ÍNDICE

MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA, ENVOLVENDO: ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO, POTENCIAÇÃO OU RADICIAÇÃO COM NÚMEROS RACIONAIS, NAS SUAS REPRESENTAÇÕES FRACIONÁRIA OU DECIMAL.

Números Racionais: Frações, Números Decimais e suas Operações

Números Racionais

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são números inteiros, sendo que *n* deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos $\frac{m}{n}$ para significar a divisão de *m* por *n* .

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por *Q*. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \text{ e } n \text{ em } Z, n \text{ diferente de zero}\right\}$

No conjunto *Q* destacamos os seguintes subconjuntos:

- Q^* = conjunto dos racionais não nulos;
- Q_+ = conjunto dos racionais não negativos;
- Q_+^* = conjunto dos racionais positivos;
- Q_- = conjunto dos racionais não positivos;
- Q_-^* = conjunto dos racionais negativos.

Módulo ou valor absoluto: É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.

Exemplo: Módulo de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Módulo de $+\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Números Opostos: Dizemos que $-\frac{3}{2}$ *e* $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ *e* $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

Soma (Adição) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Propriedades da Adição de Números Racionais

O conjunto é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais resulta em um número racional.

- Associativa: Para todos em *: a + (b + c) = (a + b) + c*
- Comutativa: Para todos em *: a + b = b + a*
- Elemento neutro: Existe em , que adicionado a todo em , proporciona o próprio , isto é: q + 0 = q
- Elemento oposto: Para todo q em Q, existe -q em Q, tal que q + (–q) = 0

Subtração de Números Racionais

A subtração de dois números racionais e é a própria operação de adição do número com o oposto de *q*, isto é: p – q = p + (–q)

Multiplicação (Produto) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

O produto dos números racionais a e b também pode ser indicado por a × b, a.b ou ainda ab sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

(+1)•(+1) = (+1) – Positivo Positivo = Positivo
(+1)•(-1) = (-1) - Positivo Negativo = Negativo
(-1)•(+1) = (-1) - Negativo Positivo = Negativo
(-1)• (-1) = (+1) – Negativo Negativo = Positivo

#FicaDica

O produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.

Propriedades da Multiplicação de Números Racionais

O conjunto *Q* é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais resultaem um número racional.

- Associativa: Para todos a,b,c em Q: a · (b · c) = (a · b) · c
- Comutativa: Para todos a,b em Q: a · b = b · a
- Elemento neutro: Existe 1 em Q, que multiplicado por todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: q · 1 = q
- Elemento inverso: Para todo $q = \frac{a}{b}$ em Q, $q^{-1} = \frac{b}{a}$ diferente de zero, existe em Q: $q \cdot q^{-1} = 1$, ou seja, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$
- Distributiva: Para todos a,b,c em Q: a · (b + c) = (a · b) + (a· c)

Divisão de Números Racionais

A divisão de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de multiplicação do número *p* pelo inverso de *q*, isto é: $p \div q = p \times q^{-1}$

De maneira prática costuma-se dizer que em uma divisão de duas frações, conserva-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda:

Observação: É possível encontrar divisão de frações da seguinte forma: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. O procedimento de cálculo é o mesmo.

Potenciação de Números Racionais

A potência q^n do número racional é um produto de fatores iguais. O número é denominado a base e o número é o expoente.

$q^n = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q$, (*q* aparece *n* vezes)

Exs:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

c) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

d) $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = 25$

Propriedades da Potenciação aplicadas a números racionais

Toda potência com expoente 0 é igual a 1.

$$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$$

- Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

- Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

- Toda potência com expoente par é um número positivo.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

- Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

- Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

- Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Radiciação de Números Racionais

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número. Vejamos alguns exemplos:

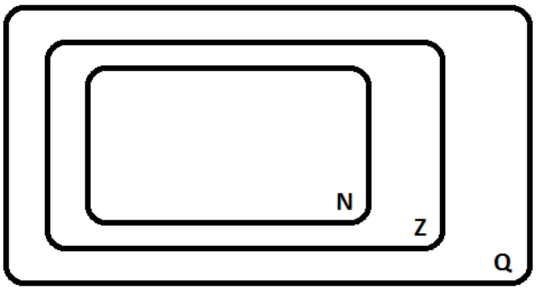
Ex:

4 Representa o produto 2. 2 ou 2^2. Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se $\sqrt{4} = 2$.

Ex:

$\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{1}{3}$ **é a raiz quadrada de** $\frac{1}{9}$. Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Ex:
0,216 Representa o produto $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6$ ou $(0,6)3$. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.
Assim, podemos construir o diagrama:



FIQUE ATENTO!
Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $-\frac{100}{9}$ **não tem raiz quadrada em Q, pois tanto** $-\frac{10}{3}$ como $+\frac{10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão $\frac{100}{9}$.

Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ **não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê** $\frac{2}{3}$.

Frações

Frações são representações de partes iguais de um todo. São expressas como um quociente de dois números $\frac{x}{y}$, sendo x o numerador e y o denominador da fração, com $y \neq 0$.

Frações Equivalentes

São frações que, embora diferentes, representam a mesma parte do mesmo todo. Uma fração é equivalente a outra quando pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração pelo mesmo número.

Ex: $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$.
A segunda fração pode ser obtida multiplicando o numerador e denominador de $\frac{3}{5}$ por 2:

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

Assim, diz-se que $\frac{6}{10}$ é uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$

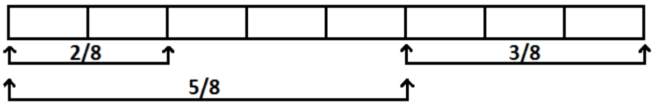
Operações com Frações

Adição e Subtração

Frações com denominadores iguais:

Ex:
Jorge comeu $\frac{3}{8}$ de um tablete de chocolate e Miguel $\frac{5}{8}$ desse mesmo tablete. Qual a fração do tablete de chocolate que Jorge e Miguel comeram juntos?

A figura abaixo representa o tablete de chocolate. Nela também estão representadas as frações do tablete que Jorge e Miguel comeram:



Observe que $\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

Portanto, Jorge e Miguel comeram juntos $\frac{5}{8}$ do tablete de chocolate.

Na adição e subtração de duas ou mais frações que têm denominadores iguais, conservamos o denominador comum e somamos ou subtraímos os numeradores.

Outro Exemplo:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3+5-7}{2}=\frac{1}{2}$$

Frações com denominadores diferentes:

Calcular o valor de $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$ Inicialmente, devemos reduzir as frações ao mesmo denominador comum. Para isso, encontramos o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os dois (ou mais, se houver) denominadores e, em seguida, encontramos as frações equivalentes com o novo denominador:

$$\text{mmc}\ (8,6)\ =\ 24\frac{3}{8}=\frac{5}{6}=\frac{9}{24}=\frac{20}{24}$$

$$24:\ 8\cdot 3\ =\ 9$$
$$24:\ 6\cdot 5\ =\ 20$$

Devemos proceder, agora, como no primeiro caso, simplificando o resultado, quando possível:

$$\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\frac{29}{24}$$

Portanto: $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\frac{29}{24}$

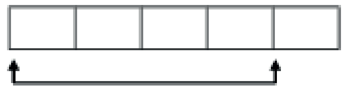
#FicaDica

Na adição e subtração de duas ou mais frações que têm os denominadores diferentes, reduzimos inicialmente as frações ao menor denominador comum, após o que procedemos como no primeiro caso.

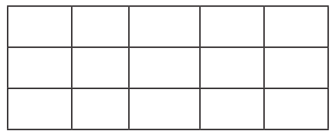
Multiplicação

Ex:

De uma caixa de frutas, $\frac{4}{5}$ são bananas. Do total de bananas, $\frac{2}{3}$ estão estragadas. Qual é a fração de frutas da caixa que estão estragadas?



Representa 4/5 do conteúdo da caixa



Representa 2/3 de 4/5 do conteúdo da caixa.

Repare que o problema proposto consiste em calcular o valor de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ que, de acordo com a figura, equivale a $\frac{8}{15}$ do total de frutas. De acordo com a tabela acima, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ equivale a $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. Assim sendo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

Ou seja:

$$\frac{2}{3}\ \text{de}\ \frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

O produto de duas ou mais frações é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas.

Outro exemplo: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{2\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 9}=\frac{56}{135}$

#FicaDica

Sempre que possível, antes de efetuar a multiplicação, podemos simplificar as frações entre si, dividindo os numeradores e os denominadores por um fator comum. Esse processo de simplificação recebe o nome de cancelamento.

$$\frac{2}{\cancel{3}^{1}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{5}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}^{5}}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 5\cdot 5}=\frac{12}{25}$$

Divisão

Duas frações são inversas ou recíprocas quando o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa.

Exemplo

$\frac{2}{3}$ é a fração inversa de $\frac{3}{2}$

5 ou $\frac{5}{1}$ é a fração inversa de $\frac{1}{5}$

Considere a seguinte situação:

Lúcia recebeu de seu pai os $\frac{4}{5}$ dos chocolates contidos em uma caixa. Do total de chocolates recebidos, Lúcia deu a terça parte para o seu namorado. Que fração dos chocolates contidos na caixa recebeu o namorado de Lúcia?

A solução do problema consiste em dividir o total de chocolates que Lúcia recebeu de seu pai por 3, ou seja, $\frac{4}{5}:3$

Por outro lado, dividir algo por 3 significa calcular $\frac{1}{3}$ desse algo.

Portanto: $\frac{4}{5}:3 = \frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}$

Como $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$, resulta que $\frac{4}{5}:3 = \frac{4}{5}:\frac{3}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$

Observando que as frações $\frac{3}{1}$ e $\frac{1}{3}$ são frações inversas, podemos afirmar que:

Para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Portanto $\frac{4}{5}:3 = \frac{4}{5}:\frac{3}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

Ou seja, o namorado de Lúcia recebeu $\frac{4}{15}$ do total de chocolates contidos na caixa.

Outro exemplo: $\frac{4}{3}:\frac{8}{5} = \frac{4^1}{3} \cdot \frac{5}{8^2} = \frac{5}{6}$

Observação:

Note a expressão: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}}$. Ela é equivalente à expressão $\frac{3}{2}:\frac{1}{5}$

Portanto $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}:\frac{1}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{2}$

Números Decimais

De maneira direta, números decimais são números que possuem vírgula. Alguns exemplos: 1,47; 2,1; 4,9587; 0,004; etc.

Operações com Números Decimais

Adição e Subtração

Vamos calcular o valor da seguinte soma:

$5{,}32 + 12{,}5 + 0{,}034$

Transformaremos, inicialmente, os números decimais em frações decimais:

$$5{,}32 + 12{,}5 + 0{,}034 = \frac{352}{100} + \frac{125}{10} + \frac{34}{1000} = \frac{5320}{1000} + \frac{12500}{1000} + \frac{34}{1000} = \frac{17854}{1000} = 17{,}854$$

Portanto: $5{,}32 + 12{,}5 + 0,034 = 17,854$

Na prática, a adição e a subtração de números decimais são obtidas de acordo com a seguinte regra:
- Igualamos o número de casas decimais, acrescentando zeros.
- Colocamos os números um abaixo do outro, deixando vírgula embaixo de vírgula.
- Somamos ou subtraímos os números decimais como se eles fossem números naturais.
- Na resposta colocamos a vírgula alinhada com a vírgula dos números dados.

Exemplo

2,35 + 14,3 + 0, 0075 + 5

Disposição prática:

$$
\begin{array}{r}
2{,}3500 \\
14{,}3000 \\
+\ \ 0{,}0075 \\
\underline{5{,}0000} \\
21{,}6575
\end{array}
$$

Multiplicação

Vamos calcular o valor do seguinte produto: $2{,}58 \cdot 3{,}4$.
Transformaremos, inicialmente, os números decimais em frações decimais:

$$2{,}58 \cdot 3{,}4 = \frac{258}{100} \cdot \frac{34}{100} = \frac{8772}{1000} = 8{,}772$$

Portanto $2{,}58 \cdot 3{,}4 = 8{,}772$

#FicaDica

Na prática, a multiplicação de números decimais é obtida de acordo com as seguintes regras:
- Multiplicamos os números decimais como se eles fossem números naturais.
- No resultado, colocamos tantas casas decimais quantas forem as do primeiro fator somadas às do segundo fator.

Exemplo:
Disposição prática:

$$
\begin{array}{rll}
652{,}2 & \rightarrow & \text{1 casa decimal} \\
\underline{\text{X}\quad 2{,}03} & \rightarrow & \text{2 casas decimais} \\
19\ 566 & & \\
\underline{1\ 304\ 4} & & \\
1\ 323{,}966 & \rightarrow & 1 + 2 = 3 \text{ casas decimais}
\end{array}
$$

MATEMÁTICA

Divisão

Numa divisão em que:

D é o dividendo
d é o divisor
q é o quociente
r é o resto

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow D = q.d + r$$

Na divisão, sempre teremos r<d

Vamos, por exemplo, efetuar a seguinte divisão: $24 : 0{,}5$

Inicialmente, multiplicaremos o dividendo e o divisor da divisão dada por 10.

$$24 : 0{,}5 = (24 \cdot 10) : (0{,}5 \cdot 10) = 240 : 5$$

A vantagem de tal procedimento foi a de transformarmos em número natural o número decimal que aparecia na divisão. Com isso, a divisão entre números decimais se transforma numa equivalente com números naturais.

Portanto: $24 : 0{,}5 = 240 : 5 = 48$

#FicaDica

Na prática, a divisão entre números decimais é obtida de acordo com as seguintes regras:
- Igualamos o número de casas decimais do dividendo e do divisor.
- Cortamos as vírgulas e efetuamos a divisão como se os números fossem naturais.

Ex: $24 : 0{,}5$

Disposição prática:

$$\begin{array}{r|l} 24{,}\mathbf{0} & 0{,}5 \\ \hline 40 & 48 \\ 0 & \end{array}$$

Nesse caso, o resto da divisão é igual à zero. Assim sendo, a divisão é chamada de divisão exata e o quociente é exato.

Ex: $9{,}775 : 4{,}25$

Disposição prática:

$$\begin{array}{r|l} 9{,}775 & 4{,}25\mathbf{0} \\ \hline 1275 & 2 \end{array}$$

Nesse caso, o resto da divisão é diferente de zero. Assim sendo, a divisão é chamada de divisão aproximada e o quociente é aproximado.

Se quisermos continuar uma divisão aproximada, devemos acrescentar zeros aos restos e prosseguir dividindo cada número obtido pelo divisor. Ao mesmo tempo em que colocamos o primeiro zero no primeiro resto, colocamos uma vírgula no quociente.

9,775 | 4,250

12750   2,

Acrescentamos um zero ao primeiro

9,775 | 4,250

12750   2,3

0

Colocamos uma vírgula no quociente

Ex: $0{,}14 : 28$

0,14000 | 28,00

0000   0,005

Ex: $2 : 16$

20 | 16

40   0,125

80

0

Representação Decimal das Frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$ tal que não seja múltiplo de . Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{35}{4} = 8{,}75$$

$$\frac{153}{50} = 3{,}06$$

2º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{1}{22} = 0{,}04545\ldots$$

$$\frac{167}{66} = 2{,}53030\ldots$$

FIQUE ATENTO!

Se após as vírgulas os algarismos não são periódicos, então esse número decimal não está contido no conjunto dos números racionais.

Representação Fracionária dos Números Decimais

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

1º) Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:

$$0{,}9 = \frac{9}{10}$$

$$5{,}7 = \frac{57}{10}$$

$$0{,}76 = \frac{76}{100}$$

$$3{,}48 = \frac{348}{100}$$

$$0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

2º) Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

Ex:
Seja a dízima 0,333...

Façamos e multipliquemos ambos os membros por 10:

$10x = 0{,}333$

Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade da segunda:

$10x - x = 3{,}333\ldots - 0{,}333\ldots \qquad 9x = 3 \qquad x = \frac{3}{9}$

Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

Ex:
Seja a dízima 5,1717...

Façamos $x = 5{,}1717\ldots$ e $100x = 517{,}1717\ldots$
Subtraindo membro a membro, temos:

$99x = 512 \qquad x = 512/99$

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.

Ex:

Seja a dízima 1,23434...

Façamos $x = 1{,}23434\ldots$; $10x = 12{,}3434\ldots$; $1000x = 1234{,}34$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$990x = 1234{,}34\ldots - 12{,}34\ldots \qquad 990x = 1222 \qquad x = \frac{1222}{990}$$

Simplificando, obtemos $x = \frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1,23434...

Analisando todos os exemplos, nota-se que a idéia consiste em deixar após a vírgula somente a parte periódica (que se repete) de cada igualdade para, após a subtração membro a membro, ambas se cancelarem.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (EBSERH – Médico – IBFC/2016) Mara leu 1/5 das páginas de um livro numa semana. Na segunda semana, leu mais 2/3 de páginas. Se ainda faltam ler 60 (sessenta) páginas do livro, então o total de páginas do livro é de:

a) 300
b) 360
c) 400
d) 450
e) 480

Resposta: Letra D.
Mara leu $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3+10}{15} = \frac{13}{15}$ do livro. Logo, ainda falta $1 - \frac{13}{15} = \frac{15-13}{15} = \frac{2}{15}$ para ser lido. Essa fração que falta ser lida equivale a 60 páginas

Assim: $\frac{2}{15}$ $\rightarrow$ **60 páginas. Portanto,** $\frac{1}{15}$ $\rightarrow$ **30 páginas.**

Logo o livro todo (15/15) possui: 15·30=450 **páginas**

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM; MÁXIMO DIVISOR COMUM.

O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum são ferramentas extremamente importantes na matemática. Através deles, podemos resolver alguns problemas simples, além de utilizar seus conceitos em outros temas, como frações, simplicação de fatoriais, etc.

Porém, antes de iniciarmos a apresentar esta teoria, é importante conhecermos primeiramente uma classe de números muito importante: Os números primos.

Números primos

Um número natural é definido como primo se ele tem exatamente dois divisores: o número um e ele mesmo. Já nos inteiros, $p \in \mathbb{Z}$ é um primo se ele tem exatamente quatro divisores: ± 1 e $\pm p$.

FIQUE ATENTO!
Por definição, 0, 1 e − 1 não são números primos.

Existem infinitos números primos, como demonstrado por Euclides por volta de 300 a.C.. A propriedade de ser um primo é chamada “primalidade”, e a palavra “primo” também são utilizadas como substantivo ou adjetivo. Como “dois” é o único número primo par, o termo “primo ímpar” refere-se a todo primo maior do que dois.

O conceito de número primo é muito importante na teoria dos números. Um dos resultados da teoria dos números é o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única (desconsiderando a ordem) como um produto de números primos (chamados fatores primos): este processo se chama decomposição em fatores primos (fatoração). É exatamente este conceito que utilizaremos no MDC e MMC. Para caráter de memorização, seguem os 100 primeiros números primos positivos. Recomenda-se que memorizem ao menos os 10 primeiros para MDC e MMC:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 , 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541

Múltiplos e Divisores

Diz-se que um número natural *a* é múltiplo de outro natural *b*, se existe um número natural *k* tal que:

$$a = k.b$$

Ex. 15 é múltiplo de 5, pois 15=3 x 5

Quando *a=k.b*, segue que a é múltiplo de b, mas também, *a* é múltiplo de *k*, como é o caso do número 35 que é múltiplo de 5 e de 7, pois: 35 = 7 *x* 5.
Quando *a* = *k.b*, então a é múltiplo de *b* e se conhecemos *b* e queremos obter todos os seus múltiplos, basta fazer *k* assumir todos os números naturais possíveis.

Ex. Para obter os múltiplos de dois, isto é, os números da forma *a* = *k x 2, k* seria substituído por todos os números naturais possíveis.

FIQUE ATENTO!
Um número b é sempre múltiplo dele mesmo.
a = 1 x b ↔ a = b.

A definição de divisor está relacionada com a de múltiplo.

Um número natural *b* é divisor do número natural *a*, se *a* é múltiplo de *b*.

Ex. 3 é divisor de 15, pois , logo 15 é múltiplo de 3 e também é múltiplo de 5.

#FicaDica

Um número natural tem uma quantidade finita de divisores. Por exemplo, o número 6 poderá ter no máximo 6 divisores, pois trabalhando no conjunto dos números naturais não podemos dividir 6 por um número maior do que ele. Os divisores naturais de 6 são os números 1, 2, 3, 6, o que significa que o número 6 tem 4 divisores.

MDC

Agora que sabemos o que são números primos, múltiplos e divisores, vamos ao MDC. O máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Ex. Encontrar o MDC entre 18 e 24.

Divisores naturais de 18: D(18) = {1,2,3,6,9,18}.

Divisores naturais de 24: D(24) = {1,2,3,4,6,8,12,24}.

Pode-se escrever, agora, os divisores comuns a 18 e 24: D(18)∩ D (24) = {1,2,3,6}.

Observando os divisores comuns, podemos identificar o maior divisor comum dos números 18 e 24, ou seja: MDC (18,24) = 6.

Outra técnica para o cálculo do MDC:

Decomposição em fatores primos: Para obter o MDC de dois ou mais números por esse processo, procede-se da seguinte maneira:

Decompõe-se cada número dado em fatores primos.
O MDC é o produto dos fatores comuns obtidos, cada um deles elevado ao seu menor expoente.

Exemplo: Achar o MDC entre 300 e 504.

Fatorando os dois números:

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Temos que:

$300 = 2^2.3.5^2$
$504 = 2^3.3^2.7$

MATEMÁTICA

O MDC será os fatores comuns com seus menores expoentes:

mdc (300,504)= $2^2.3$ = 4 .3=12

MMC

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Consideremos:

Ex. Encontrar o MMC entre 8 e 6
Múltiplos positivos de 6: M(6) = {6,12,18,24,30,36,42,48,54,...}

Múltiplos positivos de 8: M(8) = {8,16,24,32,40,48,56,64,...}

Podem-se escrever, agora, os múltiplos positivos comuns: M(6)∩M(8) = {24,48,72,...}

Observando os múltiplos comuns, pode-se identificar o mínimo múltiplo comum dos números 6 e 8, ou seja:

Outra técnica para o cálculo do MMC:

Decomposição isolada em fatores primos: Para obter o MMC de dois ou mais números por esse processo, procedemos da seguinte maneira:

- Decompomos cada número dado em fatores primos.
- O MMC é o produto dos fatores comuns e não-comuns, cada um deles elevado ao seu maior expoente.

Ex. Achar o MMC entre 18 e 120.

Fatorando os números:

18	2
9	3
3	3
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Temos que:

18 = 2 .3^2
120 = 2^3.3 .5

O MMC será os fatores comuns com seus maiores expoentes:

mmc (18,120) = 23.32.5 = 8 .9 .5 = 360

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (FEPESE-2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

a) 8
b) 10
c) 12
d) 15
e) 24

Resposta: Letra C. O período em que João trabalha e folga corresponde a 6 dias enquanto o mesmo período, para Maria, corresponde a 4 dias. Assim, o problema consiste em encontrar o mmc entre 6 e 4. Logo, eles folgarão no mesmo dia novamente após 12 dias pois mmc(6,4)=12.

PORCENTAGEM.

Definição

A definição de porcentagem passa pelo seu próprio nome, pois é uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo% e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{50}{100}$ ou qualquer uma equivalente a ela é uma porcentagem que podemos representar por 50%.

A porcentagem nada mais é do que uma razão, que representa uma "parte" e um "todo" a qual referimos como 100%. Assim, de uma maneira geral, temos que:

$$A = \frac{p}{100}.V$$

Onde A, é a parte, p é o valor da porcentagem e V é o todo (100%). Assim, os problemas básicos de porcentagem se resumem a três tipos:

Cálculo da parte (Conheço p e V e quero achar A): Para calcularmos uma porcentagem de um valor V, basta multiplicarmos a fração correspondente, ou seja, $\frac{p}{100}$ por V. Assim:

P% de V =A= $\frac{p}{100}$ .V

Ex. 23% de 240 = $\frac{23}{100}$ .240 = 55,2

Ex. Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Aqui, queremos saber a "parte" da população que assiste ao programa de TV, como temos a porcentagem e o total, basta realizarmos a multiplicação:

67% de $56000 = A = \frac{67}{100}\ 56000 = 37520$

Resp. 37 520 pessoas.

Cálculo da porcentagem (conheço A e V e quero achar p): Utilizaremos a mesma relação para achar o valor de p e apenas precisamos rearranjar a mesma:

$$A = \frac{p}{100}.V \ \rightarrow p = \frac{A}{V}.100$$

Ex. Um time de basquete venceu 10 de seus 16 jogos. Qual foi sua porcentagem de vitórias?

Neste caso, o exercício quer saber qual a porcentagem de vitórias que esse time obteve, assim:

$$p = \frac{A}{V}.100 = \frac{10}{16}.100 = 62{,}5\%$$

Resp: O time venceu 62,5% de seus jogos.

Ex. Em uma prova de concurso, o candidato acertou 48 de 80 questões. Se para ser aprovado é necessário acertar 55% das questões, o candidato foi ou não foi aprovado?

Para sabermos se o candidato passou, é necessário calcular sua porcentagem de acertos:

$$p = \frac{A}{V}.100 = \frac{48}{80}.100 = 60\% > 55\%$$

Logo, o candidato foi aprovado.

Calculo do todo (conheço p e A e quero achar V): No terceiro caso, temos interesse em achar o total (Nosso 100%) e para isso basta rearranjar a equação novamente:

$$A = \frac{p}{100}.V \ \rightarrow p = \frac{A}{V}.100 \rightarrow V = \frac{A}{p}.100$$

Ex. Um atirador tem taxa de acerto de 75% de seus tiros ao alvo. Se em um treinamento ele acertou 15 tiros, quantos tiros ele deu no total?

Neste caso, o problema gostaria de saber quanto vale o "todo", assim:

$$V = \frac{A}{p}.100 = \frac{15}{75}.100 = 0{,}2.100 = 20\ tiros$$

Forma Decimal: Outra forma de representação de porcentagens é através de números decimais, pois todos eles pertencem à mesma classe de números, que são os números racionais. Assim, para cada porcentagem, há um numero decimal equivalente. Por exemplo, 35% na forma decimal seriam representados por 0,35. A conversão é muito simples: basta fazer a divisão por 100 que está representada na forma de fração:

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Aumento e desconto percentual

Outra classe de problemas bem comuns sobre porcentagem está relacionada ao aumento e a redução percentual de um determinado valor. Usaremos as definições apresentadas anteriormente para mostrar a teoria envolvida

Aumento Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um aumento de de seu valor. Chamemos de V_A o valor após o aumento. Assim:

$$V_A = V + \frac{p}{100}.V$$

Fatorando:

$$V_A = \left(1 + \frac{p}{100}\right).V$$

Em que $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ será definido como fator de aumento, que pode estar representado tanto na forma de fração ou decimal.

