – 2016) Um produto é vendido à vista por R$ 1.000,00, ou em dois pagamentos mensais, iguais e consecutivos. Sabendo-se que, para as vendas a prazo, é cobrada uma taxa de juro compostos de 60% ao ano, capitalizada mensalmente, e que a primeira prestação é paga 30 dias após a compra, o valor aproximado das prestações será de

a) R$ 525,00
b) R$ 537,80
c) R$ 550,00
d) 575,30
e) 594,50

27. (UFJF – TÉCNICO DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO - 2017) Um capital foi aplicado a juros compostos por 2 meses e, ao final desse período, gerou um montante cujo valor foi 21% maior do que o capital que fora aplicado. A taxa mensal de juros utilizada nessa aplicação foi igual a:

a) 10,0 %
b) 10,5 %
c) 21,0 %
d) 42,0 %
e) 61,5 %

28. (IPREM – AUXILIAR DE TESOURARIA – 2015) O valor futuro de um valor presente de R$25.000,00 com taxa de juros compostos de 3,5% ao mês durante 36 meses é de:

a) R$ 60.813,38
b) R$ 102.598,31
c) R$ 86.256,65
d) R$ 72.456,96

29. (SECRETÁRIO AUXILIAR – MPE-GO/2017) Carlos aplicou R$ 5.000,00, pelo prazo de 3 meses, à taxa de juros simples de 5% ao mês. Qual o valor do montante aplicado por Carlos ao final dos 3 meses?

a) R$ 5250,00
b)R$ 5500,00
c)R$ 5788,13
d) R$ 5450,00
e) R$ 5750,00

30. (CRMV-SC– RECEPCIONISTA – IESES/2017) Deverá ser pago o montante de $ 6.300,00 originado de um financiamento contraído no valor de $ 4.800,00 no regime dos juros simples. Sabendo-se que a taxa de juros empregada foi de 75% ao ano, pergunta-se qual foi o prazo do financiamento?

a) 5 meses
b) 4 meses
c) 7 meses
d) 6 meses

31. (CRMV-SC– RECEPCIONISTA – IESES/2017) A taxa de juros de 12% ao bimestre no regime dos juros simples tem a taxa proporcional anual igual a:

a) 60 % a.a.
b) 97,38% a.a
c) 72% a.a
d) 81,57% a.a

32. (UNESP – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – VUNESP/2017) Carlos fez um empréstimo de R$ 2.800,00, à taxa de juros simples de 1,3% ao mês, que deve ser pago após 3 meses, juntamente com os juros. O valor que Carlos deverá pagar é igual a:

a) R$ 2839,40
b) R$ 2889,30
c) R$ 2909,20
d) R$ 2953,20
e) R$ 3112,40

GABARITO

1	E
2	B
3	C
4	B
5	B
6	B
7	D
8	D
9	C
10	D
11	C
12	D
13	C
14	B
15	E
16	B
17	A
18	C
19	C
20	CERTO
21	C
22	C
23	B
24	E
25	D
26	B
27	A
28	C
29	E
30	A
31	C
32	C