Desconto Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um desconto de p% de seu valor. Chamemos de V_D o valor após o desconto.

$$V_D = V - \frac{p}{100}.V$$

Fatorando:

$$V_D = \left(1 - \frac{p}{100}\right).V$$

Em que $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ será definido como fator de desconto, que pode estar representado tanto na forma de fração ou decimal.

Ex. Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

Neste caso, o problema deu o valor de e gostaria de saber o valor de V, assim:

$$V_A = \left(1 + \frac{p}{100}\right).V$$

$$3500 = \left(1 + \frac{40}{100}\right).V$$

$$3500 = (1+0{,}4).V$$

$$3500 = 1{,}4.V$$

$$V = \frac{3500}{1{,}4} = 2500$$

Resp. R$ 2 500,00

Ex. Uma loja entra em liquidação e pretende abaixar em 20% o valor de seus produtos. Se o preço de um deles é de R$ 250,00, qual será seu preço na liquidação?

Aqui, basta calcular o valor de V_D:

$$V_D = \left(1 - \frac{p}{100}\right).V$$

$$V_D = \left(1 - \frac{20}{100}\right).250{,}00$$

$$V_D = (1 - 0{,}2).250{,}00$$

$V_D = (0,8).250,00$

$V_D = 200,00$
Resp. R$ 200,00

FIQUE ATENTO!
Em alguns problemas de porcentagem são necessários cálculos sucessivos de aumentos ou descontos percentuais. Nesses casos é necessário ter atenção ao problema, pois erros costumeiros ocorrem quando se calcula a porcentagens do valor inicial para obter todos os valores finais com descontos ou aumentos. Na verdade, esse cálculo só pode ser feito quando o problema diz que TODOS os descontos ou aumentos são dados a uma porcentagem do valor inicial. Mas em geral, os cálculos são feitos como mostrado no texto a seguir.

Aumentos e Descontos Sucessivos: Consideremos um valor inicial *V*, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de $p_1\%$ e $p_2\%$. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$$V_1 = V.(1 + \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, ou seja, após já ter aumentado uma vez, temos que:

$$V_2 = V_1 .(1 + \frac{p_2}{100})$$

Como temos também uma expressão para V_1, basta substituir:

$$V_2 = V.(1 + \frac{p_1}{100}).(1 + \frac{p_2}{100})$$

Assim, para cada aumento, temos um fator correspondente e basta ir multiplicando os fatores para chegar ao resultado final.

No caso de desconto, temos o mesmo caso, sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de *p*1% e *p*2%.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$$V_1 = V.(1 - \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, ou seja, após já ter descontado uma vez, temos que:

$$V_2 = V\_1 .(1 - \frac{p_2}{100})$$

Como temos também uma expressão para , basta substituir:

$$V_2 = V.(1 - \frac{p_1}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$$

Além disso, essa formulação também funciona para aumentos e descontos em sequência, bastando apenas a identificação dos seus fatores multiplicativos. Sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de $p_1\%$ e, sucessivamente, um desconto de $p_2\%$.

Sendo V_1 o valor após o aumento, temos:

$$V_1 = V.(1 + \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos que:

$$V_2 = V\_1 .(1 - \frac{p_2}{100})$$

Como temos uma expressão para , basta substituir:

$$V_2 = V.(1 + \frac{p_1}{100}).(1 - \frac{p_2}{100})$$

Ex. Um produto sofreu um aumento de 20% e depois sofreu uma redução de 20%. Isso significa que ele voltará ao seu valor original.

( ) Certo ( ) Errado

Este problema clássico tem como finalidade conceituar esta parte de aumento e redução percentual e evitar o erro do leitor ao achar que aumentando p% e diminuindo p%, volta-se ao valor original. Se usarmos o que aprendemos, temos que:

$$V_2 = V.\underbrace{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)}_{Aumento}.\underbrace{\left(1 - \frac{p_2}{100}\right)}_{redução}$$

$$V_2 = V.(1 + \frac{20}{100}).(1 - \frac{20}{100})$$

$$V_2 = V.(1+0,2).(1 - 0,2)$$

$$V_2 = V.(1,2).(0,8)$$

$$V_2 = 0,96.V = \frac{96}{100} V = 96\% \text{ de } V$$

Ou seja, o valor final corresponde a 96% de V e não 100%, assim, eles não são iguais, portanto deve-se assinalar a opção ERRADO

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (UNESP) Suponhamos que, para uma dada eleição, uma cidade tivesse 18.500 eleitores inscritos. Suponhamos ainda que, para essa eleição, no caso de se verificar um índice de abstenções de 6% entre os homens e de 9% entre as mulheres, o número de votantes do sexo masculino será exatamente igual ao número de votantes do sexo feminino. Determine o número de eleitores de cada sexo.

Resposta: Denotamos o número de eleitores do sexo femininos de F e de votantes masculinos de M. Pelo enunciado do exercícios, F+M = 18500. Além disso, o **índice de abstenções entre os homens foi de 6% e de 9% entre as mulheres, ou seja, 94% dos homens** e 91% das mulheres compareceram a votação, onde 94%M =

91%F ou 0,94M = 0,91F. Assim, para determinar o número de eleitores de cada sexo temos os seguinte sistema para resolver:

$$\begin{cases} F + M = 18500 \\ 0{,}94M = 0{,}91F \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que $M = \frac{0{,}91}{0{,}94}F$. Agora, substituindo M na primeira equação do sistema encontra-se F = 9400 e por fim determina-se M = 9100.

RAZÃO E PROPORÇÃO.

Razão

Quando se utiliza a matemática na resolução de problemas, os números precisam ser relacionados para se obter uma resposta. Uma das maneiras de se relacionar os números é através da razão. Sejam dois números reais *a* e *b*, com *b ≠ 0*, define-se razão entre *a* e *b* (nessa ordem) o quociente a ÷ b, ou $\frac{a}{b}$.

A razão basicamente é uma fração, e como sabem, frações são números racionais. Entretanto, a leitura deste número é diferente, justamente para diferenciarmos quando estamos falando de fração ou de razão.

a) Quando temos o número $\frac{3}{5}$ e estamos tratando de fração, lê-se: "três quintos".

b) Quando temos o número $\frac{3}{5}$ e estamos tratando de razão, lê-se: "3 para 5".

Além disso, a nomenclatura dos termos também é diferente:

O número 3 é **numerador**

a) Na fração $\frac{3}{5}$

O número 5 é **denominador**

O número 3 é **antecedente**

b) Na razão $\frac{3}{5}$

O número 5 é **consequente**

Ex. A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ já a razão entre 50 e 20 é $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$. Ou seja, deve-se sempre indicar o antecedente e o consequente para sabermos qual a ordem de montarmos a razão.

Ex.Numa classe de 36 alunos há 15 rapazes e 21 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{15}{21}$, se simplificarmos, temos que a fração equivalente $\frac{5}{7}$, o que significa que para "cada 5 rapazes há 7 moças". Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$, o que equivale a dizer que "de cada 12 alunos na classe, 5 são rapazes".

Razão entre grandezas de mesma espécie: A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Ex. Um automóvel necessita percorrer uma estrada de 360 km. Se ele já percorreu 240 km, qual a razão entre a distância percorrida em relação ao total?

Como os dois números são da mesma espécie (distância) e estão na mesma unidade (km), basta fazer a razão:

$$r = \frac{240\ km}{360\ km} = \frac{2}{3}$$

No caso de mesma espécie, porém em unidades diferentes, deve-se escolher uma das unidades e converter a outra.

Ex. Uma maratona possui aproximadamente 42 km de extensão. Um corredor percorreu 36000 metros. Qual a razão entre o que falta para percorrer em relação à extensão da prova?

Veja que agora estamos tentando relacionar metros com quilômetros. Para isso, deve-se converter uma das unidades, vamos utilizar "km":

36000 m=36 km

Como é pedida a razão entre o que falta em relação ao total, temos que:

$$r = \frac{42\ km - 36\ km}{42\ km} = \frac{6\ km}{42\ km} = \frac{1}{7}$$

Ex. Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a razão entre o comprimento representado no desenho e o comprimento real?

Convertendo o comprimento real para cm, temos que:

$$e = \frac{20\ cm}{800\ cm} = \frac{1}{40}$$

#FicaDica

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se escala

Razão entre grandezas de espécies diferentes: É possível também relacionar espécies diferentes e isto está normalmente relacionado a unidades utilizadas na física:

Ex. Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170. Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no translado?

Para montarmos a razão, precisamos obter as informações:

Distância percorrida: 170 km – 30 km = 140 km
Tempo gasto: 11h – 9h = 2h
Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$v = \frac{140\ km}{2\ h} = \frac{70}{1} = 70\ km/h$$

Como são duas espécies diferentes, a razão entre elas será uma espécie totalmente diferente das outras duas.

#FicaDica

A razão entre uma distância e uma medida de tempo é chamada de velocidade.

Ex. A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km^2 e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995. Qual a razão entre o número de habitantes e a área total?

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km^2 (hab./km^2):

$$d = \frac{66288000\ hab}{927286\ km^2} = 71{,}5 \frac{hab}{km^2}$$

#FicaDica

A razão entre o número de habitantes e a área deste local é denominada densidade demográfica.

Ex. Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$c = \frac{83{,}76\ km}{8\ l} = 10{,}47 \frac{km}{l}$$

#FicaDica

A razão entre a distância percorrida em relação a uma quantidade de combustível é definida como "consumo médio"

Proporção

A definição de proporção é muito simples, pois se trata apenas da igualdade de razões.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 está para 5 assim como 6 está para 10").
Observemos que o produto 3 x 10=30 é igual ao produto 5 x 6=30, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções

#FicaDica

Se multiplicarmos em cruz (ou em x), teremos que os produtos entre o numeradores e os denominadores da outra razão serão iguais.

Ex. Na igualdade $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos 2 x 9=3 x 6=18, logo, temos uma proporção.

Ex. Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 7 gotas para cada 3 kg do "peso" da criança. Se uma criança tem 15 kg, qual será a dosagem correta?
Como temos que seguir a receita, temos que atender a proporção, assim, chamaremos de x a quantidade de gotas a serem ministradas:

$$\frac{7\ gotas}{3\ kg} = \frac{x\ gotas}{15\ kg}$$

Logo, para atendermos a proporção, precisaremos encontrar qual o número que atenderá a proporção. Multiplicando em cruz, temos que:

3x=105

$$x = \frac{105}{3}$$

x=35 gotas

Ou seja, para uma criança de 30 kg, deve-se ministrar 35 gotas do remédio, atendendo a proporção.

Outro jeito de ver a proporção: Já vimos que uma proporção é verdadeira quando realizamos a multiplicação em cruz e encontramos o mesmo valor nos dois produtos. Outra maneira de verificar a proporção é verificar se a duas razões que estão sendo igualadas são frações equivalentes. Lembra deste conceito?

FIQUE ATENTO!
Uma fração é equivalente a outra quando podemos multiplicar (ou dividir) o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, chegando ao numerador e denominador da outra fração.

Ex. $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ são frações equivalentes, pois:

4x=12 →x=3
3x=9 →x=3

Ou seja, o numerador e o denominador de $\frac{4}{3}$ quando multiplicados pelo mesmo número (3), chega ao numerador e denominador da outra fração, logo, elas são equivalentes e consequentemente, proporcionais.

Agora vamos apresentar algumas propriedades da proporção:

a) Soma dos termos: Quando duas razões são proporcionais, podemos criar outra proporção somando os numeradores com os denominadores e dividindo pelos numeradores (ou denominadores) das razões originais:

$$\frac{5}{2}=\frac{10}{4} \rightarrow \frac{5+2}{5}=\frac{10+4}{10} \rightarrow \frac{7}{5}=\frac{14}{10}$$

ou

$$\frac{5}{2}=\frac{10}{4} \rightarrow \frac{5+2}{2}=\frac{10+4}{4} \rightarrow \frac{7}{2}=\frac{14}{4}$$

b) Diferença dos termos: Analogamente a soma, temos também que se realizarmos a diferença entre os termos, também chegaremos em outras proporções:

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6} \rightarrow \frac{4-3}{4}=\frac{8-6}{8} \rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

ou

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6} \rightarrow \frac{4-3}{3}=\frac{8-6}{6} \rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

c) Soma dos antecedentes e consequentes: A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente:

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{12+3}{8+2}=\frac{15}{10}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

d) Diferença dos antecedentes e consequentes: A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente:

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{12-3}{8-2}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

FIQUE ATENTO!

Usamos razão para fazer comparação entre duas grandezas. Assim, quando dividimos uma grandeza pela outra estamos comparando a primeira com a segunda. Enquanto proporção é a igualdade entre duas razões.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. O estado de Tocantins ocupa uma área aproximada de 278.500 km². De acordo com o Censo/2000 o Tocantins tinha uma população de aproximadamente 1.156.000 habitantes. Qual é a densidade demográfica do estado de Tocantins?

Resposta : A densidade demográfica é definida como a razão entre o número de habitantes e a área ocupada:

$$d=\frac{1\ 156\ 000 \text{ hab.}}{278\ 500 \text{ km}^2}=4{,}15 \text{ hab/km}^2$$

2. Se a área de um retângulo (A_1) mede 300 cm² e a área de um outro retângulo (A_2) mede 100 cm², qual é o valor da razão entre as áreas (A_1) e (A_2)?

Resposta :
Ao fazermos a razão das áreas, temos:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{300}{100}=3$$

Então, isso significa que a área do retângulo 1 é 3 vezes maior que a área do retângulo 2.

3.(CELESC – Assistente Administrativo – FEPESE/2016) Dois amigos decidem fazer um investimento conjunto por um prazo determinado. Um investe R$ 9.000 e o outro R$ 16.000. Ao final do prazo estipulado obtêm um lucro de R$ 2.222 e decidem dividir o lucro de maneira proporcional ao investimento inicial de cada um. Portanto o amigo que investiu a menor quantia obtém com o investimento um lucro:

a) Maior que R$ 810,00
b) Maior que R$ 805,00 e menor que R$ 810,00
c) Maior que R$ 800,00 e menor que R$ 805,00
d) Maior que R$ 795,00 e menor que R$ 800,00
e) Menor que R$ 795,00

Resposta : Letra D. Ambos aplicaram R$ 9000,00+R$ 16000,00=R$ 25000,00 e o lucro de R$ 2222,00 foi sobre este valor. Assim, constrói-se uma proporção entre o valor aplicado (neste caso, R$ 9000,00 , pois o exercício quer o lucro de quem aplicou menos) e seu respectivo lucro:

$$\frac{9000}{x}=\frac{25000}{2222} \rightarrow 25x=19998 \rightarrow x=\text{R\$ } 799{,}92$$

REGRA DE TRÊS SIMPLES OU COMPOSTA.

Os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos através de um processo prático, chamado **regra de três simples**.

Ex: Um carro faz 180 km com 15L de álcool. Quantos litros de álcool esse carro gastaria para percorrer 210 km?

Solução:

O problema envolve duas grandezas: distância e litros de álcool.

Indiquemos por x o número de litros de álcool a ser consumido.

Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x

Na coluna em que aparece a variável x ("litros de álcool"), vamos colocar uma flecha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x

Observe que, se duplicarmos a distância, o consumo de álcool também duplica. Então, as grandezas **distância** e **litros de álcool** são **diretamente proporcionais**. No esquema que estamos montando, indicamos esse fato colocando uma flecha na coluna "distância" no **mesmo sentido** da flecha da coluna "litros de álcool":

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x

mesmo sentido

Armando a proporção pela orientação das flechas, temos:

$$\frac{180^6}{210^7} = \frac{15}{x} \rightarrow 6x = 7 \cdot 15$$

$$\rightarrow 6x = 105$$

$$\rightarrow x = \frac{105}{6}$$

$$\rightarrow x = 17{,}5$$

Resposta: O carro gastaria 17,5 L de álcool.

#FicaDica

Procure manter essa linha de raciocínio nos diversos problemas que envolvem regra de três simples ! Identifique as variáveis, verifique qual é a relação de proporcionalidade e siga este exemplo !

Ex: Viajando de automóvel, à velocidade de 60 km/h, eu gastaria 4 h para fazer certo percurso. Aumentando a velocidade para 80 km/h, em quanto tempo farei esse percurso?

Solução: Indicando por x o número de horas e colocando as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha, temos:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

Na coluna em que aparece a variável x ("tempo"), vamos colocar uma flecha:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

Observe que, se duplicarmos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade. Isso significa que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**. No nosso esquema, esse fato é indicado colocando-se na coluna "velocidade" uma flecha em **sentido contrário** ao da flecha da coluna "tempo":

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

sentidos contrários

Na montagem da proporção devemos seguir o sentido das flechas. Assim, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{80^4}{60^3} \rightarrow 4x = 4 \cdot 3$$

$$\rightarrow 4x = 12$$

$$\rightarrow x = \frac{12}{4}$$

$$\rightarrow x = 3$$

Resposta: Farei esse percurso em 3 h.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (CBTU – ASSISTENTE OPERACIONAL – FUMARC/2016) Dona Geralda comprou 4 m de tecido importado a R$ 12,00 o metro linear. No entanto, o metro linear do lojista media 2 cm a mais. A quantia que o lojista deixou de ganhar com a venda do tecido foi:

a) R$ 0,69
b) R$ 0,96
c) R$ 1,08
d) R$ 1,20

Resposta: Letra B. As grandezas (comprimento e preço) são diretamente proporcionais. Assim, a regra de três é direta:

Metros	Preço
1	12
0,02	x

$$1 \cdot x = 0{,}02 \ \cdot \ 12 \rightarrow x = R\$\ 0{,}24$$

Note que foi necessário passar 2 cm para metros, para que as unidades de comprimento fiquei iguais. Assim, cada 2 cm custaram R$ 0,24 para o vendedor. Como ele vendeu 4 m de tecido, esses 2 cm não foram considerados quatro vezes. Assim, ele deixou de ganhar

2. Para se construir um muro de $17m^2$ são necessários 3 trabalhadores. Quantos trabalhadores serão necessários para construir um muro de $51m^2$?

Resposta: 9 trabalhadores.
As grandezas (área e trabalhadores) são diretamente proporcionais. Assim, a regra de três é direta:

Área	N Trabalhadores
17	3
51	x

$$17 \cdot x = 51 \ \cdot \ 3 \rightarrow x = 9 \quad \text{trabalhadores}$$

Regra de Três Composta

O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais, é chamado **regra de três composta**.

Ex: Em 4 dias 8 máquinas produziram 160 peças. Em quanto tempo 6 máquinas iguais às primeiras produziriam 300 dessas peças?
Solução: Indiquemos o número de dias por x. Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma só coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha. Na coluna em que aparece a variável x ("dias"), coloquemos uma flecha:

Máquinas	Peças	Dias
8	160	4
6	300	x

Comparemos cada grandeza com aquela em que está o x.

As grandezas **peças** e **dias** são diretamente proporcionais. No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "peças" uma flecha no **mesmo sentido** da flecha da coluna "dias":

Máquinas	Peças	Dias
8	160	4
6	300	x

Mesmo sentido

As grandezas **máquinas** e **dias** são inversamente proporcionais (duplicando o número de máquinas, o número de dias fica reduzido à metade). No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna (máquinas) uma flecha no sentido contrário ao da flecha da coluna "dias":

Máquinas	Peças	Dias
8	160	4
6	300	x

Sentidos contrários

Agora vamos montar a proporção, igualando a razão que contém o x, que é $\frac{4}{x}$, com o produto das outras razões, obtidas segundo a orientação das flechas $\left(\frac{6}{8} \cdot \frac{160}{300}\right)$:

$$\frac{4}{x} = \frac{6^{2}}{8^{1}} \cdot \frac{\cancel{160}^{8}}{\cancel{300}^{15}}$$
$$\frac{4}{x} = \frac{2}{5}$$
$$\rightarrow 2x = 4 \cdot 5$$
$$\rightarrow \quad x = \frac{(4 \cdot 5)}{2}$$
$$\rightarrow \quad x = 10$$

Resposta: Em 10 dias.

FIQUE ATENTO!
Repare que a regra de três composta, embora tenha formulação próxima à regra de três simples, é conceitualmente distinta devido à presença de mais de duas grandezas proporcionais.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (SEDUC-SP - ANALISTA DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO – VUNESP/2014) Quarenta digitadores preenchem 2 400 formulários de 12 linhas, em 2,5 horas. Para preencher 5 616 formulários de 18 linhas, em 3 horas, e admitindo-se que o ritmo de trabalho dos digitadores seja o mesmo, o número de digitadores necessários será:

a) 105
b) 117
c) 123
d) 131
e) 149

Resposta: Letra B. A tabela com os dados do enunciado fica:

Digitadores	Formulários	Linhas	Horas
40	2400	12	2,5
x	5616	18	3

Comparando-se as grandezas duas a duas, nota-se que:
Digitadores e formulários são diretamente proporcionais, pois se o número de digitadores aumenta, a quantidade de formulários que pode ser digitada também aumenta.
Digitadores e linhas são diretamente proporcionais, pois se a quantidade de digitadores aumenta, o número de linhas que pode ser digitado também aumenta.
Digitadores e horas são inversamente proporcionais, pois se o número de horas trabalhadas aumenta, então são necessários menos digitadores para o serviço e, portanto, a quantidade de digitadores diminui.

A regra de três fica:

$$\frac{40}{x} = \frac{2400}{5616} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{3}{2{,}5}$$
$$\rightarrow \frac{40}{x} = \frac{86400}{252720}$$
$$\rightarrow 86500x = 10108800$$
$$\rightarrow x = 117 \text{ digitadores}$$

2. Em uma fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

Resposta:

Homens	Carrinhos	Dias
8	20	5
4	x	16

Observe que, aumentando o número de homens, a produção de carrinhos aumenta. Portanto a relação é diretamente proporcional (não precisamos inverter a razão).
Aumentando o número de dias, a produção de carrinhos aumenta. Portanto a relação também é diretamente proporcional (não precisamos inverter a razão).
Devemos igualar a razão que contém o termo x com o produto das outras razões.
Montando a proporção e resolvendo a equação, temos:

$$\frac{20}{\pi} = \frac{8}{4} \cdot \frac{5}{16}$$

EQUAÇÕES DO 1.º OU DO 2.º GRAUS; SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU.

Equação do 1º Grau

Uma equação é uma igualdade na qual uma ou mais variáveis, conhecidas por incógnitas, são desconhecidas. Resolver uma equação significa encontrar o valor das incógnitas. Equações do primeiro grau são equações onde há somente uma incógnita a ser encontrada e seu expoente é igual a 1. A forma geral de uma equação do primeiro grau é:

$$ax + b = 0$$

Onde a e b são números reais.

O "lado esquerdo" da equação é denominado 1º membro enquanto o "lado direito" é denominado 2º membro.

#FicaDica

Para resolver uma equação do primeiro grau, costuma-se concentrar todos os termos que contenham incógnitas no 1º membro e todos os termos que contenham somente números no 2º membro.

FIQUE ATENTO!

Há diversas formas de equações do primeiro grau e a seguir serão apresentados alguns deles. Antes, há uma lista de "regras" para a solução de equações do primeiro grau:

Regra 1 – Eliminar os parênteses
Regra 2 – Igualar os denominadores de todos os termos caso haja frações
Regra 3 – Transferir todos os termos que contenham incógnitas para o 1º membro

Regra 4 – Transferir todos os termos que contenham somente números para o 2º membro

Regra 5 – Simplificar as expressões em ambos os membros

Regra 5 – Isolar a incógnita no 1º membro

Exemplo: Resolva a equação $5x - 4 = 2x + 8$

As regras 1 e 2 não se aplicam pois não há parênteses, nem frações. Aplicando a regra 3, transfere-se o termo "2x" para o 1º membro. Para fazer isso, basta colocá-lo no 1º membro com o sinal trocado:

$$5x - 4 - 2x = 8$$

Aplicando a regra 4, transfere-se o termo "-4" para o 2º membro. Para fazer isso, basta colocá-lo no 1º membro com o sinal trocado:

$$5x - 2x = 8 + 4$$

Aplicando a regra 5, simplifica-se as expressões em ambos os membros. Simplificar significa "juntar" todos os termos com incógnitas em um único termo no 1º membro e fazer o mesmo com todos os temos que contenham somente números no 2º membro:

$$3x = 12$$

Aplicando a regra 6, isola-se a incógnita no 1º membro. Para isso, divide-se ambos os lados da equação por 3, fazendo com que no 1º membro reste apenas :

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \rightarrow x = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4 \rightarrow S = \{4\}$$

Exemplo: Resolva a equação $\frac{2x}{3} + 2(x - 4) = x + 1$

Aplicando a regra 1, eliminam-se os parênteses. Para isso, aplica-se a distributiva no termo com parênteses:

$$\frac{2x}{3} + 2x - 8 = x + 1$$

Aplicando a regra 2, igualam-se os denominadores de todos os termos. Nessa equação, o denominador comum é "3":

$$\frac{2x}{3} + \frac{6x}{3} - \frac{24}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{3}{3}$$

Como há o mesmo denominador em todos os termos, eles podem ser "cortados":

$$2x + 6x - 24 = 3x + 3$$

Aplicando a regra 3, transfere-se o termo "3x" para o 1º membro:

$$2x + 6x - 3x - 24 = 3$$

Aplicando a regra 4, transfere-se o termo "-24" para o 2º membro:

$$2x + 6x - 3x = 24 + 3$$

Aplicando a regra 5, simplificam-se as expressões em ambos os membros:

$$5x = 27$$

Por fim, aplicando a regra 6, isola-se a incógnita no 1º membro:

$$x = \frac{27}{5} \rightarrow S = \left\{\frac{27}{5}\right\}$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Calcule:

a) $-3x - 5 = 25$

b) $2x - \frac{1}{2} = 3$

Resposta:

a)
$$-3x - 5 = 25$$
$$\Rightarrow -3x - 5 + 5 = 25 + 5$$
$$\Rightarrow -3x = 30$$
$$\Rightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{30}{-3} \Rightarrow x = -10$$

b)
$$2x - \frac{1}{2} = 3$$
$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2x = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{7}{4}$$
$$\Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

2. Encontre o valor de x que satisfaz a equação

$$3x + 24 = -5x$$

Resposta:

$$3x + 24 = -5x$$
$$\Longrightarrow 3x + 5x + 24 = 0 - 5x + 5x$$
$$\Longrightarrow 8x = -24$$
$$\Longrightarrow x = -3$$

Equação do 2º Grau

Equações do segundo grau são equações nas quais o maior expoente de é igual a 2. Sua forma geral é expressa por:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Onde e são números reais e . Os números a, b e c são chamados **coeficientes** da equação:
- a é sempre o coeficiente do termo em x^2.
- b é sempre o coeficiente do termo em x.
- c é sempre o coeficiente ou termo **independente**.

Equação completa e incompleta

- Quando b $\neq$ e c $\neq$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Exs:

$5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa ($a = 5$, $b = -8$, $c = 3$).
$y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa ($a = 1$, $b = 12$, $c = 20$).

Quando b=0 ou c=0 ou b=c=0, a equação do 2º grau se diz **incompleta**.

Exs:

$x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 1$, $b = 0$ e $c = -81$).
$10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta ($a = 10$, $b = 2$ e $c = 0$).
$5y^2 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$).

Todas essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada forma normal ou forma reduzida de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$; por meio de transformações convenientes, em que aplicamos o princípio aditivo para reduzi-las a essa forma.

Ex:
Dada a equação: $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$, vamos escrevê-la na forma normal ou reduzida.

$$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$$
$$2x^2 + x^2 - 7x + 4 - 1 = 0$$
$$3x^2 - 7x + 3 = 0$$

Resolução de Equações do 2º Grau: Fórmula de Bháskara

Para encontras as soluções de equações do segundo grau, é necessário conhecer seu discriminante, representado pela letra grega Δ (delta).

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

FIQUE ATENTO!
O discriminante fornece importantes informações de uma equação do 2ª grau:

Se $\Delta > 0 \rightarrow$ A equação possui duas raízes reais e
Se $\Delta = 0 \rightarrow$ A equação possui duas raízes reais e
Se $\Delta < 0 \rightarrow$ A equação não possui raízes reais

A solução é dada pela Fórmula de Bháskara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{\cdot 2a}$, válida para os casos onde $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$

#FicaDica

Para utilizar a Fórmula de Bháskara a equação deve estar obrigatoriamente no formato $ax^2 + bx + c = 0$. Caso não esteja, é necessário colocar a equação nesse formato para, em seguida, aplicar a fórmula!

Quando b=0 diz-se que as raízes das equações são simétricas.

As regras para solução de uma equação do 2º grau são as seguintes:
Regra 1 – Identificar os números e
Regra 2 – Calcular o discriminante
Regra 3 – Caso o discriminante não seja negativo, utilizar a Fórmula de Bháskara

Exemplo: Resolva a equação
Aplicando a regra 1, identifica-se: , e
Aplicando a regra 2, calcula-se o discriminante:

Como o discriminante não é negativo, aplica-se a regra 3, que consiste em utilizar a fórmula de Bháskara:

Assim,

Exemplo: Resolva a equação $x^2 - x - 6 = 0$
Aplicando a regra 1, identifica-se: a=1, b=-1 e c=-6
Aplicando a regra 2, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

Como o discriminante não é negativo, aplica-se a regra 3, que consiste em utilizar a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Assim, S= {2}

Note que, como o discriminante é nulo, a equação possui duas raízes reais e idênticas iguais a 2.

Exemplo: Resolva a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$

Aplicando a regra 1, identifica-se: a=1, b=2 e c=3

Aplicando a regra 2, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

Como o discriminante é negativo, a equação não possui raízes reais.

Assim, S= $\emptyset$ (solução vazia).

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Determine os valores de x que satisfazem:

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

Resposta:

$$x' = 1 - \sqrt{6} \text{ e } x'' = 1 + \sqrt{6}.$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 = 4 + 20 = 24$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}$$

Assim, as raízes x' e x'' são:

$$x' = 1 - \sqrt{6} \text{ e } x'' = 1 + \sqrt{6}$$

2. Determine os valores de x que satisfazem:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Resposta: Não existe solução em R.

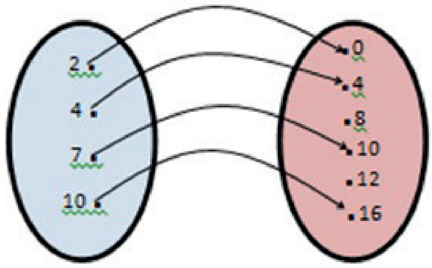
Função do 1° Grau

Conceitos Fundamentais sobre Funções

Uma função é uma relação entre dois conjuntos A e B de modo que cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento de B. Sua representação matemática é bem simples:

y=f(x):A→B

Onde y são os elementos do conjunto B e x são os elementos do conjunto A. f(x) é a chamada "função de x", que basicamente é uma expressão matemática que quantifica o valor de y, dado um valor de x. Outra maneira de representarmos uma função é através de um modelo esquemático:



Neste modelo esquemático, temos o conjunto A sendo representado a esquerda e o conjunto B sendo representado a direita, mostrando a relação de função entre eles. A partir destas definições, podemos definir 3 conceitos fundamentais das funções: Domínio, Contradomínio e Imagem.

Domínio

O domínio da função, ou domínio de f(x), é o conjunto de todos os valores que podem ser atribuídos a x, ou seja, todos os elementos do conjunto A.

Contradomínio

O contradomínio da função, ou contradomínio de f(x), são todos os valores possíveis que podem ser atribuídos a y, ou seja, trata-se do conjunto B,

Imagem

A imagem de uma função, ou imagem de f(x), é um subconjunto do contradomínio que contém apenas os valores de y que tiveram algum elemento de x associado.

Usando o diagrama esquemático representado anteriormente, podemos descrever as 3 definições nele:

Domínio: Todos os valores de A: f(x):Dom={2,4,7,10}

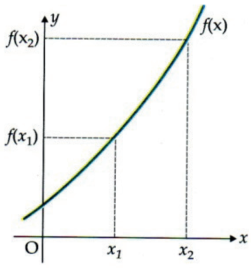
Contradomínio: Todos os valores de B: f(x):ContraDom={0,4,8,10,12,16}

Imagem: Todos os valores de B que tiveram associação com A: f(x):Imagem={0,4,10,16}

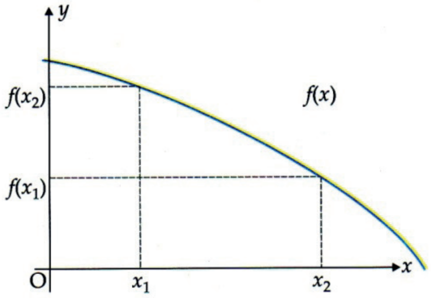
Observe que o elemento "8" do conjunto B não pertence a imagem, pois não há nenhum valor do conjunto A associado a ele.

> **FIQUE ATENTO!**
> Nem sempre a imagem e o contradomínio terão o mesmo tamanho!

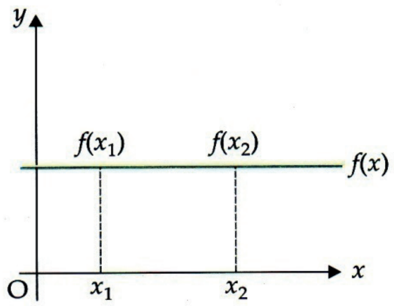
Função crescente: A função f(x), num determinado intervalo, é crescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a este intervalo, com com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)<f(x_2)$.



Função decrescente: Função f(x), num determinado intervalo, é decrescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente a este intervalo, com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)>f(x_2)$.

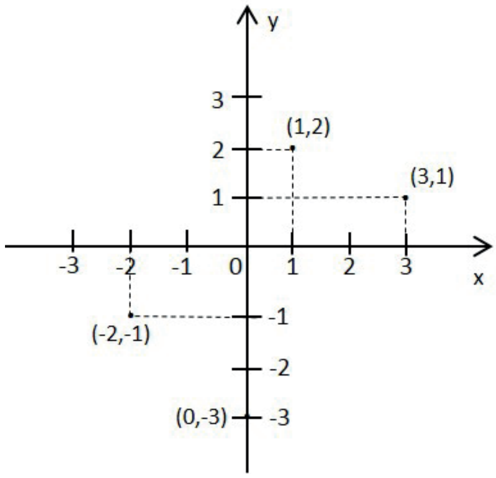


Função constante: A função f(x), num determinado intervalo, é constante se, para quaisquer $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.



Representação Gráfica

A função f(x) pode ser representada no plano cartesiano, através de um par ordenado (x,y). O lugar geométrico dos pares ordenados para os quais x∈Dom e y∈Imagem formam, no plano cartesiano, o gráfico da função. Um exemplo de plano cartesiano é apresentado abaixo:



> **#FicaDica**
> A apresentação de uma função por meio de seu gráfico é muito importante, não só na Matemática como nos diversos ramos dos estudos científicos.

Função do 1º Grau

As funções de 1° grau, conhecidas também como funções lineares, são expressões matemáticas onde a variável independente x possui grau igual a 1 e não está no denominador, em outras palavras, a forma geral de uma função de primeiro grau é a seguinte:

$f(x)=ax+b \qquad a\neq 0$

Onde “a” e “b” são números reais e são denominados respectivamente de coeficientes angular e linear. Nas funções de primeiro grau, tanto o domínio, contradomínio e imagem são todos os números reais, uma vez que não há nenhum tipo de restrição de valor nas mesmas.

Zeros da Função do 1º grau:

Chama-se zero ou raiz da função do 1º grau y = ax + b o valor de x que anula a função, isto é, o valor de x para que y seja igual à zero.

Assim, para achar o zero da função y = ax + b, basta resolver a equação ax + b = 0

Ex:
Determinar o zero da função: y = 2x – 4.

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

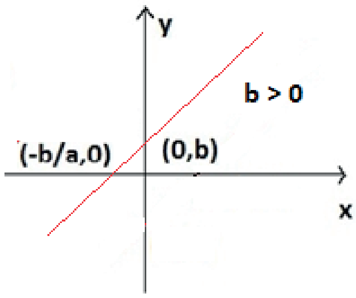
O zero da função y = 2x – 4 é 2.

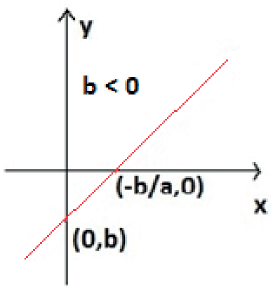
Gráfico da Função do 1º Grau

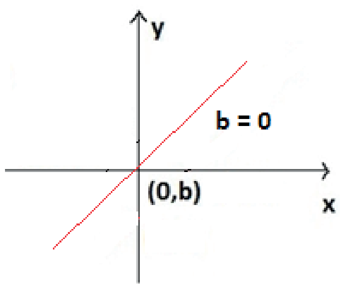
A forma desta função, como o próprio nome diz, será linear ou uma reta, e terá três tipos:

a) Crescente: a> 0

Quando o coeficiente angular da função for positivo, os valores de y aumentarão quando o valor de x também aumentar. A representação gráfica dos três posicionamentos desta reta, em função do valor de b, está abaixo:

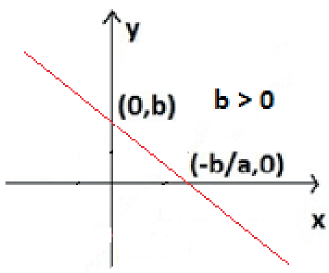


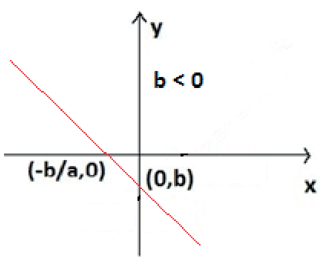


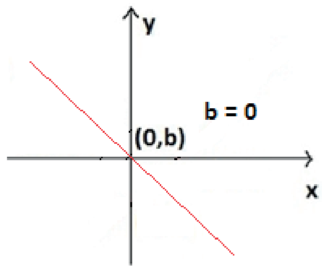


b) Decrescente: $a < 0$

A representação gráfica dos três posicionamentos desta reta, em função do valor de b, está abaixo:

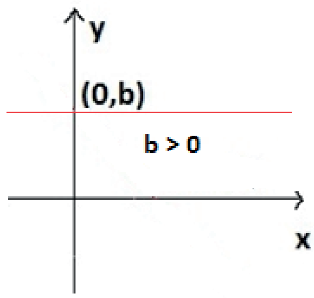


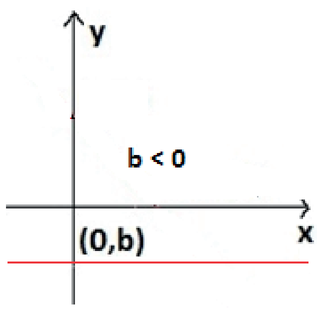


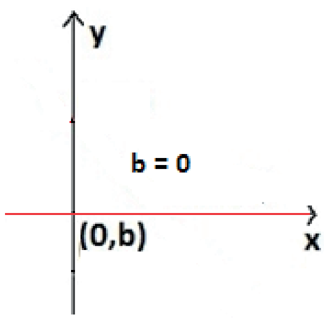


c) Constante: $a = 0$

Algumas referências não tratam a função constante como uma função linear e na teoria, realmente ela não é. Entretanto, como sua forma também é uma reta e trata-se de um caso específico do valor de a, colocamos nesta seção para ficar de maneira mais didática ao leitor. A representação gráfica dos três posicionamentos desta reta, em função do valor de b, está abaixo:







Estudo do sinal da função do 1º grau

Estudar o sinal da função do 1º grau $y = ax + b$ é determinar os valores reais de x para que:
- A função se anule (y = 0);
- A função seja positiva (y > 0);
- A função seja negativa (y < 0).

Ex:
Estudar o sinal da função $y = 2x - 4$ $(a = 2 > 0)$.

a) Qual o valor de x que anula a função?

$$y = 0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

A função se anula para $x = 2$. .

b) Quais valores de x tornam positiva a função?

$$y > 0$$
$$2x - 4 > 0$$
$$2x > 4$$
$$x > \frac{4}{2}$$
$$x > 2$$

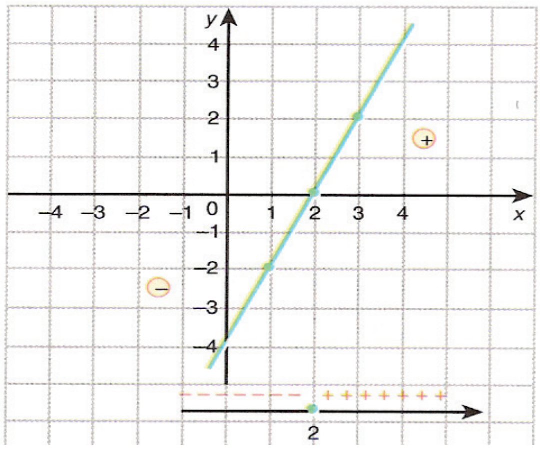
A função é positiva para todo x real maior que 2.

c) Quais valores de x tornam negativa a função?

$$y < 0$$
$$2x - 4 < 0$$
$$2x < 4$$
$$x < \frac{4}{2}$$
$$x < 2$$

A função é negativa para todo x real menor que 2.

Podemos também estudar o sinal da função por meio de seu gráfico:



- Para x = 2 temos y = 0;
- Para x > 2 temos y > 0;
- Para x < 2 temos y < 0.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. Determine o domínio das funções reais apresentadas abaixo.

a) $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

c) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{7x+5}}$

Resposta:

a) Domínio = $\mathbb{R}$

b) Domínio = $\mathbb{R}$

c) Domínio = $\left\{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{7}{5}\right\}$

Função do 2° Grau

Chama-se função do 2º grau ou função quadrática toda função f de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ em definida por um polinômio do 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a , b e c reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola.

Exs:

$f(x) = x^2 - 5x + 4$, sendo $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$
$f(x) = x^2 - 9$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$
$f(x) = x^2$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

1. Zeros da Função do 2º grau

As raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do 2º grau.

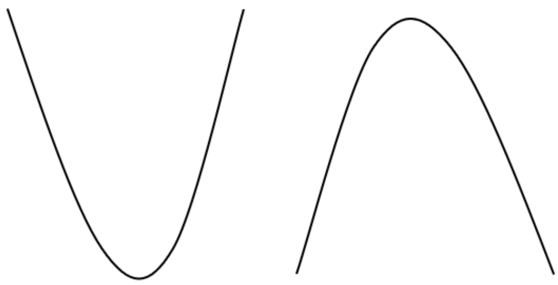
$$ax^2 + bx + c = 0$$

A resolução de uma equação do 2º grau é feita utilizando a fórmula de Bháskara como já visto.

> **FIQUE ATENTO!**
> As raízes (quando são reais), o vértice e a intersecção com o eixo y são fundamentais para traçarmos um esboço do gráfico de uma função do 2º grau.

Concavidade da Parábola

No caso das funções do 2º grau, a parábola pode ter sua concavidade voltada para cima (a > 0) ou voltada para baixo (a < 0).



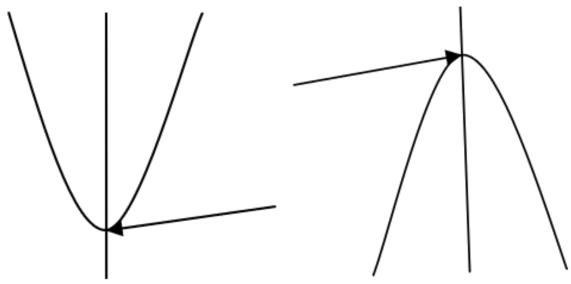
a> 0 a<0

Coordenadas do vértice da parábola

A parábola que representa graficamente a função do 2º grau apresenta como eixo de simetria uma reta vertical que intercepta o gráfico num ponto chamado de vértice.

As coordenadas do vértice (x_V, y_V) são:

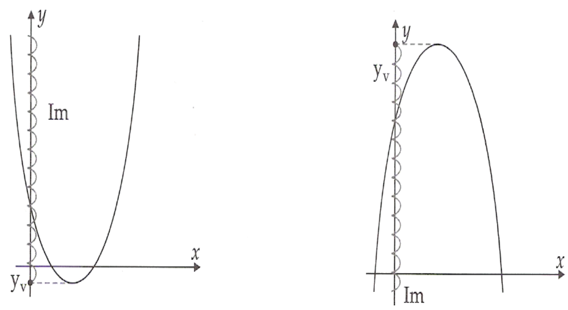
$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$



Vértice (V)

O Conjunto Imagem de uma função do 2º grau está associado ao seu ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice

(y_V).



Ex:

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola da seguinte função quadrática: $y = x^2 - 8x + 15$.

Cálculo da abscissa do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Cálculo da ordenada do vértice:
Substituindo x por 4 na função dada:

$$y_V = 4^2 - 8 \cdot 4 = 15 = 16 - 32 = 15 = -1$$

Logo, o ponto V, vértice dessa parábola, é dado por V .

#FicaDica

Como observado, a ordenada do vértice (y_V) pode ser calculada de duas formas distintas: substituindo o valor de na função ou usando a fórmula dada anteriormente $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. Costuma-se utilizar a primeira forma (apresentada no exemplo) por exigir menos cálculos e com isso ganha-se tempo na prova. Mas fica a cargo do aluno qual forma utilizar. Para fins ilustrativos, vamos encontrar o utilizando a fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -\frac{4}{4} = -1$ que é idêntico (como não poderia deixar de ser) ao valor encontrado anteriormente.

Domínio e Imagem da função do 2º grau

O domínio de uma função do 2º grau é o conjunto dos números reais, ou seja Dom= $\mathbb{R}$

Como visto acima, a imagem de uma função do 2º grau está diretamente relacionada à ordenada do vértice (y_V).

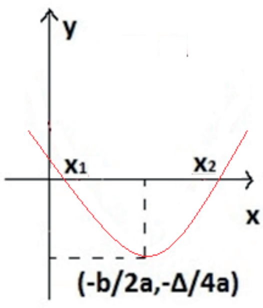
Para $a > 0 \rightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_V\}$

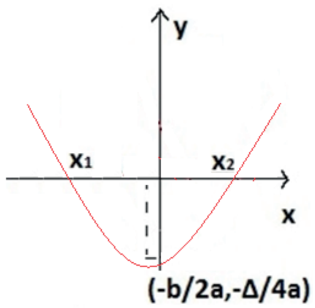
Para $a < 0 \rightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_V\}$

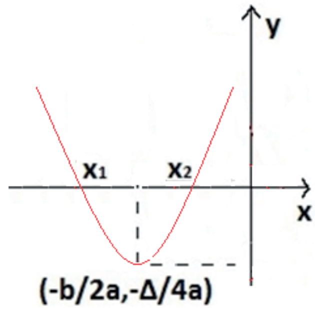
Representação gráfica – diferentes casos

Para sabermos a posição e orientação desta parábola, precisaremos além de analisar o sinal do discriminante, teremos que analisar também o sinal do coeficiente “a”. Vejam os casos:

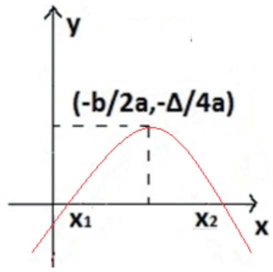
a) $a > 0$ e $\Delta > 0$: Neste caso, teremos a “boca” da parábola apontada para cima, e como temos duas raízes distintas, a mesma cruza duas vezes no eixo x. Além disso, o vértice da parábola caracteriza-se pelo ponto de mínimo da mesma. Seguem as representações para duas raízes positivas, uma positiva e outra negativa, e as duas negativas, respectivamente:

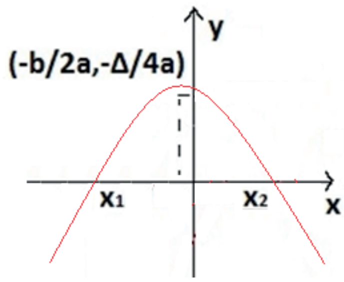


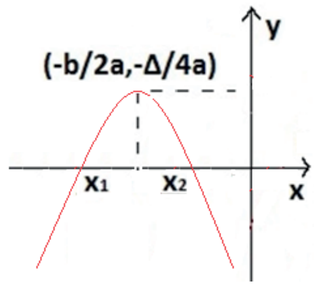




b) $a < 0$ e $\Delta > 0$: Neste caso, temos a “boca” da parábola apontada para baixo, e como temos duas raízes distintas, a mesma cruza duas vezes no eixo x. Além disso, o vértice da parábola caracteriza o ponto de máximo da mesma. Seguem as representações para as duas raízes positivas, uma positiva e outra negativa, e as duas negativas, respectivamente:

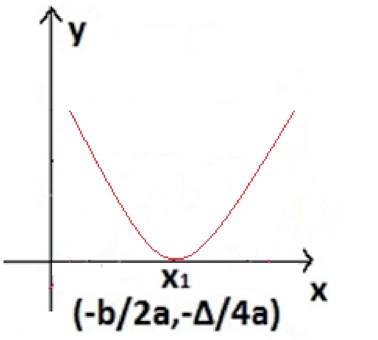


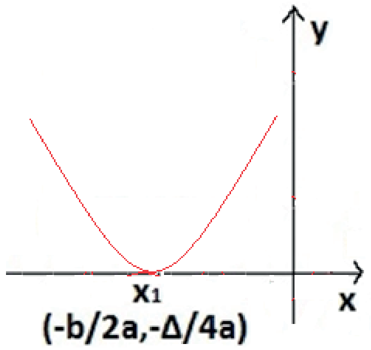




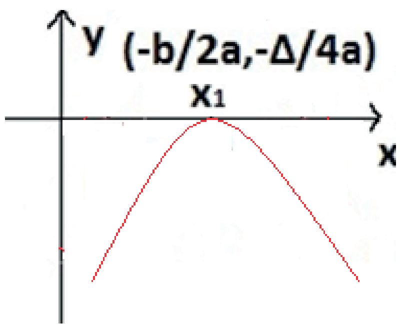
c) $a > 0$ e $\Delta = 0$: Neste caso, a “boca” da parábola segue apontada para cima, mas a mesma toca o eixo x apenas uma vez, já que a raízes são idênticas. Além disso, o vértice desta parábola é exatamente o ponto de tangência, a figura a seguir apresenta os casos para a raiz positiva e negativa respectivamente:

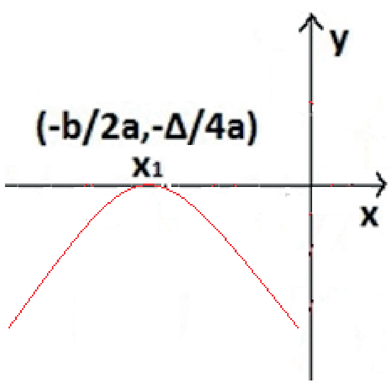
MATEMÁTICA



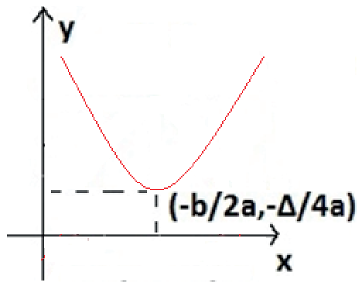


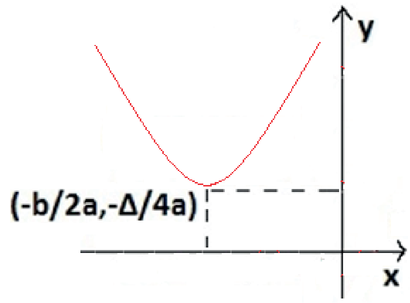
d) $a < 0$ e $\Delta = 0$: Neste caso, a "boca" da parábola segue apontada para baixo, mas a mesma toca o eixo x apenas uma vez, já que a raízes são idênticas. Além disso, o vértice desta parábola é exatamente o ponto de tangência, a figura a seguir apresenta os casos para a raiz positiva e negativa respectivamente:



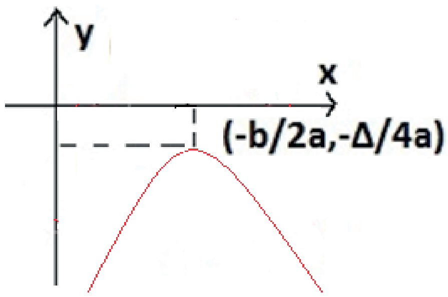


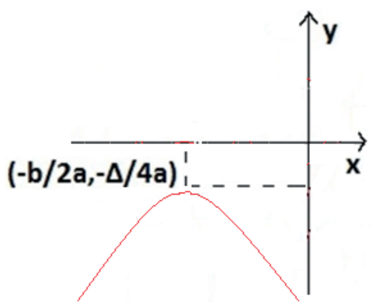
e) $a > 0$ e $\Delta = 0$: Neste caso, não há raízes (a parábola não toca e nem cruza o eixo x). A "boca" da parábola segue para cima e as figuras a seguir apresentam os gráficos para vértices com coordenada x positiva e negativa respectivamente:





f) $a < 0$ e $\Delta = 0$: Neste caso, não há raízes (a parábola não toca e nem cruza o eixo x). A "boca" da parábola segue para baixo e as figuras a seguir apresentam os gráficos para vértices com coordenada x positiva e negativa respectivamente:





Valor máximo e valor mínimo da função do 2º grau

- Se a > 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado ponto de mínimo e a ordenada do vértice é chamada valor mínimo da função;
- Se a < 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é ponto de máximo e a ordenada do vértice é chamada valor máximo da função.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Dada a função parabólica $a < 0 \text{ e } \Delta = 0$, determine as coordenadas do vértice, V.

Resposta: As coordenadas do seu vértice podem ser encontradas através de:

$x_v = -\frac{b}{2a}$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

Logo,

$$x_V = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -\frac{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$$

Portanto:

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

2. (UFSCAR–SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ $(t \geq 0)$, onde t é o tempo medido em segundo e h(t) é a altura em metros da bola no instante t. Determine, apos o chute:

a) o instante em que a bola retornará ao solo.
b) a altura atingida pela bola.

Resposta:

a) Houve dois momentos em que a bola tocou o chão: o primeiro foi antes de ela ser chutada e o segundo foi quando ela terminou sua trajetória e retornou para o chão. Em ambos os momentos a altura **h(t)** era igual a zero, sendo assim:

$h(t) = -2t^2 + 8t$
$0 = -2t^2 + 8t$
$2t^2 - 8t = 0$
$2t.(t - 4) = 0$
$t' = 0$
$t'' - 4 = 0$
$t'' = 4$

Portanto, o segundo momento em que a bola tocou no chão foi no instante de **quatro segundos**.

b) A altura máxima atingida pela bola é dada pelo vértice da parábola. As coordenadas do seu vértice podem ser encontradas através de:

$x_v = -\frac{b}{2a}$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

No caso apresentado, é interessante encontrar apenas $\mathbf{y_v}$:

$\mathbf{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$

$\mathbf{y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}}$

$\mathbf{y_v = -\frac{(8^2 - 4\,(-2)0)}{4\,(-2)}}$

$\mathbf{y_v = -\frac{(64 - 0)}{-8}}$

$\mathbf{y_v = 8}$

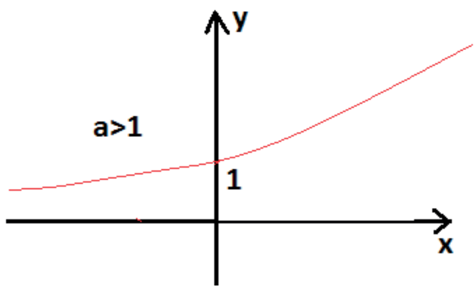
Portanto, a altura máxima atingida pela bola foi de **8 metros**.

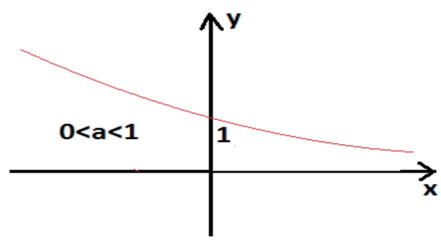
Função Exponencial

A função exponencial, como o nome mostra, é uma função onde a variável independente é um expoente:

Com "a" sendo um número real. Possui dois tipos básicos, quando $a > 1$ (crescente) e $0 < a < 1$ (decrescente).

As figuras a seguir apresentam seus respectivos gráficos:





MATEMÁTICA

#FicaDica
É importante ressaltar que o gráfico da função exponencial (na forma que foi apresentado) não toca o eixo , pois a função com é sempre positiva.

Equações exponenciais

As equações exponenciais são funções exponenciais relacionadas a números ou expressões. O princípio fundamental para a resolução das mesmas é lembrar que dois expoentes serão iguais se as respectivas bases também forem iguais, sigam os exemplos abaixo:

Ex:

Resolva $3^x = 27$

Resolução: Seguindo o princípio que bases iguais terão expoentes iguais, temos que lembrar que $27 = 3^3$, assim:

$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$S = \{3\}$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Resolva $2^{2x} = 1024$

Resposta:
Utilizando as propriedades de potenciação, tem-se:

$$\mathbf{2^{2x} = 2^{10}}$$
$$\mathbf{2x = 10}$$

Portanto, a solução da equação exponencial é x=5.

2.(CONED-2016) Qual a soma das raízes ou zeros da função exponencial abaixo:

$$2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$$

a) 5
b) 4
c) 6
d) 8
e) -6

Resposta: Letra A.

$$2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$$
$$\frac{2^{2x}}{2^3} - \frac{3 \cdot 2^x}{2} + 4 = 0$$
$$\frac{(2^x)^2}{2^3} - \frac{3 \cdot 2^x}{2} + 4 = 0$$

Faz-se a substituição $2^x = y$ pra obter uma equação de segundo grau

$$\frac{y^2}{8} - \frac{3y}{2} + 4 = 0$$

Multiplicando a equação por 8

$$y^2 - 12y + 32 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

MATEMÁTICA

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16$$

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{12+4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ y_2 = \dfrac{12-4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Assim, $\begin{cases} 2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x_1 = 2 \\ 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$

Portanto, a soma das raízes é igual a 2+3=5.

Função Logarítmica

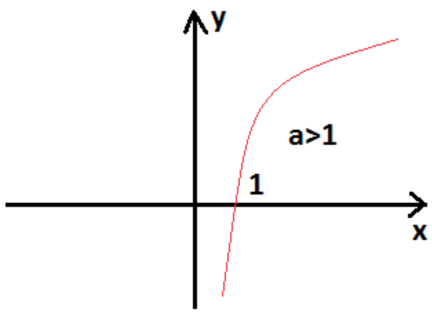
As funções logarítmicas tem como base o operador matemático log:

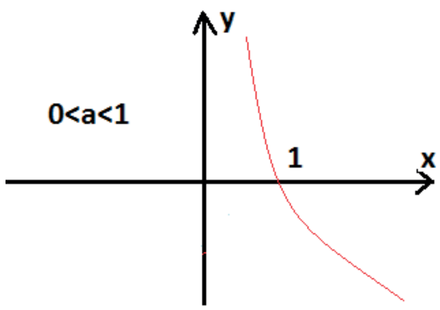
$$f(x) = \log_a x \text{ , com } a > 0, a \neq 1 \text{ e } x > 0$$

FIQUE ATENTO!

Observe que há restrições importantes para os valores de (logaritmando) e (base) e será essas restrições que poderá determinar o conjunto solução das equações logarítmicas.

O gráfico da função logarítmica terá dois formatos, baseado nos possíveis valores de a. Será crescente quando e decrescente quando :





Equações Logarítmicas

As equações logarítmicas adotarão um princípio semelhante as equações exponenciais. Para se achar o mesmo logaritmando, dois logaritmos deverão ter a mesma base ou vice-versa. Ressalta-se apenas que as condições de existência de um logaritmo devem ser respeitadas. Veja o exemplo:

Ex:

Resolva $\log_2 x - 2 = 4$

Primeiramente, será importante transformar o número 4 em um log. Como a base do log que contém x é dois, vamos transformar 4 em um log na base 2 da seguinte forma:

$$\log_2 16 = 4$$

Igualando isso a equação:

$$\log_2 x - 2 = \log_2 16$$

#FicaDica

Bases iguais, logaritmandos iguais:

$$4x + 2 = 3x + 3$$
$$\rightarrow 4x - 3x = 3 - 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (FUNDEP-2014) O conjunto solução da equação $\log(4x+2) = \log(3x+3)$ é:

a) S={1}
b) S= {2}
c) S= {3}
d) S= {4}
e) S= {5}

Resposta: Letra A.
Como as bases são iguais, os logaritmandos devem ser iguais. Portanto, pode-se escrever:

$$4x + 2 = 3x + 3$$
$$\rightarrow 4x - 3x = 3 - 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

Função Modular

Módulo

As funções modulares são desenvolvidas através de um operador matemático chamado de "Módulo". Sua definição está apresentada abaixo:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Sua representação é através de duas barras verticais e lê-se "Módulo de x".

#FicaDica

Módulo também conhecido como valor absoluto pode ser entendido como uma distância e por isso |x|<0 não existe para todo x.
Ex: |3| = 3 e |-3| = 3.

Função Modular

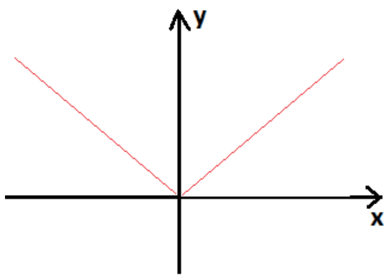
A função modular, segue a mesma representação, trocando apenas x por f(x):

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), se\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), se\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

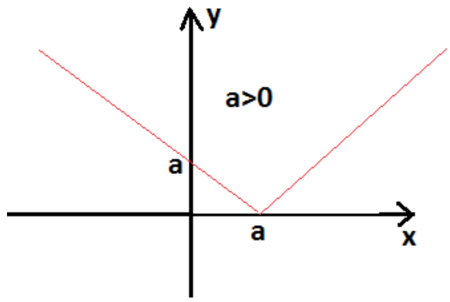
FIQUE ATENTO!
A representação gráfica será feita através de duas retas, dependendo de como é a forma de f (x).

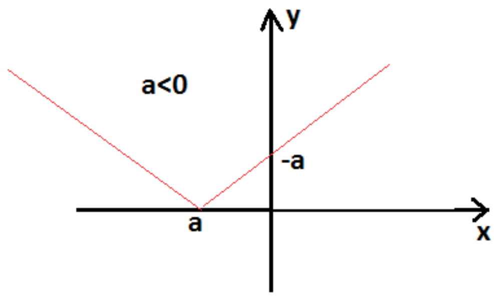
Abaixo segue alguns exemplos:

Ex:
Desenhar o gráfico de $f(x) = |x|$
Resolução: O gráfico de $f(x) = |x|$ forma uma ponta na origem e segue uma reta espelhada tanto para o sentido positivo quanto para o negativo:



Ex:
Desenhar o gráfico de $f(x) = |x - a$
Resolução: Quando há um termo subtraindo o valor de x dentro do módulo, o gráfico original acima se desloca, com a "ponta" se movendo para a coordenada "a". Seguem os dois casos, para $a > 0$ e $a < 0$ respectivamente:





Equações modulares

As equações modulares são funções modulares igualadas a algum número ou expressão. Ela será resolvida decompondo a mesma em dois casos, com domínios pré-determinados. Este tipo de solução é apresentada no Exercício Comentado 1, a seguir:

EXERCÍCIO COMENTADO

1. Resolva $|x - 3| = 7$

Reposta: Conforme foi mencionado, vamos resolver dois casos, usando a definição de módulo:

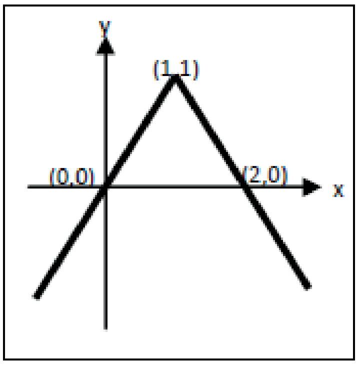
$$x - 3 = 7 \quad , \text{para } x - 3 \geq 0$$
$$-(x - 3) = 7 \quad , \text{para } x - 3 \leq 0$$

Resolvendo:

$$x = 7 + 3 = 10, \qquad \text{para } x \geq 3$$
$$-x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = -4, \qquad \text{para } x \leq 3$$

Observe que as duas soluções estão dentro dos domínios pré-estabelecidos, assim: S={-4,10}

2. (PREF. OSASCO-SP – ATENDENTE – FGV/2014) Assinale a única função, dentre as opções seguintes, que pode estar representada no gráfico a seguir:



a) $y = 1 - |x - 1|$;
b) $y = 1 - |x + 1|$;
c) $y = 1 + |x - 1|$;
d) $y = 1 + |x + 1|$;
e) $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Resposta: Letra A.
Pelo gráfico se $x = 0$ implica em $y = 0$, se $x = 2$ implica em $y = 0$ e se $x = 1$ implica em $y=1$. Analisando o itens acima, verifica-se que essas condições são satisfeitas se $y = 1 - |x - 1|$. Logo, a resposta correto é a letra a.

GRANDEZAS E MEDIDAS – QUANTIDADE, TEMPO, COMPRIMENTO, SUPERFÍCIE, CAPACIDADE E MASSA.

O sistema de medidas e unidades existe para quantificar dimensões. Como a variação das mesmas pode ser gigantesca, existem conversões entre unidades para melhor leitura.

Medidas de Comprimento

A unidade principal (utilizada no sistema internacional de medidas) de comprimento é o metro. Para medir dimensões muito maiores ou muito menores que essa referência, surgiram seis unidades adicionais:

km (kilômetro)	hm (hectômetro)	dam (decâmetro)	m (metro)	dm (decímetro)	cm (centímetro)	mm (milímetro)

A conversão de unidades de comprimento segue potências de 10. Para saber o quanto se deve multiplicar (ou dividir), utiliza-se a regra do , onde c é o número de casas que se andou na tabela acima. Adicionalmente, se você andou para a direita, o número deverá ser multiplicado, se andou para a esquerda, será dividido. As figuras a seguir exemplificam as conversões:
Ex: Conversão de 2,3 metros para centímetros

km (kilômetro)	hm (hectômetro)	dam (decâmetro)	m (metro)	dm (decímetro)	cm (centímetro)	mm (milímetro)
			1° passo: Inicia-se da unidade que você vai converter			

2° passo: Conte a quantidade de casas que você anda de uma unidade para a outra. De metro para centímetro foram 2 casas

km (kilômetro)	hm (hectômetro)	dam (decâmetro)	m (metro)	dm (decímetro)	cm (centímetro)	mm (milímetro)

3° passo: Como foram duas casas (c=2) e andou-se para a direita, basta eu pegar o número em metros e multiplicar por $10^2 = 100$
Assim 2,3 metros = 2,3 x 100 = 230 cm

km (kilômetro)	hm (hectômetro)	dam (decâmetro)	m (metro)	dm (decímetro)	cm (centímetro)	mm (milímetro)

1° passo: Inicia-se da unidade que você vai converter

2° passo: Conte a quantidade de casas que você anda de uma unidade para a outra. De milímetro para decâmetro são 4 casas

km (kilômetro)	hm (hectômetro)	dam (decâmetro)	m (metro)	dm (decímetro)	cm (centímetro)	mm (milímetro)

3° passo: Como foram quatro casas (c=4) e andou-se para a esquerda, basta eu pegar o número em milímetros e dividir por $10^4 = 10000$. Assim, 125000 mm = 125000 : 10000 = 12,5 dam

Medidas de Área (Superfície)

As medidas de área seguem as mesmas referências que as medidas de comprimento. A unidade principal é o metro quadrado e as outras seis unidades são apresentadas a seguir:

km^2 (kilômetro quadrado)	hm^2 (hectômetro quadrado)	dam^2 (decâmetro quadrado)	m^2 (metro quadrado)	dm^2 (decímetro quadrado)	cm^2 (centímetro quadrado)	mm^2 (milímetro quadrado)

A conversão de unidades segue com potências de 10. A diferença agora é que ao invés da regra de , utiliza-se a regra de , ou seja, o número de casas que se andou deve ser multiplicado por 2. A definição se multiplica ou divide segue a mesma regra: Andou para a direita, multiplica, andou para a esquerda, divide. Sigam os exemplos:

Ex: Conversão de 2 km^2 para m^2

km^2 (kilômetro quadrado)	hm^2 (hectômetro quadrado)	dam^2 (decâmetro quadrado)	m^2 (metro quadrado)	dm^2 (decímetro quadrado)	cm^2 (centímetro quadrado)	mm^2 (milímetro quadrado)

1° passo: Inicia-se da unidade que você vai converter

2° passo: Conte a quantidade de casas que você andou. Neste caso, de km² para m², andou-se 3 casas.

km² (kilômetro quadrado)	hm² (hectômetro quadrado)	dam² (decâmetro quadrado)	m² (metro quadrado)	dm² (decímetro quadrado)	cm² (centímetro quadrado)	mm² (milímetro quadrado)

2° passo: Conte a quantidade de casas que você andou. Nesse caso, de mm² para cm², andou-se 1 casa.

km² (kilômetro quadrado)	hm² (hectômetro quadrado)	dam² (decâmetro quadrado)	m² (metro quadrado)	dm² (decímetro quadrado)	cm² (centímetro quadrado)	mm² (milímetro quadrado)

3° passo: Como foram 3 casas (c=3) e andou-se para a direita, basta eu pegar o número em km² e multiplicar por $10^{2x3} = 10^6$ = 1000000. Assim, 2 km² = 2000000 m²

km² (kilômetro quadrado)	hm² (hectômetro quadrado)	dam² (decâmetro quadrado)	m² (metro quadrado)	dm² (decímetro quadrado)	cm² (centímetro quadrado)	mm² (milímetro quadrado)

1° passo: Inicia-se da unidade que você vai converter

3° passo: Como foi apenas 1 casa (c=1) e andou-se para a esquerda, basta eu pegar o número em mm² e dividir por $10^{2x1} = 10^2$ = 100. Assim, 20 mm² = 20 : 100 = 0,2 cm².

Medidas de Volume(Capacidade)

As medidas de volume seguem as mesmas referências que as medidas de comprimento. A unidade principal é o metro cúbico e as outras seis unidades são apresentadas a seguir:

km³ (kilômetro cúbico)	hm³ (hectômetro-cúbico)	dam³ (decâmetro-cúbico)	m³ (metro-cúbico)	dm³ (decímetro-cúbico)	cm³ (centímetro-cúbico)	mm³ (milímetro-cúbico)

A conversão de unidades segue com potências de 10. A diferença agora é que ao invés da regra de , utiliza-se a regra de , ou seja, o número de casas que se andou deve ser multiplicado por 3. A definição se multiplica ou divide segue a mesma regra: Andou para a direita, multiplica, andou para a esquerda, divide. Sigam os exemplos:

Ex: Conversão de 3,7 m³ para cm³

km³ (kilômetro cúbico)	hm³ (hectômetro cúbico)	dam³ (decâmetro cúbico)	m³ (metro cúbico)	dm³ (decímetro cúbico)	cm³ (centímetro cúbico)	mm³ (milímetro cúbico)

1° passo: Inicia-se da unidade que você vai converter

MATEMÁTICA

km³ (kilômetro cúbico)	hm³ (hectômetro cúbico)	dam³ (decâmetro cúbico)	m³ (metro cúbico)	dm³ (decímetro cúbico)	cm³ (centímetro cúbico)	mm³ (milímetro cúbico)

2° passo: Conte quantas casas você andou. Nesse caso, de m³ para cm³ foram 2 casas

3°passo: Como foram duas casas (c=2) e andou-se para a direita, basta eu pegar o número em m³ e multiplicar por $10^{3\times2} = 10^6 = 1000000$. Assim, 3,7 m³ = 3700000 cm³

km³ (kilômetro cúbico)	hm³ (hectômetro cúbico)	dam³ (decâmetro cúbico)	m³ (metro cúbico)	dm³ (decímetro cúbico)	cm³ (centímetro cúbico)	mm³ (milímetro cúbico)

1° passo: Inicia-se

km³ (kilômetro cúbico)	hm³ (hectômetro cúbico)	dam³ (decâmetro cúbico)	m³ (metro cúbico)	dm³ (decímetro cúbico)	cm³ (centímetro cúbico)	mm³ (milímetro cúbico)

2° passo: Conte quantas casa você andou. Nesse caso, de m³ para cm³ foi 1 casa apenas.

3° passo: Como foi uma casa (c=1) e andou-se para a esquerda, basta eu pegar o número em dm³ e multiplicar por $10^{3\times1} = 10^3 = 1000$. Assim, 50000 dm³ = 50 m³

kL (quilolitro)	hL (hectolitro)	dam³ (decalitro)	m³ (litro)	dm³ (decilitro)	cm³ (centilitro)	mm³ (mililitro)

Para essa tabela, o roteiro para converter unidades de medidas é o mesmo utilizado para as medidas anteriores. A diferença é que para cada unidade à direita multiplica-se por 10 e para cada unidade à esquerda divide-se por 10 (igual para unidades de comprimento).

Medidas de Massa

As medidas de massa segue a base 10, como as medidas de comprimento. A unidade principal é o grama (g) e suas seis unidades complementares estão apresentadas a seguir:

kg (kilograma)	hg (hectograma)	dag (decagrama)	g (grama)	dg (decígrama)	cg (centígrama)	mg (milígrama)

Os passos para conversão de unidades segue o mesmo das medidas de comprimento. Utiliza-se a regra do , multiplicando se caminha para a direita e divide quando caminha para a esquerda.

FIQUE ATENTO!
Outras unidades importantes:
• Massa: A tonelada, sendo que 1 tonelada vale 1000 kg.
• Volume : O litro (l) que vale 1 decímetro cúbico (dm³) e o mililitro, que vale 1 cm³.
• Área: O hectare (ha) que vale 1 hectômetro quadrado (ou 10000 m²) e o alqueire, (varia de região para região e normalmente a conversão desejada é dada na prova).

Medidas de Tempo

Desse grupo, o sistema hora – minuto – segundo, que mede intervalos de tempo, é o mais conhecido.
2h = 2 · 60min = 120 min = 120 · 60s = 7 200s
Para passar de uma unidade para a menor seguinte, multiplica-se por 60.
0,3h não indica 30 minutos nem 3 minutos; como 1 décimo de hora corresponde a 6 minutos, conclui-se que 0,3h = 18min.
Para medir ângulos, também temos um sistema não decimal. Nesse caso, a unidade básica é o grau. Na astronomia, na cartografia e na navegação são necessárias medidas inferiores a 1º. Temos, então:

1 grau equivale a 60 minutos (1º = 60')
1 minuto equivale a 60 segundos (1' = 60")

Os minutos e os segundos dos ângulos não são, é claro, os mesmos do sistema hora – minuto – segundo. Há uma coincidência de nomes, mas até os símbolos que os indicam são diferentes:

1h32min24s é um intervalo de tempo ou um instante do dia.
1º 32' 24" é a medida de um ângulo.

#FicaDica

Por motivos óbvios, cálculos no sistema hora – minuto – segundo são similares a cálculos no sistema grau – minuto – segundo, embora esses sistemas correspondam a grandezas distintas.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Raquel saiu de casa às 13h 45min, caminhando até o curso de inglês que fica a 15 minutos de sua casa, e chegou na hora da aula cuja duração é de uma hora e meia. A que horas terminará a aula de inglês?

a) 14h
b) 14h 30min
c) 15h 15min
d) 15h 30min
e) 15h 45min

Resposta: Letra D.
Basta somarmos todos os valores mencionados no enunciado do teste, ou seja:
13h 45min + 15 min + 1h 30 min = 15h 30min
Logo, a questão correta é a letra D.

2. 348 mm^3 equivalem a quantos decilitros?

Resposta: "0, 00348 dl". Como 1 cm^3 equivale a 1 ml, é melhor dividirmos 348 mm^3 por mil, para obtermos o seu equivalente em centímetros cúbicos: 0,348 cm^3.
Logo 348 mm^3 equivalem a 0, 348 ml, já que cm^3 e ml se equivalem.
Neste ponto já convertemos de uma unidade de medida de volume, para uma unidade de medida de capacidade. Falta-nos passarmos de mililitros para decilitros, quando então passaremos dois níveis à esquerda. Dividiremos então por 10 duas vezes:
0,348ml:10:100,00348dl
Logo, 348 mm^3 equivalem a 0, 00348 dl.

3. Passe 50 dm^2 para hectômetros quadrados.

Resposta: 0, 00005 hm^2. Para passarmos de decímetros quadrados para hectômetros quadrados, passaremos três níveis à esquerda.
Dividiremos então por 100 três vezes:
$50dm^2:100:100:100 \Longrightarrow 0{,}00005hm^2$
Isto equivale a passar a vírgula seis casas para a esquerda.
Portanto, 50 dm^2 é igual a 0, 00005 hm^2.

4. Passe 5.200 gramas para quilogramas.

Resposta: 5,2 kg. Para passarmos 5.200 gramas para quilogramas, devemos dividir (porque na tabela grama está à direita de quilograma) 5.200 por 10 três vezes, pois para passarmos de gramas para quilogramas saltamos três níveis à esquerda.
Primeiro passamos de grama para decagrama, depois de decagrama para hectograma e finalmente de hectograma para quilograma:
$5200g:10:10:10 \Longrightarrow 5{,}2Kg$
Isto equivale a passar a vírgula três casas para a esquerda.
Portanto, 5.200 g são iguais a 5,2 kg.

5. Converta 2,5 metros em centímetros.

Resposta: 250 cm. Para convertermos 2,5 metros em centímetros, devemos multiplicar (porque na tabela metro está à esquerda de centímetro) 2,5 por 10 duas vezes, pois para passarmos de metros para centímetros saltamos dois níveis à direita.
Primeiro passamos de metros para decímetros e depois de decímetros para centímetros:
$2{,}5m\cdot10\cdot10 \Longrightarrow 250cm$
Isto equivale a passar a vírgula duas casas para a direita.
Logo, 2,5 m é igual a 250 cm.

RELAÇÃO ENTRE GRANDEZAS – TABELA OU GRÁFICO; TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES.

Estatística

Definições Básicas

Estatística: ciência que tem como objetivo auxiliar na tomada de decisões por meio da obtenção, análise, organização e interpretação de dados.
População: conjunto de entidades (pessoas, objetos, cidades, países, classes de trabalhadores, etc.) que apresentem no mínimo uma característica em comum. Exemplos: pessoas de uma determinada cidade, preços de um produto, médicos de um hospital, estudantes que prestam determinado concurso, etc.
Amostra: É uma parte da população que será objeto do estudo. Como em muitos casos não é possível estudar a população inteira, estuda-se uma amostra de tamanho

significativo (há métodos para determinar isso) que retrate o comportamento da população. Exemplo: pesquisa de intenção de votos de uma eleição. Algumas pessoas são entrevistadas e a pesquisa retrata a intenção de votos da população.

Variável: é o dado a ser analisado. Aqui, será chamado de e cada valor desse dado será chamado de . Essa variável pode ser quantitativa (assume valores) ou qualitativa (assume características ou propriedades).

Medidas de tendência central

São medidas que auxiliam na análise e interpretação de dados para a tomada de decisões. As três medidas de tendência central são:

Média aritmética simples: razão entre a soma de todos os valores de uma mostra e o número de elementos da amostra. Expressa por . Calculada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Média aritmética ponderada: muito parecida com média aritmética simples, porém aqui cada variável tem um peso diferente que é levado em conta no cálculo da média.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

Mediana: valor que divide a amostra na metade. Em caso de número para de elementos, a mediana é a média entre os elementos intermediários

Moda: valor que aparece mais vezes dentro de uma amostra.
Ex: Dada a amostra {1,3,1,2,5,7,8,7,6,5,4,1,3,2} calcule a média, a mediana e a moda.
Solução
Média:

$$\bar{x} = \frac{1+3+1+2+5+7+8+7+6+5+4+1+3+2}{14} = \frac{55}{14} = 3{,}92$$

Mediana:
Inicialmente coloca-se os valores em ordem crescente:
{1,1,1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8}

Como a amostra tem 14 valores (número par), os elementos intermediários são os 7º e 8º elementos. Nesse exemplo, são os números 3 e 4. Portanto, a mediana é a média entre eles: $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Moda:
O número que aparece mais vezes é o número 1 e, portanto, é a moda da amostra nesse exemplo.
Ex: Dada a amostra {2,4,8,10,15,6,9,11,7,4,15,15,11,6,10} calcule a média, a mediana e a moda.
Solução:
Média:

$$\bar{x} = \frac{2+4+8+10+15+6+9+11+7+4+15+15+11+6+10}{15} = \frac{133}{14} = 8{,}867$$

Mediana:
Inicialmente coloca-se os valores em ordem crescente
{2,4,4,6,6,7,8,9,10,10,11,11,15,15,15}
Como a amostra tem 15 valores (número par), o elemento intermediário é o 8º elemento. Logo, a mediana é igual a 9.

Moda:
O número que aparece mais vezes é o número 15 e, portanto, é a moda da amostra nesse exemplo.
Ex: A média de uma disciplina é calculada por meio da média ponderada de três provas. A primeira tem peso 3, a segunda tem peso 4 e a terceira tem peso 5. Calcule a média de um aluno que obteve nota 8 na primeira prova, 5 na segunda e 6 na terceira.

Solução:
Trata-se de um caso de média aritmética ponderada.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{3 + 4 + 5} = \frac{74}{12} = 6{,}167$$

Tabelas e Gráficos

Tabelas

Tabelas podem ser utilizadas para expressar os mais diversos tipos de dados. O mais importante é saber interpretá-las e para isso é conveniente saber como uma tabela é estruturada. Toda tabela possui um título que indica sobre o que se trata a tabela. Toda tabela é dividida em linhas e colunas onde, no começo de uma linha ou de uma coluna, está indicado qual o tipo de dado que aquela linha/coluna exibe.

Ex:

Tabela 1 - Número de estudantes da Universidade ALFA divididos por curso

Curso	Número de Estudantes
Administração	2000
Arquitetura	1450
Direito	2500
Economia	1800
Enfermagem	800
Engenharia	3500
Letras	750
Medicina	1500
Psicologia	1000
TOTAL	15300

Nesse caso, as colunas são: curso e número de estudantes e cada linha corresponde a um dos cursos da Universidade com o respectivo número de alunos de cada curso.

Tabela 2 - Número de estudantes da Universidade ALFA divididos por curso e gênero

Curso	Gênero	Número de Estudantes
Administração	Homem	1200
	Mulher	800
Arquitetura	Homem	850
	Mulher	600
Direito	Homem	1600
	Mulher	900
Economia	Homem	800
	Mulher	1000
Enfermagem	Homem	350
	Mulher	450
Engenharia	Homem	2500
	Mulher	1000
Letras	Homem	200
	Mulher	550

Medicina	Homem	700
	Mulher	800
Psicologia	Homem	400
	Mulher	600
	TOTAL	15300

Nesse caso, as colunas são: curso, gênero e número de estudantes e cada linha corresponde a um dos cursos da Universidade com o respectivo número de alunos de cada curso separados por gênero.

#FicaDica

Acima foram exibidas duas tabelas como exemplos. Há uma infinidade de tabelas cada uma com sua particularidade o que torna impossível exibir todos os tipos de tabelas aqui. Porém em todas será necessário identificar linhas, colunas e o que cada valor exibido representa.

Gráficos

Para falar de gráficos em estatística é importante apresentar o conceito de frequência.

Frequência: Quantifica a repetição de valores de uma variável estatística.

Tipos de frequência
Absoluta: mede a quantidade de repetições.
Ex. Dos 30 alunos, seis tiraram nota 6,0. Essa nota possui freqüência absoluta:

$$f_i = 4$$

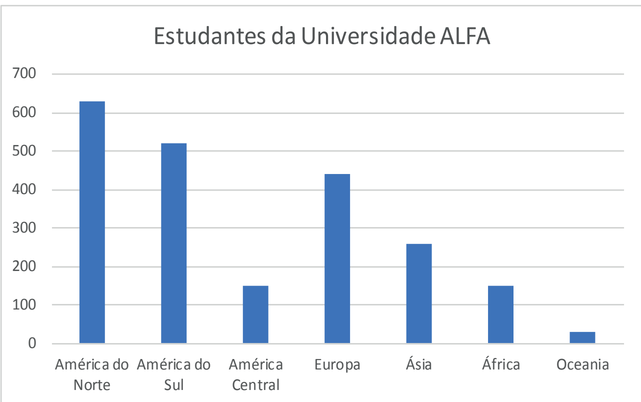
Relativa: Relaciona a quantidade de repetições com o total (expresso em porcentagem)
Ex. Dos 30 alunos, seis tiraram nota 6,0. Essa nota possui freqüência relativa:

$$f_r = \left(\frac{6}{30}\right) \cdot 100 = 20\%$$

Tipos de Gráficos

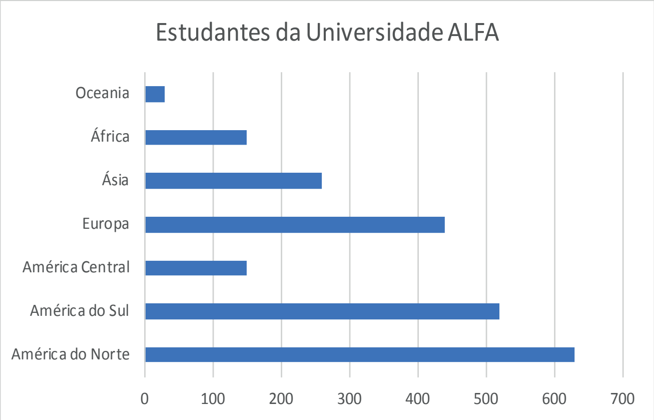
Gráficos de coluna: gráficos que têm como objetivo atribuir quantidades a certos tipos de grupos. Na horizontal são apresentados os grupos (dados qualitativos) dos quais deseja-se apresentar dados enquanto na vertical são apresentados os valores referentes a cada grupo (dados quantitativos ou frequências absolutas)

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a quantidade de estudantes separados pelos seus continentes de origem:



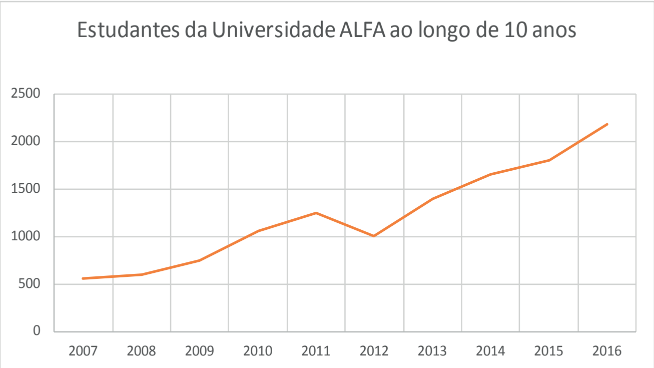
Gráficos de barras: gráficos bastante similares aos de colunas, porém, nesse tipo de gráfico, na horizontal são apresentados os valores referentes a cada grupo (dados quantitativos) enquanto na vertical são apresentados os grupos (dados qualitativos)

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a quantidade de estudantes separados pelos seus continentes de origem:



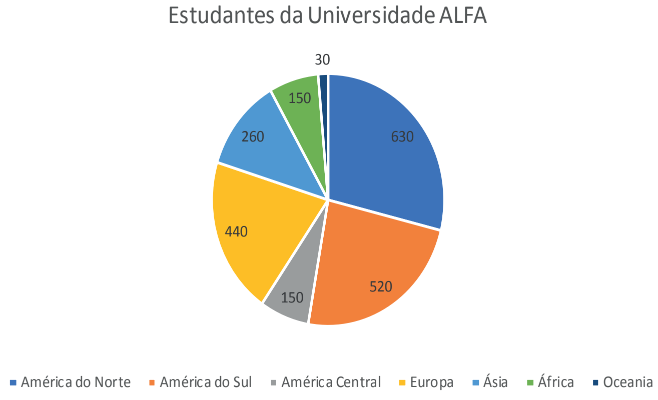
Gráficos de linhas: gráficos nos quais são exibidas séries históricas de dados e mostram a evolução dessas séries ao longo do tempo.

Ex: A Universidade ALFA tem 10 anos de existências e seu reitor apresentou um gráfico mostrando o número de alunos da Universidade ao longo desses 10 anos.



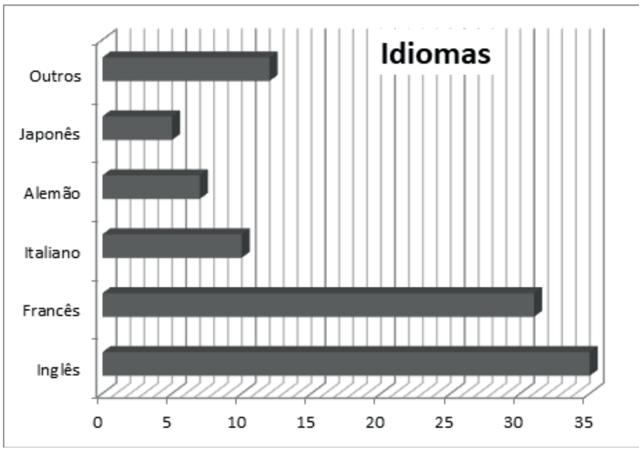
Gráficos em pizzas: gráficos nos quais são expressas relações entre grandezas em relação a um todo. Nesse gráfico é possível visualizar a relação de proporcionalidade entre as grandezas. Recebe esse nome pois lembram uma pizza pelo formato redondo com seus pedaços (frequências relativas).

Ex: A Universidade ALFA recebe estudantes do mundo todo. A seguir há um gráfico que mostra a distribuição de estudantes de acordo com seus continentes de origem

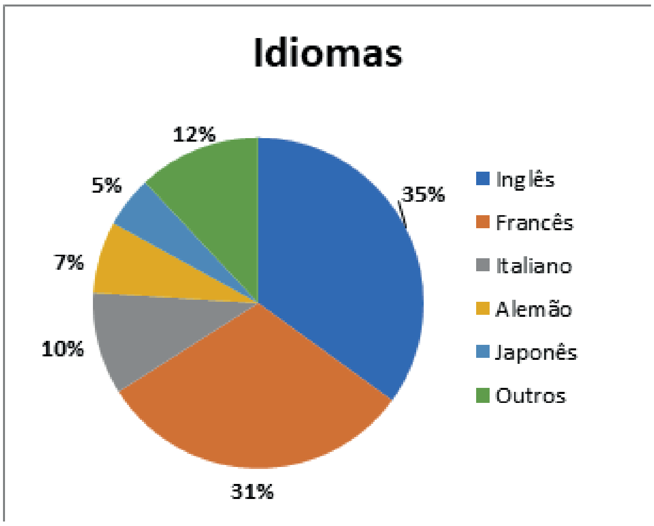


Ex: Foi feito um levantamento do idioma falado pelos alunos de um curso da Universidade ALFA.

Frequências absolutas:



Frequências relativas:



EXERCÍCIO COMENTADO

1. (SEGEP-MA - Técnico da Receita Estadual – FCC/2016) Três funcionários do Serviço de Atendimento ao Cliente de uma loja foram avaliados pelos clientes que atribuíram uma nota (1; 2; 3; 4; 5) para o atendimento recebido. A tabela mostra as notas recebidas por esses funcionários em um determinado dia.

Funcionário	Número de Cada Nota Recebida pelos Funcionários					Total de Atendimentos no Dia
	1	2	3	4	5	
A	2	7	2	9	10	30
B	6	6	9	14	5	40
C	0	5	10	6	4	25

Considerando a totalidade das 95 avaliações desse dia, é correto afirmar que a média das notas dista da moda dessas mesmas notas um valor absoluto, aproximadamente, igual a:

a) 0,33
b) 0,83
c) 0,65
d) 0,16
e) 0,21

Resposta: Letra C
Trata-se de um caso de média aritmética ponderada. Considerando as 95 avaliações, o peso de cada uma das notas é igual ao total de pessoas que atribuiu a nota.
Analisando a tabela
8 pessoas atribuíram nota 1
18 pessoas atribuíram nota 2
21 pessoas atribuíram nota 3
29 pessoas atribuíram nota 4
19 pessoas atribuíram nota 5
Assim, a média das 95 avaliações é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{8\cdot 1 + 18\cdot 2 + 21\cdot 3 + 29\cdot 4 + 19\cdot 5}{8 + 18 + 21 + 29 + 19} = \frac{318}{95} = 3{,}34$$

2. (UFC - 2016) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 6,5
b) 7,2
c) 7,4
d) 7,8
e) 8,0

Resposta: Letra B.
Primeiramente, será identificada a soma das notas dos meninos por x e a da nota das meninas por y. Se a turma tem 5 meninos e a média aritmética de suas notas é igual a 6, então a soma das notas dos meninos (x) dividida pela quantidade de meninos (5) deve ser igual a 6, isto é:

$$\frac{x}{5} = 6$$

$$x = 6 \cdot 5$$

$$x = 30$$

Do mesmo modo, se a turma tem 25 meninas (Me é a média aritmética de suas notas), o quociente da soma das notas das meninas (y) e a quantidade de meninas (25) deve ser igual a Me, isto é:
(x + y)/(25+5) = 7
y = 25∙Me
Para calcular a média da turma, devemos somar as notas dos meninos (30) às notas das meninas (y) e dividir pela quantidade de alunos (25 + 5 = 30). O resultado deverá ser 7. Sendo assim, temos:

$$\frac{x + y}{25 + 5} = 7$$

$$\frac{30 + 25 \cdot Me}{30} = 7$$

$$30 + 25 \cdot Me = 7 \bullet 30$$

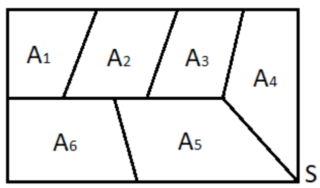
$$30 + 25 \cdot Me = 210$$

$$25 \cdot Me = 210 - 30$$

$$25 \cdot Me = 180$$

$$Me = 7{,}2$$

Portanto, a média aritmética das notas das meninas é 7,2. A alternativa correta é a letra b.



Então, logo:

$$\begin{cases} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = P(S) = 1 \end{cases}$$

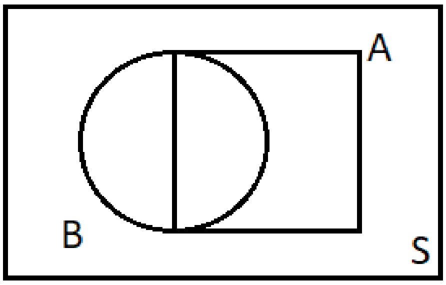
Portanto:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Probabilidade Condicionada

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. A probabilidade de B condicionada a A é dada pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que já ocorreu A. É representada por P(B/A).

Veja: $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$



Eventos Independentes

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. Estes serão independentes somente quando:

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$

Intersecção de Eventos

Considerando A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, logo:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(A) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(B) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Assim sendo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Considerando A e B como eventos independentes, logo $P(B/A) = P(B)$, $P(A/B) = P(A)$, sendo assim: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Para saber se os eventos A e B são independentes, podemos utilizar a definição ou calcular a probabilidade de $A \cap B$. Veja a representação:

A e B independentes $\leftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$ ou
A e B independentes $\leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

> **FIQUE ATENTO!**
> Um exercício de probabilidade pode envolver aspectos relativos à análise combinatória. É importante ter em mente a diferença conceitual que existe entre ambos.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

Resposta: 5/12.
Neste exercício o espaço amostral possui 12 elementos, que é o número total de bolas, portanto a probabilidade de ser retirada uma bola verde está na razão de 5 para 12.
Sendo S o espaço amostral e E o evento da retirada de uma bola verde, matematicamente podemos representar a resolução assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P(E) = \frac{5}{12}$$

Logo, a probabilidade desta bola ser verde é 5/12.

2. (IBGE – Analista Censitário – FGV/2017) Entre os cinco números 2, 3, 4, 5 e 6, dois deles são escolhidos ao acaso e o produto deles dois é calculado. A probabilidade desse produto ser um número par é:

a) 60%
b) 75%
c) 80%
d) 85%
e) 90%

Resposta: Letra E.
Para sabermos o tamanho do espaço amostral, basta calcularmos a combinação dos 5 elementos tomados 2 a 2 (a ordem não importa, pois a ordem dos fatores não altera o produto): $C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Para o produto ser par, os dois números escolhidos deverão ser par ou um deles é par. O único caso onde o produto não dá par é quando os dois números são ímpares. Assim, apenas o produto 3 5 não pode ser escolhido. Logo, se 1/10 = 10% não terá produto par, os outros 90% terão.

GRÁFICOS E TABELAS

Os gráficos e tabelas apresentam o cruzamento entre dois dados relacionados entre si.

A escolha do tipo e a forma de apresentação sempre vão depender do contexto, mas de uma maneira geral um bom gráfico deve:

-Mostrar a informação de modo tão acurado quanto possível.

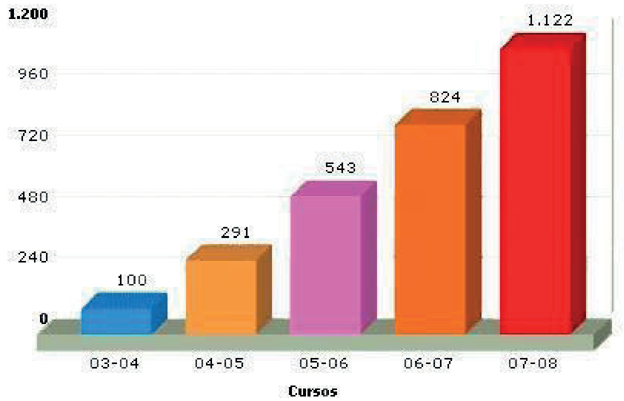
-Utilizar títulos, rótulos, legendas, etc. para tornar claro o contexto, o conteúdo e a mensagem.

-Complementar ou melhorar a visualização sobre aspectos descritos ou mostrados numericamente através de tabelas.

-Utilizar escalas adequadas.

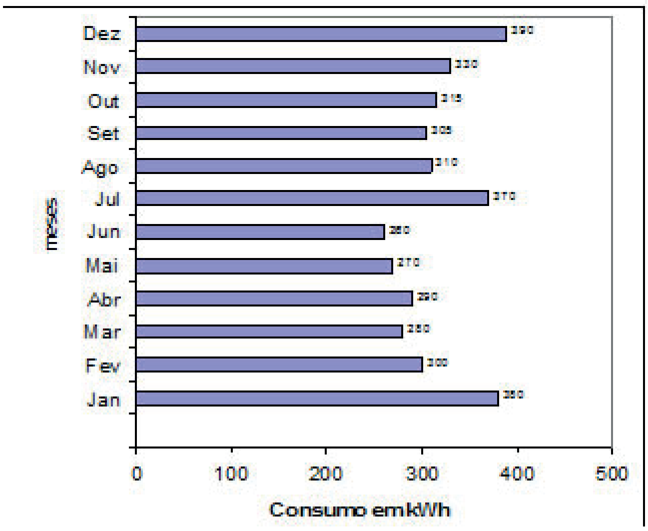
-Mostrar claramente as tendências existentes nos dados.

Tipos de gráficos



Fonte: tecnologia.umcomo.com.br

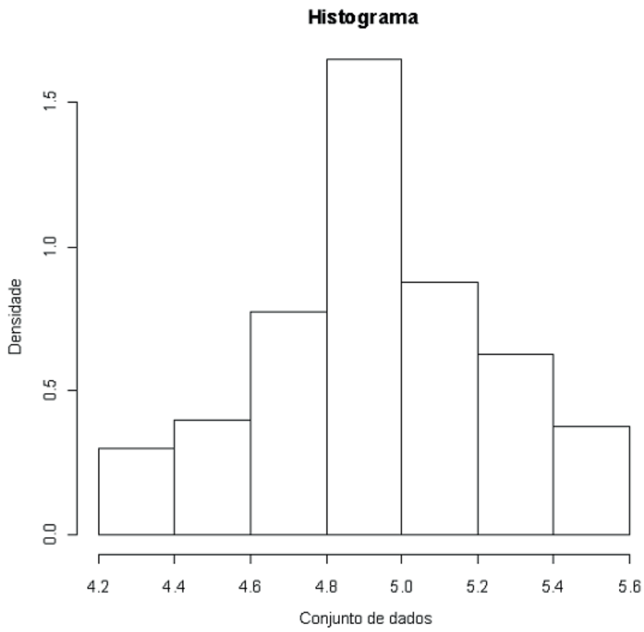
Barra horizontal



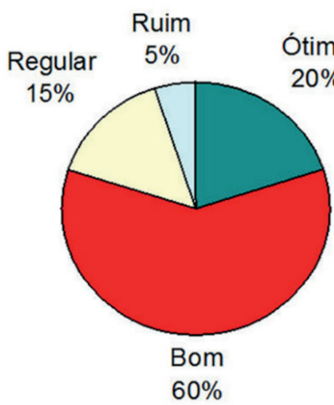
Fonte: mundoeducacao.bol.uol.com.br

Histogramas

São gráfico de barra que mostram a frequência de uma variável específica e um detalhe importante que são faixas de valores em x.

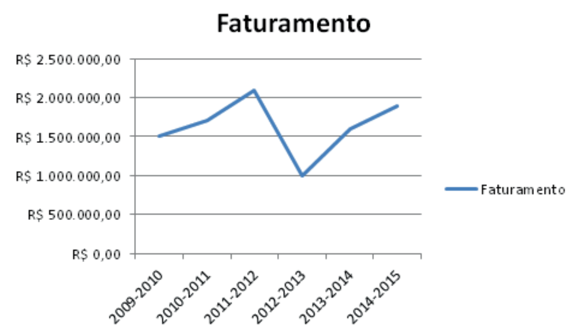


Setor ou pizza- Muito útil quando temos um total e queremos demonstrar cada parte, separando cada pedaço como numa pizza.



Fonte: educador.brasilescola.uol.com.br

Linhas- É um gráfico de grande utilidade e muito comum na representação de tendências e relacionamentos de variáveis



Pictogramas – são imagens ilustrativas para tornar mais fácil a compreensão de todos sobre um tema.

Da mesma forma, as tabelas ajudam na melhor visualização de dados e muitas vezes é através dela que vamos fazer os tipos de gráficos vistos anteriormente.

Podem ser tabelas simples:

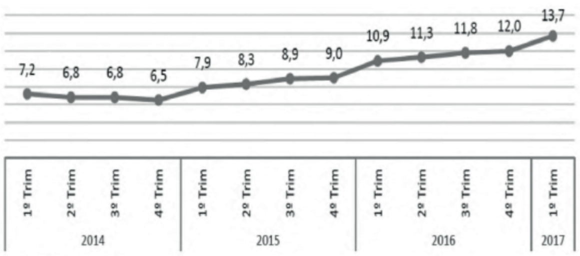
Quantos aparelhos tecnológicos você tem na sua casa?

aparelho	quantidade
televisão	3
celular	4
Geladeira	1

Até as tabelas que vimos nos exercícios de raciocínio lógico

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (TJ/RS - TÉCNICO JUDICIÁRIO – FAURGS/2017) Na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua, realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), foram obtidos os dados da taxa de desocupação da população em idade para trabalhar. Esses dados, em porcentagem, encontram-se indicados na apresentação gráfica abaixo, ao longo de trimestres de 2014 a 2017.



Fonte: IBGE, 18/5/2017.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a que apresenta a melhor aproximação para o aumento percentual da taxa de desocupação do primeiro trimestre de 2017 em relação à taxa de desocupação do primeiro trimestre de 2014.

a) 15%.
b) 25%.
c) 50%.
d) 75%.
e) 90%.

Resposta: Letra E.
13,7/7,2=1,90
Houve um aumento de 90%.

2. (CÂMARA DE SUMARÉ – ESCRITURÁRIO - VUNESP/2017) A tabela seguinte, incompleta, mostra a distribuição, percentual e quantitativa, da frota de uma empresa de ônibus urbanos, de acordo com o tempo de uso destes.

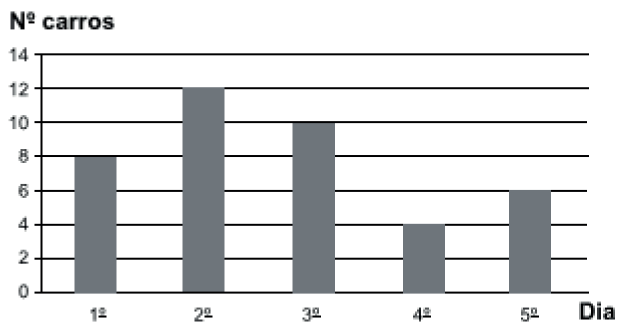
Tempo de uso	Quantidade de ônibus	% do total
Até 5 anos	-----	35%
6 a 10 anos	81	-----
11 a 15 anos	27	-----
Mais de 15 anos	-----	5%

O número total de ônibus dessa empresa é

a) 270.
b) 250.
c) 220
d) 180.
e) 120.

Resposta: Letra D
81+27=108
108 ônibus somam 60%(100-35-5)
108-----60
x--------100
x=10800/60=180

3. (CÂMARA DE SUMARÉ – ESCRITURÁRIO - VUNESP/2017) O gráfico mostra o número de carros vendidos por uma concessionária nos cinco dias subsequentes à veiculação de um anúncio promocional.



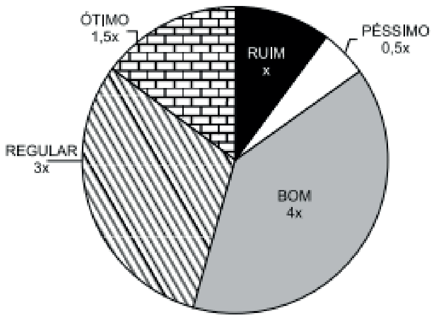
O número médio de carros vendidos por dia nesse período foi igual a

a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 7.
e) 6.

Resposta: Letra C.

$$M = \frac{8 + 12 + 10 + 4 + 6}{5} = 8$$

4. (CRBIO – Auxiliar Administrativo – VUNESP/2017) Uma professora elaborou um gráfico de setores para representar a distribuição, em porcentagem, dos cinco conceitos nos quais foram agrupadas as notas obtidas pelos alunos de uma determinada classe em uma prova de matemática. Observe que, nesse gráfico, as porcentagens referentes a cada conceito foram substituídas por x ou por múltiplos e submúltiplos de x.

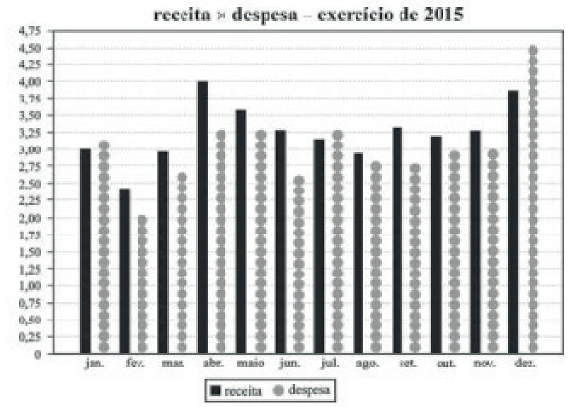


Analisando o gráfico, é correto afirmar que a medida do ângulo interno correspondente ao setor circular que representa o conceito BOM é igual a

a) 144º.
b) 135º.
c) 126º
d) 117º
e) 108º.

Resposta: Letra A.
X+0,5x+4x+3x+1,5x=360
10x=360
X=36
Como o conceito bom corresponde a 4x: 4x36=144°

5. (TCE/PR – CONHECIMENTOS BÁSICOS – CESPE/2016)

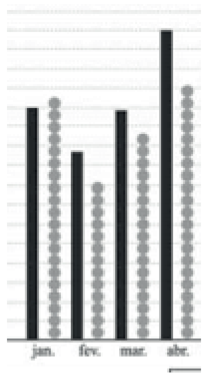


Internet: <www.gestaodinheiropublico.pr.gov.br> (com adaptações).

Tendo como referência o gráfico precedente, que mostra os valores, em bilhões de reais, relativos à arrecadação de receitas e aos gastos com despesas do estado do Paraná nos doze meses do ano de 2015, assinale a opção correta.

a) No ano considerado, o segundo trimestre caracterizou-se por uma queda contínua na arrecadação de receitas, situação que se repetiu no trimestre seguinte.
b) No primeiro quadrimestre de 2015, houve um período de queda simultânea dos gastos com despesas e da arrecadação de receitas e dois períodos de aumento simultâneo de gastos e de arrecadação.
c) No último bimestre do ano de 2015, foram registrados tanto o maior gasto com despesas quanto a maior arrecadação de receitas.
d) No ano em questão, janeiro e dezembro foram os únicos meses em que a arrecadação de receitas foi ultrapassada por gastos com despesas.
e) A menor arrecadação mensal de receitas e o menor gasto mensal com despesas foram verificados, respectivamente, no primeiro e no segundo semestre do ano de 2015.

Resposta: Letra B.
Analisando o primeiro quadrimestre, observamos que os dois primeiros meses de receita diminuem e os dois meses seguintes aumentam, o mesmo acontece com a despesa.



6. (BRDE – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – FUNDATEC/2015) Assinale a alternativa que representa a nomenclatura dos três gráficos abaixo, respectivamente.

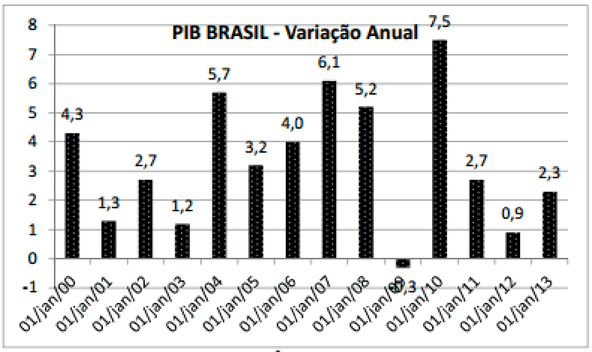


GRÁFICO 1

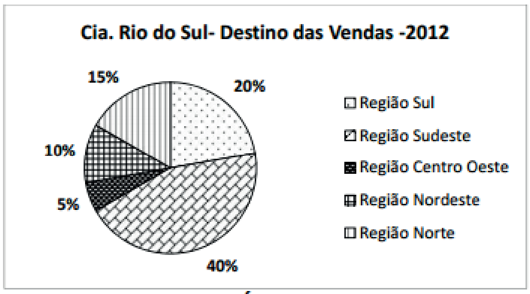


GRÁFICO 2

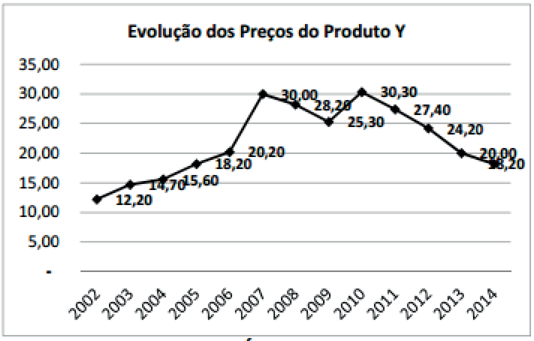


GRÁFICO 3

a) Gráfico de Setores – Gráfico de Barras – Gráfico de Linha.
c) Gráfico de Pareto – Gráfico de Pizza – Gráfico de Tendência.
c) Gráfico de Barras – Gráfico de Setores – Gráfico de Linha.
d) Gráfico de Linhas – Gráfico de Pizza – Gráfico de Barras.
e) Gráfico de Tendência – Gráfico de Setores – Gráfico de Linha.

Resposta: Letra C.
Como foi visto na teoria, gráfico de barras, de setores ou pizza e de linha

7. (TJ/SP – ESTATÍSTICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2015) A distribuição de salários de uma empresa com 30 funcionários é dada na tabela seguinte.

Salário (em salários mínimos)	Funcionários
1,8	10
2,5	8
3,0	5
5,0	4
8,0	2
15,0	1

Pode-se concluir que

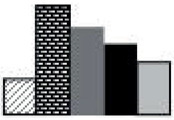
a) o total da folha de pagamentos é de 35,3 salários.
b) 60% dos trabalhadores ganham mais ou igual a 3 salários.
c) 10% dos trabalhadores ganham mais de 10 salários.
d) 20% dos trabalhadores detêm mais de 40% da renda total.
e) 60% dos trabalhadores detêm menos de 30% da renda total.

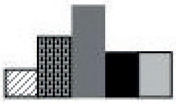
Resposta: Letra D.
a) 1,8x10+2,5x8+3,0x5+5,0x4+8,0x2+15,0x1=104 salários
b) 60% de 30=18 funcionários e se juntarmos quem ganha mais de 3 salários (5+4+2+1=12)
c)10% de 30=0,1x30=3 funcionários
E apenas 1 pessoa ganha
d) 40% de 104=0,4x104= 41,6
20% de 30=0,2x30=6
5x3+8x2+15x1=46, que já é maior.
e) 60% de 30=0,6x30=18
30% de 104=0,3x104=31,20da renda: 31,20

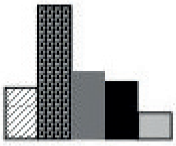
8. (TJ/SP – ESTATÍSTICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2015) Considere a tabela de distribuição de frequência seguinte, em que x_i é a variável estudada e f_i é a frequência absoluta dos dados.

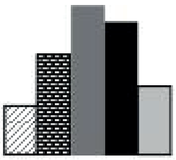
xi	fi
30-35	4
35-40	12
40-45	10
45-50	8
50-55	6
TOTAL	40

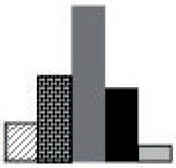
Assinale a alternativa em que o histograma é o que melhor representa a distribuição de frequência da tabela.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resposta: Letra A.
Colocando em ordem crescente: 30-35, 50-55, 45-50, 40-45, 35-40,

9. (DEPEN – AGENTE PENITENCIÁRIO FEDERAL – CESPE/2015)

região	quantidade de detentos no sistema penitenciário brasileiro (mil pessoas)	déficit de vagas no sistema penitenciário (mil vagas)	população brasileira (milhões de habitantes)
Norte	37	13	17
Centro-oeste	51	24	15
Nordeste	94	42	55
Sudeste	306	120	85
Sul	67	16	28
total	555	215	200

Ministério da Justiça — Departamento Penitenciário Nacional — Sistema Integrado de Informações Penitenciárias – InfoPen, Relatório Estatístico Sintético do Sistema Prisional Brasileiro, dez./2013 Internet:<www.justica.gov.br> (com adaptações)
A tabela mostrada apresenta a quantidade de detentos no sistema penitenciário brasileiro por região em 2013. Nesse ano, o déficit relativo de vagas — que se define pela razão entre o déficit de vagas no sistema penitenciário e a quantidade de detentos no sistema penitenciário — registrado em todo o Brasil foi superior a 38,7%, e, na média nacional, havia 277,5 detentos por 100 mil habitantes.
Com base nessas informações e na tabela apresentada, julgue o item a seguir.
Em 2013, mais de 55% da população carcerária no Brasil se encontrava na região Sudeste.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: Certo
555----100%
x----55%
x=305,25
Está correta, pois a região sudeste tem 306 pessoas.

Estatística Descritiva

Teste de Hipóteses

Definição: Processo que usa estatísticas amostrais para testar a afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional.

Para testar um parâmetro populacional, você deve afirmar cuidadosamente um par de hipóteses – uma que represente a afirmação e outra, seu complemento. Quando uma é falsa, a outra é verdadeira.

Uma hipótese nula H_0 é uma hipótese estatística que contém uma afirmação de igualdade, tal como ≤, =, ≥

A hipótese alternativa H_a é o complemento da hipótese nula. Se H_0 for falsa, H_a deve ser verdadeira, e contém afirmação de desigualdade, como <, ≠, >.

Vamos ver como montar essas hipóteses
Um caso bem simples.

$$\begin{cases} H_0: \mu = k \\ H_a: \mu \neq k \end{cases}$$

Assim, fica fácil, se H_0 for falsa, H_a é verdadeira
Há uma regrinha para formular essas hipóteses

Formulação verbal H_0 A média é	Formulação Matemática	Formulação verbal H_a A média é
...maior ou igual a k. ....pelo menos k. ...não menos que k.	$\begin{cases} H_0: \mu \geq k \\ H_a: \mu < k \end{cases}$	...menor que k ... abaixo de k ...menos que k.
...menor ou igual a k. ....no máximo k. ...não mais que k.	$\begin{cases} H_0: \mu \leq k \\ H_a: \mu > k \end{cases}$	..maior que k ... acima de k ...mais do que k.
... igual a k. .... k. ...exatamente k.	$\begin{cases} H_0: \mu = k \\ H_a: \mu \neq k \end{cases}$	... não igual a k. .... diferente de k. ...não k.

Exemplo: Um fabricante de torneiras anuncia que o índice médio de fluxo de água de certo tipo de torneira é menor que 2,5 galões por minuto.

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 2{,}5 \text{ galões por minuto} \\ H_a: \mu < 2{,}5 \text{ galões por minuto} \end{cases}$$

Referências

Larson, Ron. Estatística Aplicada. 4ed – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Frequências

A primeira fase de um estudo estatístico consiste em recolher, contar e classificar os dados pesquisados sobre uma população estatística ou sobre uma amostra dessa população.

1. Frequência Absoluta

É o número de vezes que a variável estatística assume um valor.

1.1. Frequência Relativa

É o quociente entre a frequência absoluta e o número de elementos da amostra.

Na tabela a seguir, temos exemplo dos dois tipos:

Alturas	Frequências		Relativa
	Absoluta	Relativa	Percentual
1,69 ⊢→ 1,74	6	6/20 = 0,30	30%
1,74 ⊢→ 1,79	3	3/20 = 0,15	15%
1,79 ⊢→ 1,84	2	2/20 = 0,10	10%
1,84 ⊢→ 1,89	4	4/20 = 0,20	20%
1,89 ⊢→ 1,94	5	5/20 = 0,25	25%
Total	20		100%

1.2. Distribuição de frequência sem intervalos de classe:

É a simples condensação dos dados conforme as repetições de seu valores. Para um **ROL** de tamanho razoável esta distribuição de frequência é inconveniente, já que exige muito espaço. Veja exemplo abaixo:

Dados	Frequência
41	3
42	2
43	1
44	1
45	1
46	2
50	2
51	1
52	1
54	1
57	1
58	2
60	2
Total	20

Distribuição de frequência com intervalos de classe:

Quando o tamanho da amostra é elevado é mais racional efetuar o agrupamento dos valores em vários intervalos de classe.

Classes	Frequências
41 |------- 45	7
45 |------- 49	3
49 |------- 53	4
53 |------- 57	1
57 |------- 61	5
Total	20

2. Média aritmética

Média aritmética de um conjunto de números é o valor que se obtém dividindo a soma dos elementos pelo número de elementos do conjunto.

Representemos a média aritmética por $\bar{X}$.

A média pode ser calculada apenas se a variável envolvida na pesquisa for quantitativa. Não faz sentido calcular a média aritmética para variáveis quantitativas.

Na realização de uma mesma pesquisa estatística entre diferentes grupos, se for possível calcular a média, ficará mais fácil estabelecer uma comparação entre esses grupos e perceber tendências.

Considerando uma equipe de basquete, a soma das alturas dos jogadores é:

$$1{,}85 + 1{,}85 + 1{,}95 + 1{,}98 + 1{,}98 + 1{,}98 + 2{,}01 + 2{,}01 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}10 + 2{,}13 + 2{,}18 = 30{,}0$$

Se dividirmos esse valor pelo número total de jogadores, obteremos a **média aritmética** das alturas:

$$média = \frac{30{,}3}{15} = 2{,}02$$

A média aritmética das alturas dos jogadores é 2,02m.

2.1. Média Ponderada

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição e na qual cada elemento tem um "determinado peso" é chamada média aritmética ponderada.

$$x = \frac{P_1 . x_1;\ P_2 x_2;\ P_3 x_3;\ \ldots;\ P_n x_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}$$

2.2. Mediana (Md)

Sejam os valores escritos em rol:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Sendo n ímpar, chama-se **mediana** o termo x_i tal que o número de termos da sequência que precedem x_i é igual ao número de termos que o sucedem, isto é, x_i é termo médio da sequência (x_n) em rol.

Sendo n par, chama-se **mediana** o valor obtido pela média aritmética entre os termos x_j e x_{j+1}, tais que o número de termos que precedem x_j é igual ao número de termos que sucedem x_{j+1}, isto é, a mediana é a média aritmética entre os termos centrais da sequência (x_n) em rol.

Exemplo 1:
Determinar a mediana do conjunto de dados:
{12, 3, 7, 10, 21, 18, 23}

Solução:
Escrevendo os elementos do conjunto em rol, tem-se: (3, 7, 10, 12, 18, 21, 23). A mediana é o termo médio desse rol. Logo: Md=12
Resposta: Md=12.

Exemplo 2:
Determinar a mediana do conjunto de dados:
{10, 12, 3, 7, 18, 23, 21, 25}.

Solução:
Escrevendo-se os elementos do conjunto em rol, tem-se:
(3, 7, 10, 12, 18, 21, 23, 25). A mediana é a média aritmética entre os dois termos centrais do rol.

Logo: $Md = \frac{12+18}{2} = 15$

Resposta: Md=15

3. Moda (Mo)

Num conjunto de números: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, chama-se moda aquele valor que ocorre com maior frequência.

Observação:
A moda pode não existir e, se existir, pode não ser única.

Exemplo 1:
O conjunto de dados 3, 3, 8, 8, 8, 6, 9, 31 tem moda igual a 8, isto é, Mo=8.

Exemplo 2:
O conjunto de dados 1, 2, 9, 6, 3, 5 não tem moda.

4. Medidas de dispersão

Duas distribuições de frequência com medidas de tendência central semelhantes podem apresentar características diversas. Necessita-se de outros índices numéricas que informem sobre o grau de dispersão ou variação dos dados em torno da média ou de qualquer outro valor de concentração. Esses índices são chamados **medidas de dispersão**.

Variância

Há um índice que mede a "dispersão" dos elementos de um conjunto de números em relação à sua média aritmética, e que é chamado de **variância**. Esse índice é assim definido:

Seja o conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, tal que $\bar{x}$ é sua média aritmética. Chama-se **variância** desse conjunto, e indica-se por σ^2, o número:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

E para amostra

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

Exemplo 1:
Em oito jogos, o jogador A, de bola ao cesto, apresentou o seguinte desempenho, descrito na tabela abaixo:

Jogo	Número de pontos
1	22
2	18
3	13
4	24
5	26
6	20
7	19
8	18

a) Qual a média de pontos por jogo?
b) Qual a variância do conjunto de pontos?

Solução:

a) A média de pontos por jogo é:

$$\bar{x} = \frac{22+18+13+24+26+20+19+18}{8}$$

$\therefore \bar{x} = 20$

b) A variância é:

$$\sigma^2 = \frac{(22-20)^2 + (18-20)^2 + (13-20)^2 + (24-20)^2 + (26-20)^2 + (20-20^2) + (19-20)^2 + (18-20)^2}{8}$$

$\therefore \sigma^2 = 14{,}25$

Desvio médio

Definição

Medida da dispersão dos dados em relação à média de uma sequência. Esta medida representa a média das distâncias entre cada elemento da amostra e seu valor médio.

$$DM = \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$$

Desvio padrão

Definição

Seja o conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, tal que $\bar{x}$ é sua média aritmética. Chama-se desvio padrão desse conjunto, e indica-se por σ, o número:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Isto é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Exemplo:

As estaturas dos jogadores de uma equipe de basquetebol são: 2,00 m; 1,95 m; 2,10 m; 1,90 m e 2,05 m. Calcular:

a) A estatura média desses jogadores.
b) O desvio padrão desse conjunto de estaturas.

Solução:

$$\bar{x} = \frac{2{,}00 + 1{,}95 + 2{,}10 + 1{,}90 + 2{,}05}{5}$$

$$\therefore \bar{x} = 2{,}00\,m$$

Sendo σ o desvio padrão, tem-se:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2{,}00 - 2{,}00)^2 + (1{,}95 - 2{,}00)^2 + (2{,}10 - 2{,}00)^2 + (1{,}90 - 2{,}00)^2 + (2{,}05 - 2{,}00)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}005\,m} \approx 0{,}07m$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (CRBIO – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – VUNESP/2017) Uma empresa tem 120 funcionários no total: 70 possuem curso superior e 50 não possuem curso superior. Sabe-se que a média salarial de toda a empresa é de R$ 5.000,00, e que a média salarial somente dos funcionários que possuem curso superior é de R$ 6.000,00. Desse modo, é correto afirmar que a média salarial dos funcionários dessa empresa que não possuem curso superior é de

a) R$ 4.000,00.
b) R$ 3.900,00.
c) R$ 3.800,00.
d) R$ 3.700,00.
e) R$ 3.600,00.

Resposta: Letra E.
S=cursam superior
M=não tem curso superior

$$\frac{S+M}{120} = 5000$$

S+M=600000

$$\frac{S}{70} = 6000$$

S=420000
M=600000-420000=180000

$$\frac{M}{50} = \frac{180000}{50} = 3600$$

2. (TJM/SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2017) Leia o enunciado a seguir para responder a questão.
A tabela apresenta o número de acertos dos 600 candidatos que realizaram a prova da segunda fase de um concurso, que continha 5 questões de múltipla escolha

Número de acertos	Número de candidatos
5	204
4	132
3	96
2	78
1	66
0	24

A média de acertos por prova foi de

a) 3,57.
b) 3,43
c) 3,32.
d) 3,25.
e) 3,19.

Resposta: Letra B.

$$M = \frac{204 \cdot 5 + 132 \cdot 4 + 96 \cdot 3 + 78 \cdot 2 + 66 \cdot 1 + 24 \cdot 0}{204 + 132 + \cdot 96 + 78 + 66 + 24} = \frac{2058}{600} = 3{,}43$$

3. (PREF. GUARULHOS/SP – ASSISTENTE DE GESTÃO ESCOLAR – VUNESP/2016) Certa escola tem 15 classes no período matutino e 10 classes no período vespertino. O número médio de alunos por classe no período matutino é 20, e, no período vespertino, é 25. Considerando os dois períodos citados, a média aritmética do número de alunos por classe é

a) 24,5.
b) 23.
c) 22,5.
d) 22.
e) 21.

Resposta: Letra D.

$$\frac{M}{15} = 20$$
M=300

$$\frac{V}{10} = 25$$
V=250

$$\frac{M+V}{25} = \frac{300+250}{25} = 22$$

4. (SEGEP/MA – TÉCNICO DA RECEITA ESTADUAL – FCC/2016) Para responder à questão, considere as informações abaixo.
Três funcionários do Serviço de Atendimento ao Cliente de uma loja foram avaliados pelos clientes que atribuíram uma nota (1; 2; 3; 4; 5) para o atendimento recebido. A tabela mostra as notas recebidas por esses funcionários em um determinado dia.

Funcionário	Número de Cada Nota Recebida pelos Funcionários					Total de Atendimentos no Dia
	1	2	3	4	5	
A	2	7	2	9	10	30
B	6	6	9	14	5	40
C	0	5	10	6	4	25

Considerando a avaliação média individual de cada funcionário nesse dia, a diferença entre as médias mais próximas é igual a

a) 0,32.
b) 0,21.
c) 0,35.
d) 0,18.
e) 0,24.

Resposta: Letra B.

$$M_A = \frac{2\cdot 1 + 7\cdot 2 + 2\cdot 3 + 9\cdot 4 + 10\cdot 5}{30} = \frac{108}{30} = 3{,}6$$

$$M_B = \frac{6\cdot 1 + 6\cdot 2 + 9\cdot 3 + 14\cdot 4 + 5\cdot 5}{40} = \frac{126}{40} = 3{,}15$$

$$M_C = \frac{0\cdot 1 + 5\cdot 2 + 10\cdot 3 + 6\cdot 4 + 4\cdot 5}{25} = \frac{84}{25} = 3{,}36$$

3,36-3,15=0,21

5. (UFES – ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO – UFES/2017) Considere n números x1, x2, ... , xn, em que x1 ≤ x2 ≤ ··· ≤ xn . A mediana desses números é igual a x(n + 1)/2, se n for ímpar, e é igual à média aritmética de xn ⁄ 2 e x(n + 2)/2, se n for par. Uma prova composta por 5 questões foi aplicada a uma turma de 24 alunos. A tabela seguinte relaciona o número de acertos obtidos na prova com o número de alunos que obtiveram esse número de acertos.

Número de acertos	Número de alunos
0	4
1	5
2	4
3	3
4	5
5	3

A penúltima linha da tabela acima, por exemplo, indica que 5 alunos tiveram, cada um, um total de 4 acertos na prova. A mediana dos números de acertos é igual a

a) 1,5
b) 2
c) 2,5
d) 3
e) 3,5

Resposta: Letra B.
Como 24 é um número par, devemos fazer a segunda regra:

$$x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}} = x_{\frac{24}{12}} + x_{\frac{26}{2}} = \frac{x_{12} + x_{13}}{2} = 2$$

6. (UFAL – AUXILIAR DE BIBLIOTECA – COPEVE/2016) A tabela apresenta o número de empréstimos de livros de uma biblioteca setorial de um Instituto Federal, no primeiro semestre de 2016.

Mës	Empréstimos
Janeiro	15
Fevereiro	25
Março	22
Abril	30
Maio	28
Junho	15

Dadas as afirmativas,

I. A biblioteca emprestou, em média, 22,5 livros por mês.
II. A mediana da série de valores é igual a 26.
III. A moda da série de valores é igual a 15.

Verifica-se que está(ão) correta(s)

a) II, apenas.
b) III, apenas.
c) I e II, apenas.
d) I e III, apenas.
e) I, II e III.

Resposta: Letra D.

$$m = \frac{15 + 25 + 22 + 30 + 28 + 15}{6} = \frac{135}{6} = 22,5$$

Mediana
Vamos colocar os números em ordem crescente

15,15,22,25,28,30

$$Mediana = \frac{22 + 25}{2} = \frac{47}{2} = 23,5$$

Moda é o número que mais aparece, no caso o 15.

7. (COSANPA - QUÍMICO – FADESP/2017) Algumas Determinações do teor de sódio em água (em mg L-1) foram executadas (em triplicata) paralelamente por quatro laboratórios e os resultados são mostrados na tabela abaixo.

Replicatas	Laboratório			
	1	2	3	4
1	30,3	30,9	30,3	30,5
2	30,4	30,8	30,7	30,4
3	30,0	30,6	30,4	30,7
Média	30,20	30,77	30,47	30,53
Desvio Padrão	0,20	0,15	0,21	0,15

Utilize essa tabela para responder à questão.
O laboratório que apresenta o maior erro padrão é o de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

Resposta: Letra C.
Como o desvio padrão é maior no 3, o erro padrão é proporcional, portanto também é maior em 3.

8. (ANAC – ANALISTA ADMINISTRATIVO- ESAF/2016) Os valores a seguir representam uma amostra

3 3 1 5 4 6 2 4 8

Então, a variância dessa amostra é igual a

a) 4,0
b) 2,5.
c) 4,5.
d) 5,5
e) 3,0

Resposta: Letra C.

$$\bar{x} = \frac{3 + 3 + 1 + 5 + 4 + 6 + 2 + 4 + 8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-4)^2 + (3-4)^2 + (1-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (8-4)^2}{8} = \frac{1+1+9+1+0+4+4+0+16}{8} = \frac{36}{8} = 4,5$$

9. (MPE/SP – OFICIAL DE PROMOTORIA I – VUNESP/2016) A média de salários dos 13 funcionários de uma empresa é de R$ 1.998,00. Dois novos funcionários foram contratados, um com o salário 10% maior que o do outro, e a média salarial dos 15 funcionários passou a ser R$ 2.013,00. O menor salário, dentre esses dois novos funcionários, é igual a

a) R$ 2.002,00.
b) R$ 2.006,00.
c) R$ 2.010,00.
d) R$ 2.004,00.
e) R$ 2.008,00.

Resposta: Letra C. Vamos chamar de x a soma dos salários dos 13 funcionários
x/13=1998
X=13.1998
X=25974
Vamos chamar de y o funcionário contratado com menor valor e, portanto, 1,1y o com 10% de salário maior, pois ele ganha y+10% de y
Y+0,1y=1,1y
(x+y+1,1y)/15=2013
25974+2,1y=15·2013
2,1y=30195-25974
2,1y=4221
Y=2010

10. (PREF. DE NITERÓI – AGENTE FAZENDÁRIO – FGV/2015) Os 12 funcionários de uma repartição da prefeitura foram submetidos a um teste de avaliação de conhecimentos de computação e a pontuação deles, em uma escala de 0 a 100, está no quadro abaixo.

50	55	55	55	55	60
62	63	65	90	90	100

O número de funcionários com pontuação acima da média é:

a) 3;
b) 4;
c) 5;
d) 6;
e) 7.

Resposta: Letra A.

$$M = \frac{50+55+55+55+55+60+62+63+65+90+90+100}{12} = \frac{800}{12}$$

M=66,67
Apenas 3 funcionários estão acima da média.

NOÇÕES DE GEOMETRIA – FORMA, ÂNGULOS, ÁREA, PERÍMETRO, VOLUME, TEOREMAS DE PITÁGORAS OU DE TALES.

Introdução a Geometria Plana

Ponto, Reta e Plano

A definição dos entes primitivos **ponto**, **reta** e **plano** é quase impossível, o que se sabe muito bem e aqui será o mais importante é sua representação geométrica e espacial.

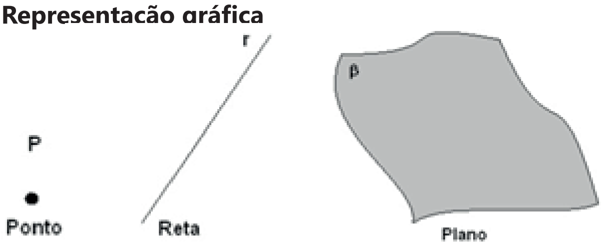
Representação, (notação)

→ Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas; ex: A, B, C,...

→ Retas serão representados por letras latinas minúsculas; ex: a, b, c,...

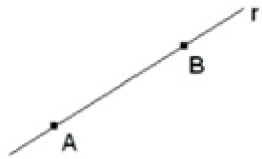
→ Planos serão representados por letras gregas minúsculas; ex: β,∞,α,...

Representação gráfica

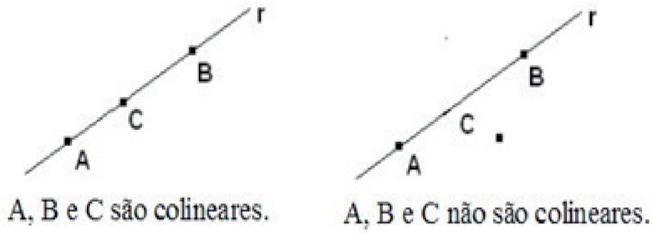


Postulados primitivos da geometria, qualquer postulado ou axioma é aceito sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova.

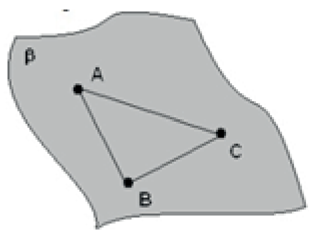
- Numa reta bem como fora dela há infinitos pontos distintos.
- Dois pontos determinam uma única reta (uma e somente uma reta).



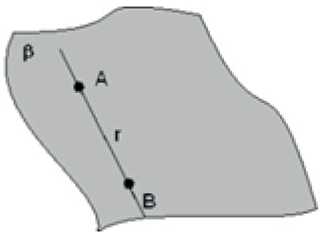
- Pontos colineares pertencem à mesma reta.



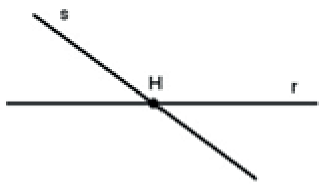
- Três pontos determinam um único plano.



- Se uma reta contém dois pontos de um plano, esta reta está contida neste plano.



- Duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.



Observe que . Sendo que H está contido na reta r e na reta s.

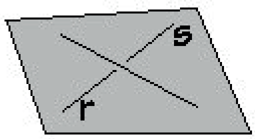
Um plano é um subconjunto do espaço de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contida no conjunto.

Um plano no espaço pode ser determinado por qualquer uma das situações:

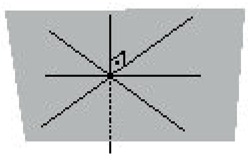
- Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta);
- Um ponto e uma reta que não contem o ponto;
- Um ponto e um segmento de reta que não contem o ponto;
- Duas retas paralelas que não se sobrepõe;
- Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe;
- Duas retas concorrentes;
- Dois segmentos de reta concorrentes.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Pode-se pensar de uma reta r desenhada no chão de uma casa e uma reta s desenhada no teto dessa mesma casa.



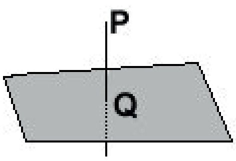
Uma reta é perpendicular a um plano no espaço , se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.



Uma reta r é paralela a um plano no espaço , se existe uma reta s inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.

Seja P um ponto localizado fora de um plano. A distância do ponto ao plano é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto que é a interseção entre o plano e o segmento.

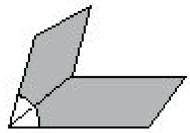
Se o ponto P estiver no plano, a distância é nula.



Planos concorrentes no espaço são planos cuja interseção é uma reta.

Planos paralelos no espaço são planos que não tem interseção.

Quando dois planos são concorrentes, dizemos que tais planos formam um diedro e o ângulo formado entre estes dois planos é denominado **ângulo** diedral. Para obter este ângulo diedral, basta tomar o ângulo formado por quaisquer duas retas perpendiculares aos planos concorrentes.



Planos normais são aqueles cujo ângulo diedral é um ângulo reto (90°).

Razão entre Segmentos de Reta

Segmento de reta é o conjunto de todos os pontos de uma reta que estão limitados por dois pontos que são as extremidades do segmento, sendo um deles o ponto inicial e o outro o ponto final. Denotamos um segmento por duas letras como, por exemplo, AB, sendo A o início e B o final do segmento.

Ex: AB é um segmento de reta que denotamos por AB.

Segmentos Proporcionais

Proporção é a igualdade entre duas razões equivalentes. De forma semelhante aos que já estudamos com números racionais, é possível estabelecer a proporcionalidade entre segmentos de reta, através das medidas desse segmentos.

Vamos considerar primeiramente um caso particular com quatro segmentos de reta com suas medidas apresentadas na tabela a seguir:

$m(\overline{AB}) = 2cm$ $m(\overline{PQ}) = 4$ cm
$m(\overline{CD}) = 3cm$ $m(\overline{RS}) = 6cm$

A razão entre os segmentos e e a razão entre os segmentos e , são dadas por frações equivalentes, isto é: ; PQ/RS = 4/6 e como , segue a existência de uma proporção entre esses quatro segmentos de reta. Isto nos conduz à definição de segmentos proporcionais.

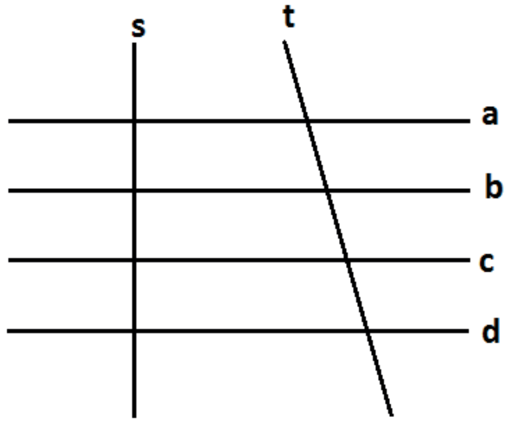
Diremos que quatro segmentos de reta, , , e , nesta ordem, são proporcionais se: .

Os segmentos e são os segmentos extremos e os segmentos e são os segmentos meios.

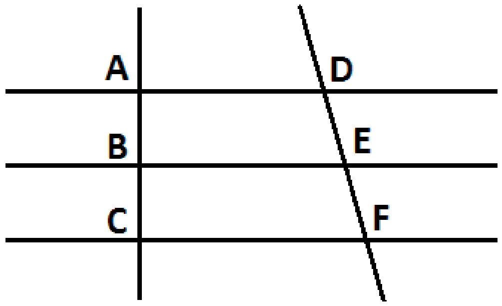
A proporcionalidade acima é garantida pelo fato que existe uma proporção entre os números reais que representam as medidas dos segmentos:

Feixe de Retas Paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado feixe de retas paralelas. A reta que intercepta as retas do feixe é chamada de reta transversal. As retas a, b, c e d que aparecem no desenho anexado, formam um feixe de retas paralelas enquanto que as retas s e t são retas transversais.

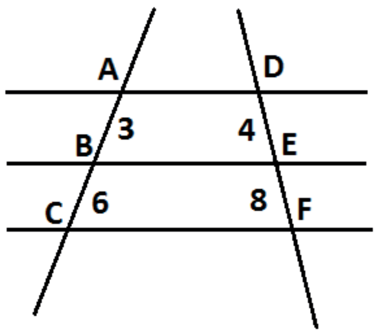


Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. A figura abaixo representa uma situação onde aparece um feixe de três retas paralelas cortadas por duas retas transversais.



Identificamos na sequência algumas proporções:

Ex: Consideremos a figura ao lado com um feixe de retas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas em centímetros.



Assim:

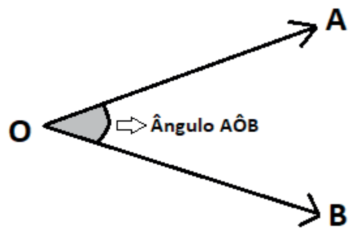
$$BC/AB = EF/DE$$
$$AB/DE = BC/EF$$
$$DE/AB = EF/BC$$

#FicaDica

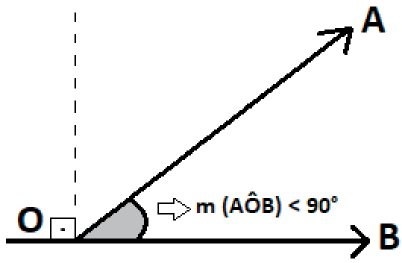
Uma proporção entre segmentos pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.

Ângulos

Ângulo: Do latim - angulu (canto, esquina), do grego - gonas; reunião de duas semi-retas de mesma origem não colineares.



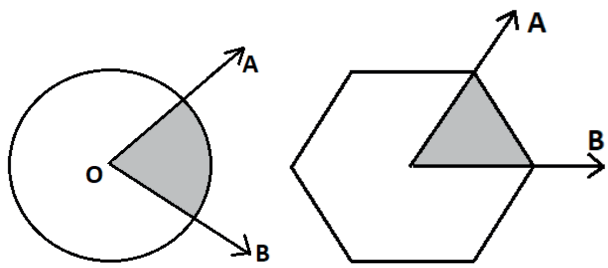
Ângulo Agudo: É o ângulo, cuja medida é menor do que 90º.



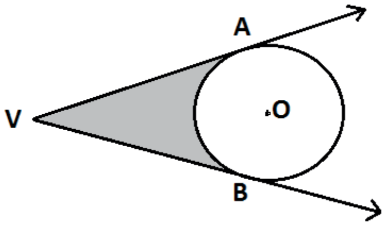
Ângulo Central

a) Da circunferência: é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência;

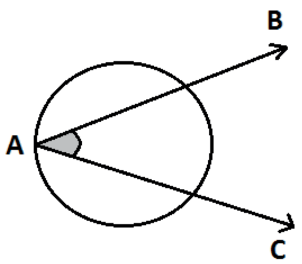
b) Do polígono: é o ângulo, cujo vértice é o centro do polígono regular e cujos lados passam por vértices consecutivos do polígono.



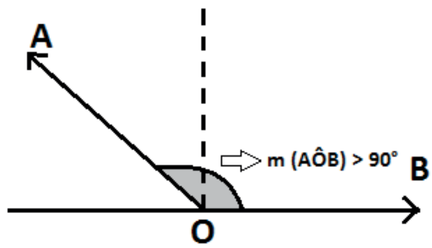
Ângulo Circunscrito: É o ângulo, cujo vértice não pertence à circunferência e os lados são tangentes à ela.



Ângulo Inscrito: É o ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e seus lados são secantes a ela.

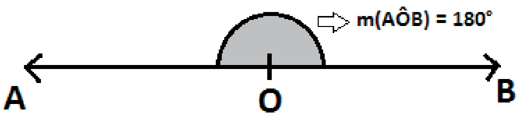


Ângulo Obtuso: É o ângulo cuja medida é maior do que 90º.



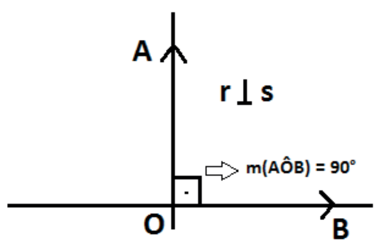
Ângulo Raso:

- É o ângulo cuja medida é 180º;

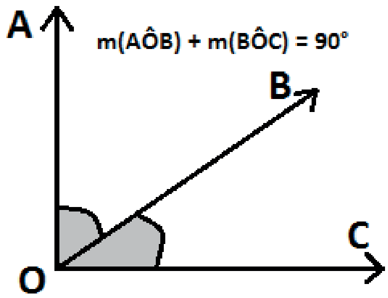


Ângulo Reto:

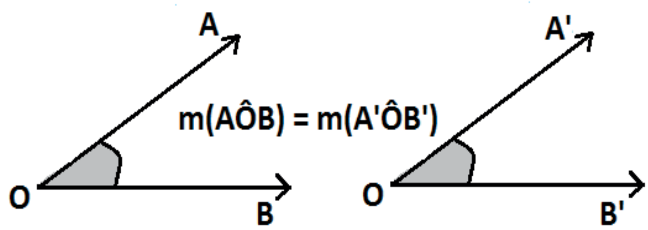
- É o ângulo cuja medida é 90º;
- É aquele cujos lados se apóiam em retas perpendiculares.



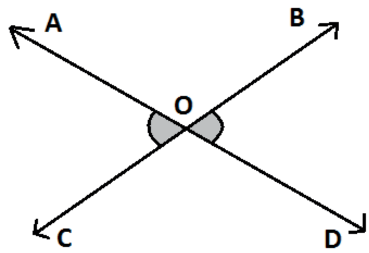
Ângulos Complementares: Dois ângulos são complementares se a soma das suas medidas é 90^0.



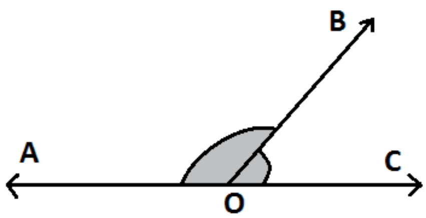
Ângulos Congruentes: São ângulos que possuem a mesma medida.



Ângulos Opostos pelo Vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.



Ângulos Suplementares: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma das suas medidas de dois ângulos é 180º.

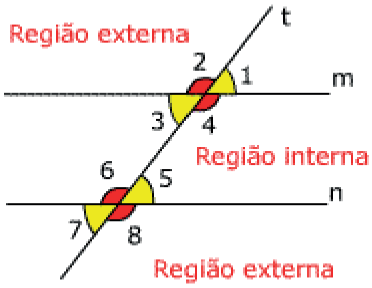


Grau: (º): Do latim - gradu; dividindo a circunferência em 360 partes iguais, cada arco unitário que corresponde a 1/360 da circunferência denominamos de grau.

Ângulos formados por duas retas paralelas com uma transversal

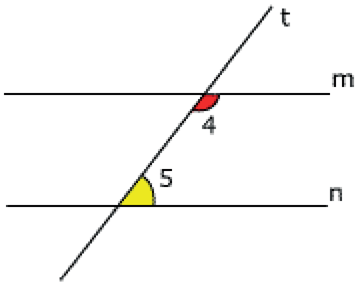
Lembre-se: Retas paralelas são retas que estão no mesmo plano e não possuem ponto em comum.

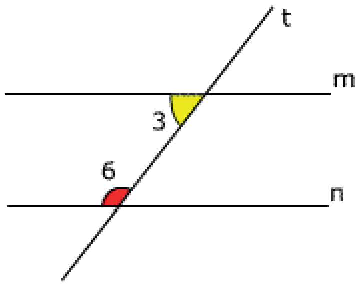
Vamos observar a figura abaixo:



Todos esses ângulos possuem relações entre si, e elas estão descritas a seguir:

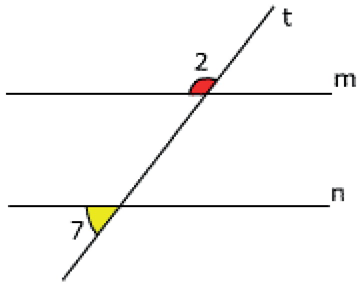
Ângulos colaterais internos: O termo colateral significa “mesmo lado” e sua propriedade é que a soma destes ângulos será sempre 180°

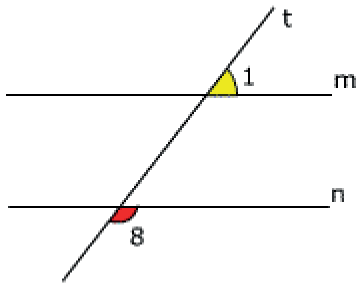




Assim a soma dos ângulos 4 e 5 é 180° e a soma dos ângulos 3 e 6 também será 180°

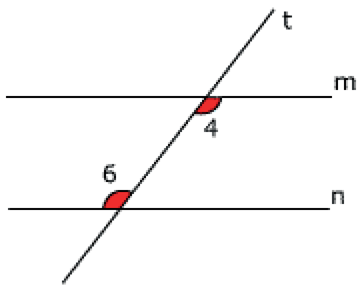
Ângulos colaterais externos: O termo colateral significa “mesmo lado” e sua propriedade é que a soma destes ângulos será sempre 180°

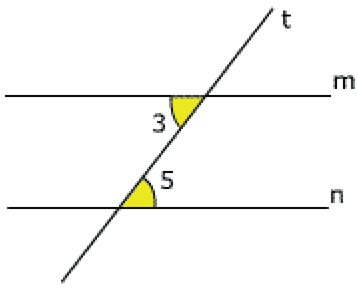




Assim a soma dos ângulos 2 e 7 é 180° e a soma dos ângulos 1 e 8 também será 180°

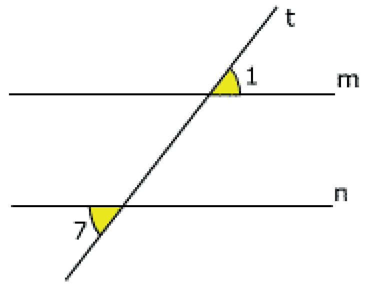
Ângulos alternos internos: O termo alterno significa lados diferentes e sua propriedade é que eles sempre serão congruentes

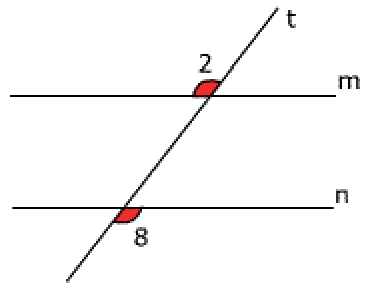




Assim, o ângulo 4 é igual ao ângulo 6 e o ângulo 3 é igual ao ângulo 5

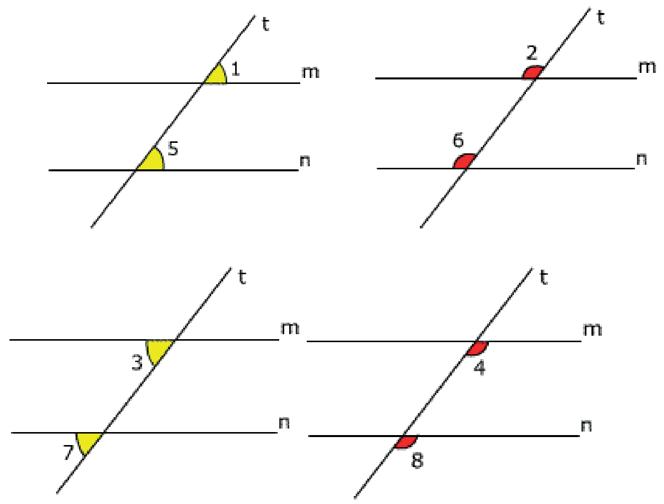
Ângulos alternos externos: O termo alterno significa lados diferentes e sua propriedade é que eles sempre serão congruentes





Assim, o ângulo 1 é igual ao ângulo 7 e o ângulo 2 é igual ao ângulo 8

Ângulos correspondentes: São ângulos que ocupam uma mesma posição na reta transversal, um na região interna e o outro na região externa.

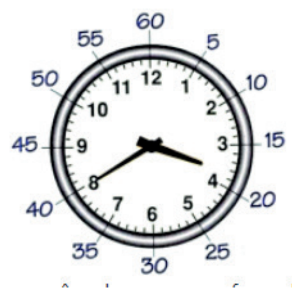


Assim, o ângulo 1 é igual ao ângulo 5, o ângulo 2 é igual ao ângulo 6, o ângulo 3 é igual ao ângulo 7 e o ângulo 4 é igual ao ângulo 8.

FIQUE ATENTO!
Há cinco classificações distintas para os ângulos formados por duas retas paralelas que intersectam uma transversal. Então, procure visualizar bem as imagens para associá-las a cada classificação existente.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

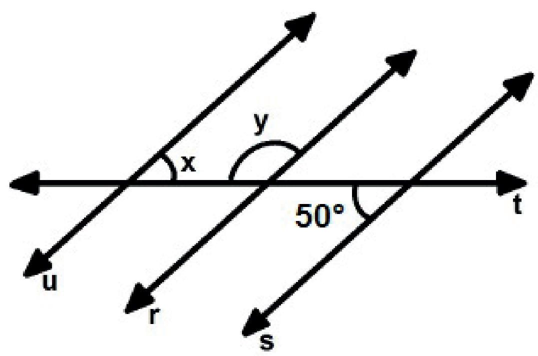
1. (CS-UFG-2016) Considere que a figura abaixo representa um relógio analógico cujos ponteiros das horas (menor) e dos minutos (maior) indicam 3 h e 40 min. Nestas condições, a medida do menor ângulo, em graus, formado pelos ponteiros deste relógio, é:



a) 120°
b) 126°
c) 135°
d) 150°

Resposta: Letra B.
Considerando que cada hora equivale a um ângulo de 30° (360/12 = 30) e que a cada 15 min o ponteiro da hora percorre 7,5°. Assim, as 3h e 40 min indica um ângulo de aproximadamente 126°.

2. Na imagem a seguir, as retas u, r e s são paralelas e cortadas por uma reta transversal. Determine o valor dos ângulos x e y.



Resposta: x = 50° e y = 130°

Facilmente observamos que os ângulos x e 50° são opostos pelo vértice, logo, x = 50°. Podemos constatar também que y e 50° são suplementares, ou seja:

$$50° + y = 180°$$
$$y = 180° - 50°$$
$$y = 130°$$

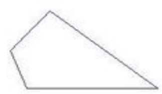
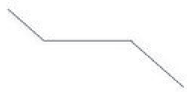
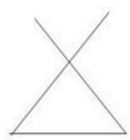
Portanto,os ângulos procurados são y = 130° e x = 50°.

Polígonos

Um polígono é uma figura geométrica plana limitada por uma linha poligonal fechada. A palavra "polígono" advém do grego e quer dizer muitos (poly) e ângulos (gon).

Linhas poligonais e polígonos

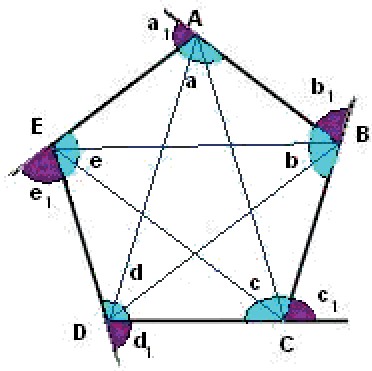
Linha poligonal é uma sucessão de segmentos consecutivos e não-colineares, dois a dois. Classificam-se em:

Linha poligonal fechada simples:	
Linha poligonal fechada não-simples:	
Linha poligonal aberta simples:	
Linha poligonal aberta não-simples:	

FIQUE ATENTO!

Polígono é uma linha fechada simples. Um polígono divide o plano em que se encontra em duas regiões (a interior e a exterior), sem pontos comuns.

Elementos de um polígono



Um polígono possui os seguintes elementos:

Lados: Cada um dos segmentos de reta que une vértices consecutivos: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$.

Vértices: Ponto de encontro de dois lados consecutivos: A, B, C, D, E

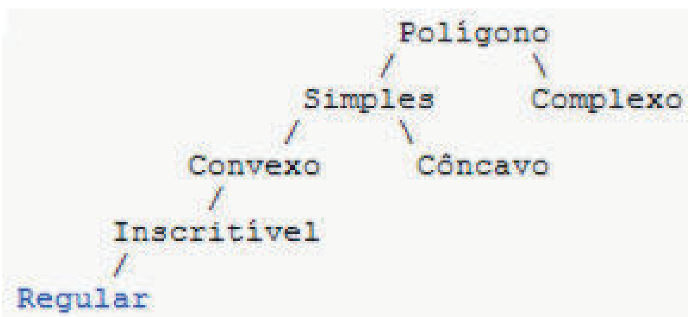
Diagonais: Segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$
Ângulos internos: Ângulos formados por dois lados consecutivos: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}$.

Ângulos externos: Ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo: $\hat{a}_1, b_1, c_1, d_1, e_1$

Classificação dos polígonos quanto ao número de lados

Nome	Número de lados	Nome	Número de lados
triângulo	3	quadrilátero	4
pentágono	5	hexágono	6
heptágono	7	octógono	8
eneágono	9	decágono	10
hendecágono	11	dodecágono	12
tridecágono	13	tetradecágono	14
pentadecágono	15	hexadecágono	16
heptadecágono	17	octodecágono	18
eneadecágono	19	icoságono	20

A classificação dos polígonos pode ser ilustrada pela seguinte árvore:



Um polígono é denominado simples se ele for descrito por uma fronteira simples e que não se cruza (daí divide o plano em uma região interna e externa), caso o contrário é denominado complexo.

Um polígono simples é denominado convexo se não tiver nenhum ângulo interno cuja medida é maior que 180°, caso o contrário é denominado côncavo.

Um polígono convexo é denominado circunscrito a uma circunferência ou polígono circunscrito se todos os vértices pertencerem a uma mesma circunferência.

Um polígono inscritível é denominado regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos forem congruentes.

Alguns polígonos regulares:

a) triângulo equilátero
b) quadrado
c) pentágono regular
d) hexágono regular

Propriedades dos polígonos

De cada vértice de um polígono de n lados, saem $d_v = n - 3$

O número de diagonais de um polígono é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Onde n é o número de lados do polígono.

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados (S_i) é dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados (S_e) é igual a:

$$S_e = \frac{360°}{n}$$

Em um polígono convexo de n lados, o número de triângulos formados por diagonais que saem de cada vértice é dado por n - 2.

A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados (a_i) é dada por:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

A medida do ângulo externo de um polígono regular de n lados (a_e) é dada por:

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

A soma das medidas dos ângulos centrais de um polígono regular de n lados (S_c) é igual a 360º.

A medida do ângulo central de um polígono regular de n lados () é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Polígonos regulares

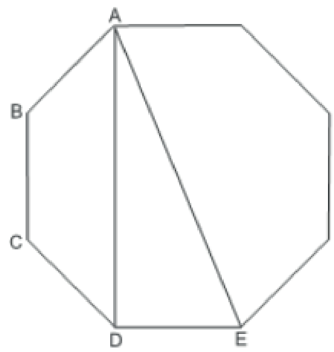
Os polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes. Todas as propriedades anteriores são válidas para os polígonos regulares, a diferença é que todos os valores são distribuídos uniformemente, ou seja, todos os ângulos terão o mesmo valor e todas as medidas terão o mesmo valor.

#FicaDica

Polígonos regulares são formas de polígonos mais estudadas e cobradas em questões de concursos.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

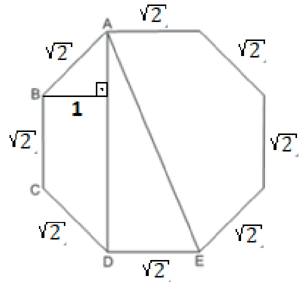
1. (PREF. DE POÁ-SP – ENGENHEIRO DE SEGURANÇA DE TRABALHO – VUNESP/2015) A figura ilustra um octógono regular de lado cm.



Sendo a altura do trapézio ABCD igual a 1 cm, a área do triângulo retângulo ADE vale, em cm^2

a) 5
b) 4
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{2} + 1$
e) 2

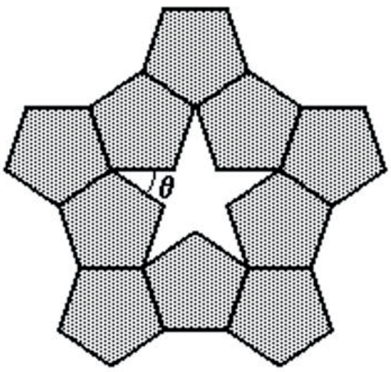
Resposta: Letra D.



Como a altura do trapézio mede 1 cm, temos um triangulo isósceles de hipotenusa AB, assim, o segmento $AD = \sqrt{2} + 2$. Assim, a área de ADE é:

$$A = \frac{(\sqrt{2}+2)\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

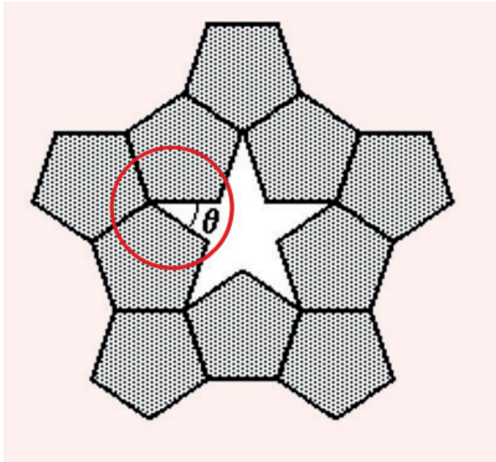
2. (UNIFESP - 2003) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura a seguir



Nessas condições, o ângulo θ mede:

a) 108°.
b) 72°.
c) 54°.
d) 36°.
e) 18°.

Resposta: Letra D.
Na ponta da estrela onde está destacado o ângulo θ, temos o encontro de três ângulos internos de pentágonos regulares. Para descobrir a medida de cada um desses ângulos, basta calcular a soma dos ângulos internos do pentágono e dividir por 5.



A fórmula para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono é: $S = (n - 2) \cdot 180$

*n é o número de lados do polígono. No caso desse exercício:

$$S = (5 - 2) \cdot 180$$
$$S = 3 \cdot 180$$
$$S = 540$$

Dividindo a soma dos ângulos internos por 5, pois um pentágono possui cinco ângulos internos, encontraremos 108° como medida de cada ângulo interno.
Observe na imagem anterior que a soma de três ângulos internos do pentágono com o ângulo θ tem como resultado 360°.

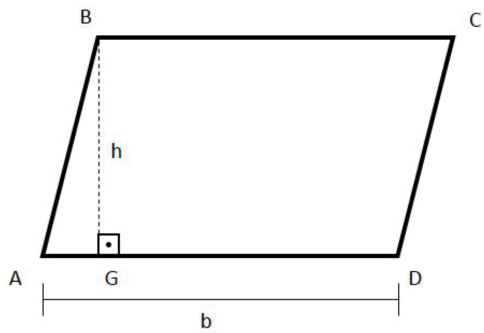
$$108 + 108 + 108 + \theta = 360$$
$$324 + \theta = 360$$
$$\theta = 360 - 324$$
$$\theta = 36°$$

Quadriláteros, Circunferência e Círculo

Quadriláteros

São figuras que possuem quatro lados dentre os quais temos os seguintes subgrupos

Paralelogramo



Características:

Possuem lados paralelos, dois a dois, ou seja: $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$.

Além de paralelos, os lados paralelos possuem a mesma medida, ou seja: $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$

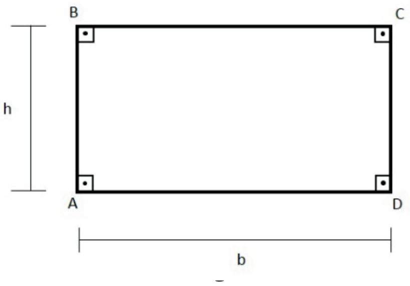
A altura é medida em relação a distância entre os segmentos paralelos, ou seja: $\overline{BG}$: altura = h

A base é justamente a medida dos lados que se mediu a altura: $\overline{AD}$: base = b

A área é calculada como o produto da base pela altura: Área= b·h

O perímetro é calculado como a soma das medidas de todos os quatro lados: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Retângulo



Características:

Possuem lados paralelos, dois a dois, ou seja: $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Além de paralelos, os lados paralelos possuem a mesma medida, ou seja: $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$

Diferentemente do paralelogramo, todos os ângulos do retângulo medem 90°: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

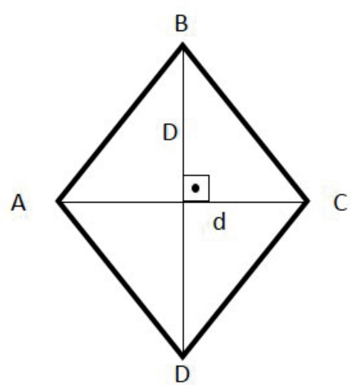
No retângulo, um par de lados paralelos será a base e o outro será a altura, no desenho: $\overline{AB}$: altura = h e $\overline{AD}$: base = b

A área é calculada como o produto da base pela altura: Área= b·h

O perímetro é calculado como a soma das medidas de todos os quatro lados:

Perímetro = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2b + 2h$

Losango



Características:

Possuem lados paralelos, dois a dois, ou seja: $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Possuem os quatro lados com medidas iguais: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{AD} = \overline{BC}$

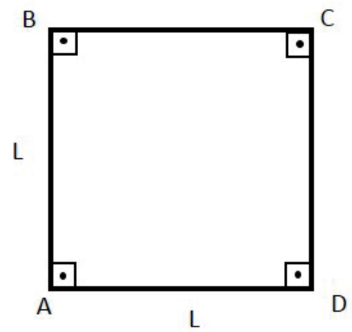
No losango, definem-se diagonais como a distância entre vértices opostos, assim:

$\overline{BD}$: diagonal maior = D e $\overline{AC}$: diagonal menor = d

A área é calculada a partir das diagonais e não dos lados: Área = $\frac{D \cdot d}{2}$

O perímetro é calculado como a soma das medidas de todos os quatro lados: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Quadrado



Características:

Possuem lados paralelos, dois a dois, ou seja: $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Possuem os quatro lados com medidas iguais: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{AD} = \overline{BC}$

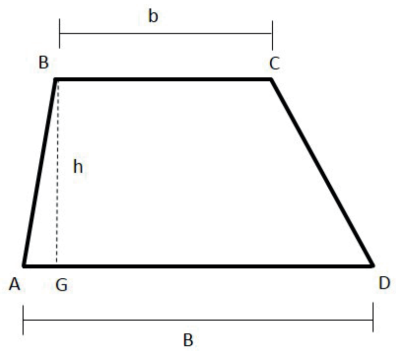
Diferentemente do losango, todos os ângulos do quadrado medem 90°: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

Seguindo a lógica do retângulo, temos o valor da base e da altura iguais neste caso: $\overline{BC}$: lado = L e $\overline{AB}$: lado =

A área é calculada de maneira simples: Área = L^2

O perímetro é calculado como a soma das medidas de todos os quatro lados: Perímetro = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4L$

Trapézio



Características:

Possuirá apenas um par de lados paralelos que serão chamados de bases maior e menor:

$\overline{AD}$// $\overline{BC}$, $\overline{AB}$: base maior = B e $\overline{CD}$: base menor = b

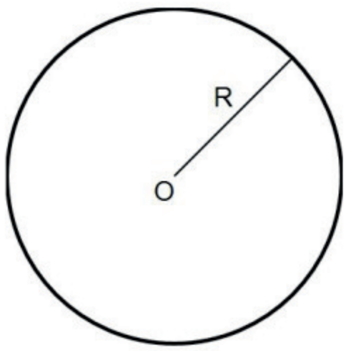
A altura será definida como a distância entre as bases: $\overline{BG}: \text{altura} = h$

A área é calculada em função das bases e da altura: $\text{Área} = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$

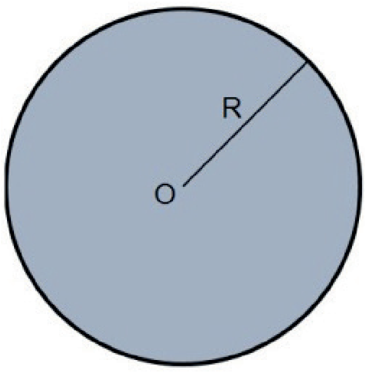
O perímetro é calculado como a soma das medidas de todos os quatro lados: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Circunferência e Círculo

Uma circunferência é definida como o conjunto de pontos cuja distância de um ponto, denominado de centro, O é igual a R, definido como raio.



Já um círculo é definido como um conjunto de pontos cuja distância de O é menor ou igual a R.



Características:

A medida relevante da circunferência é o raio (R) que é a distância de qualquer ponto da circunferência em relação ao centro C.

A área é calculada em função do raio: $\text{Área} = \pi R^2$

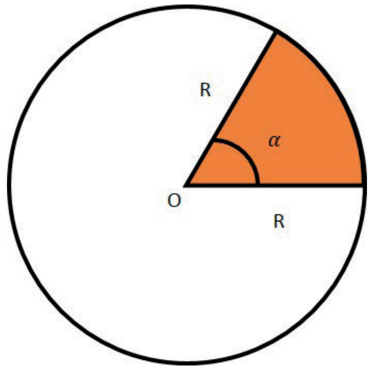
O perímetro, também chamado de comprimento da circunferência, é calculado em função do raio também: $\text{Perímetro} = 2\pi R$

Setor Circular

Um Setor Circular é uma região de um círculo compreendida entre dois segmentos de reta que se iniciam no centro e vão até a circunferência.

#FicaDica

Em termos práticos, um setor circular é um "pedaço" de um círculo.



Características:

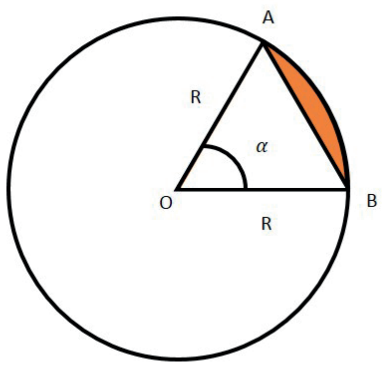
O ângulo α é definido como ângulo central

Área do Setor Circular (para α em **graus**): $A = \frac{\alpha \pi R^2}{360}$

Área do Setor Circular (para α em **radianos**): $A = \frac{\alpha R^2}{2}$

Segmento Circular

Um Segmento Circular é uma região de um círculo compreendida entre um segmento que liga os pontos de cruzamento dos segmentos de reta com a circunferência, ao qual definimos como corda $\overline{AB}$ e a circunferência.



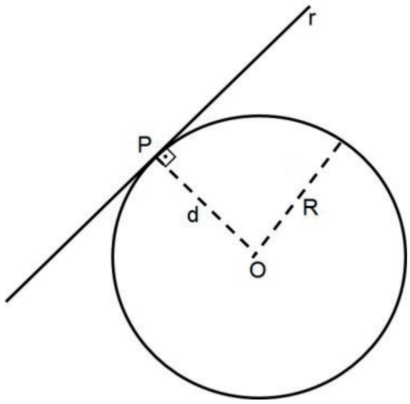
Características:

A Área do Setor Circular (para α em **radianos**): $A = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$

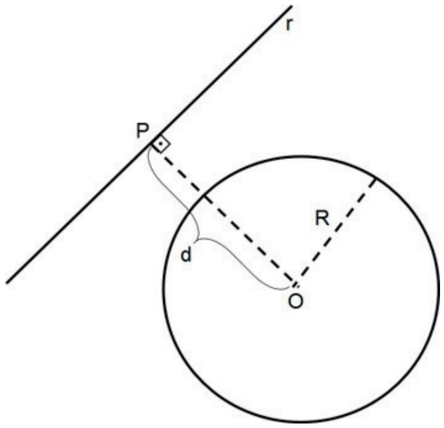
Posições Relativas entre Retas e Circunferências

Dado uma circunferência de raio R e uma reta 'r' cuja distância ao centro da circunferência é 'd', temos as seguintes posições relativas:

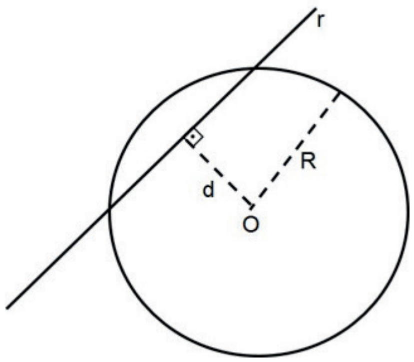
Reta Tangente: Reta e circunferência possuem apenas um ponto em comum $(d_{OP} = R)$



Reta Exterior: Reta e circunferência não possuem pontos em comum $(d_{OP} > R)$

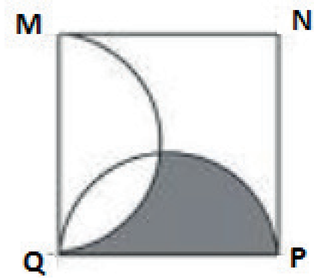


Reta Secante: Reta e circunferência possuem dois pontos em comum $(d_{OP} < R)$



EXERCÍCIOS COMENTADOS

1.(SEEDUC-RJ – Professor – CEPERJ/2015) O quadrado MNPQ abaixo tem lado igual a 12cm. Considere que as curvas MQ e QP representem semicircunferências de diâmetros respectivamente iguais aos segmentos MQ e QP.

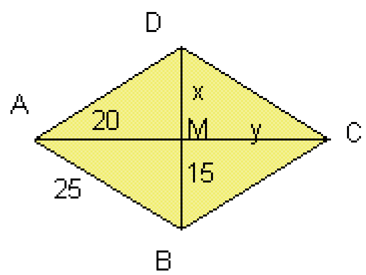


A área sombreada, em cm², corresponde a:

a) 30
b) 36
c) $3(46\pi - 2)$
d) $6(36\pi - 1)$
e) $2(6\pi - 1)$

Resposta: Letra B.
Aplicando a fórmula do segmento circular, encontra-se a área de intersecção dos dois círculos. Subtraindo esse valor da área do semicírculo, chega-se ao resultado.

2. A figura abaixo é um losango. Determine o valor de **x** *e* **y**, a medida da diagonal AC*, da diagonal* $\overline{BD}$ *e o perímetro do triângulo BMC.*



Resposta:
Aplicando as relações geométricas referentes ao losango, tem-se:

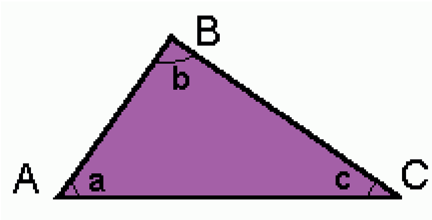
$$x = 15$$
$$y = 20$$
$$\overline{AC} = 20 + 20 = 40$$
$$\overline{BD} = 15 + 15 = 30$$
$$BMC = 15 + 20 + 25 = 60$$

Triângulos e Teorema de Pitágoras

Definição

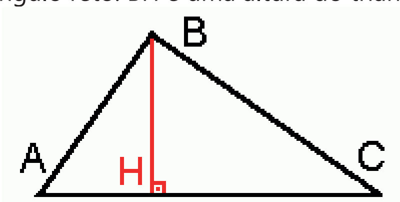
Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. Talvez seja o polígono mais importante que existe. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

Apresentaremos agora alguns objetos com detalhes sobre os mesmos.

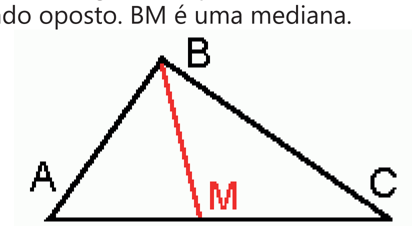


a) **Vértices:** A,B,C.
b) **Lados:** AB,BC e AC.
c) Ângulos internos: a, b e c.

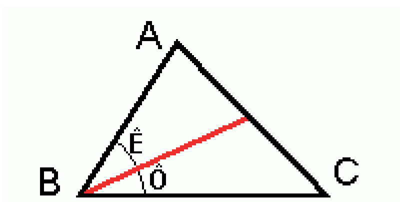
Altura: É um segmento de reta traçada a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. BH é uma altura do triângulo.



Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. BM é uma mediana.

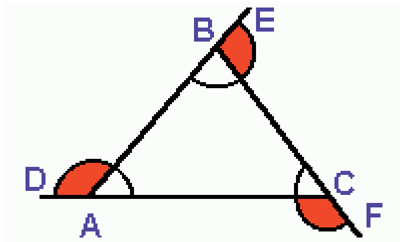


Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo B está dividido ao meio e neste caso Ê = Ô.



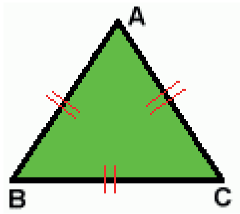
Ângulo Interno: É formado por dois lados do triângulo. Todo triângulo possui três ângulos internos.

Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente (ao lado).

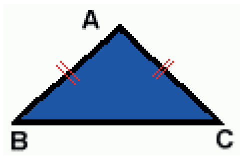


Classificação dos triângulos quanto ao número de lados

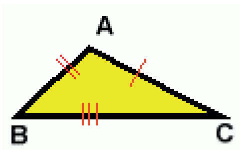
Triângulo Equilátero: Os três lados têm medidas iguais. .
$m(AB) = m(BC) = m(CA)$



Triângulo Isósceles: Dois lados têm medidas iguais.
$m(AB) = m(AC).$

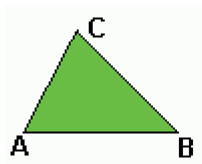


Triângulo Escaleno: Todos os três lados têm medidas diferentes.

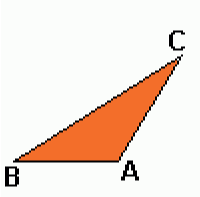


Classificação dos triângulos quanto às medidas dos ângulos

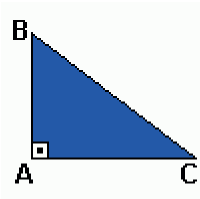
Triângulo Acutângulo: Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90º.



Triângulo Obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º.



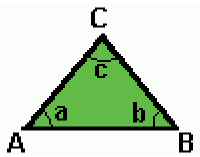
Triângulo Retângulo: Possui um ângulo interno reto (90 graus). Atenção a esse tipo de triângulo pois ele é muito cobrado!



Medidas dos Ângulos de um Triângulo

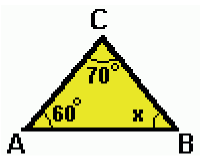
Ângulos Internos: Consideremos o triângulo ABC. Poderemos identificar com as letras **a**, **b** e **c** as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

> **#FicaDica**
>
> Em alguns locais escrevemos as letras maiúsculas, acompanhadas de acento () para representar os ângulos.

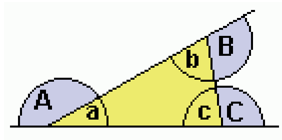


Seguindo a regra dos polígonos, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus, isto é: $a + b + c = 180°$

Ex: Considerando o triângulo abaixo, podemos achar o valor de x, escrevendo: $70º + 60º + x = 180º$ e dessa forma, obtemos $x = 180º - 70º - 60º = 50º$

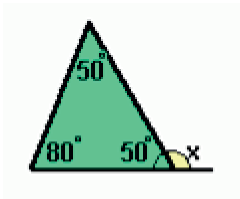


Ângulos Externos: Consideremos o triângulo ABC. Como observamos no desenho, as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos.



Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim: $A = b + c, B = a + c, C = a + b$

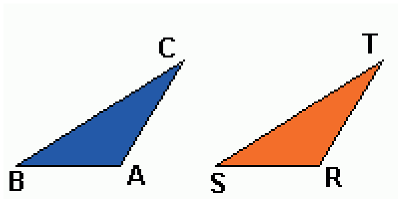
Ex: No triângulo desenhado, podemos achar a medida do ângulo externo x, escrevendo: $x = 50º + 80º = 130°$.



Congruência de Triângulos

Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho. Para escrever que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, usaremos a notação: $ABC \sim DEF$

Para os triângulos das figuras abaixo, existe a congruência entre os lados, tal que: $AB \sim RS, BC \sim ST, CA \sim T$ e entre os ângulos:

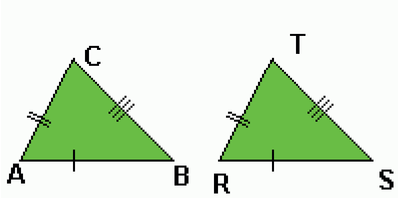


Se o triângulo ABC é congruente ao triângulo RST, escrevemos: $\hat{A} \sim \hat{R}$, $\hat{B} \sim \hat{S}$, $\hat{C} \sim \hat{T}$

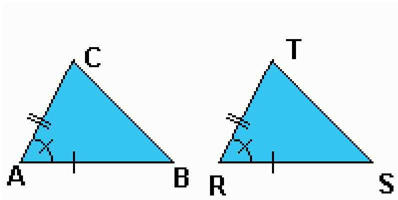
> **FIQUE ATENTO!**
>
> Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas. Deste modo, para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecerem três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado. Para facilitar o estudo, indicaremos os lados correspondentes congruentes marcados com símbolos gráficos iguais.

Casos de Congruência de Triângulos

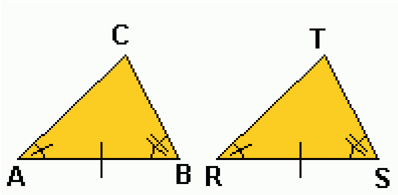
LLL (Lado, Lado, Lado): Os três lados são conhecidos. Dois triângulos são congruentes quando têm, respectivamente, os três lados congruentes. Observe que os elementos congruentes têm a mesma marca.



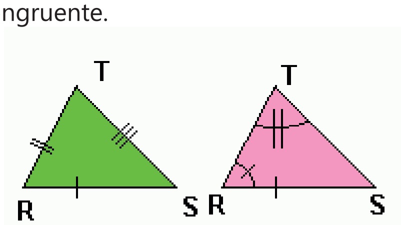
LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dados dois lados e um ângulo. Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados congruentes e os ângulos formados por eles também são congruentes.



ALA (Ângulo, Lado, Ângulo): Dados dois ângulos e um lado. Dois triângulos são congruentes quando têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, congruentes.



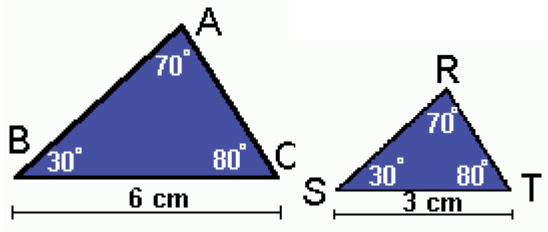
LAAo (Lado, Ângulo, Ângulo oposto): Conhecido um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado. Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, um ângulo, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruente.



Semelhança de Triângulos

Duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Se duas figuras R e S são semelhantes, denotamos: .

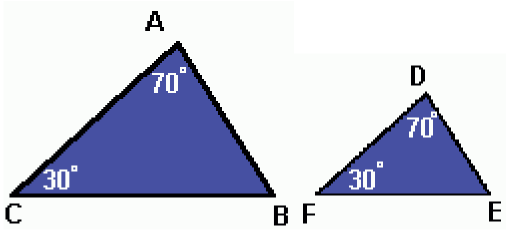
Ex: As ampliações e as reduções fotográficas são figuras semelhantes. Para os triângulos:



Os três ângulos são respectivamente congruentes, isto é: $A \sim R$, $B \sim S$, $C \sim T$

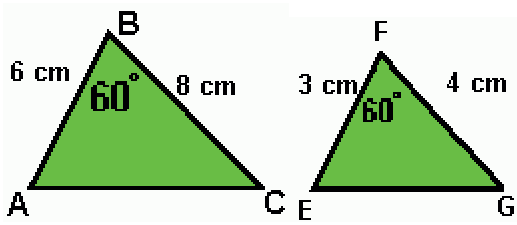
Casos de Semelhança de Triângulos

Dois ângulos congruentes: Se dois triângulos tem dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Se $A \sim D$ e $C \sim F$ então: $ABC \cong DEF$

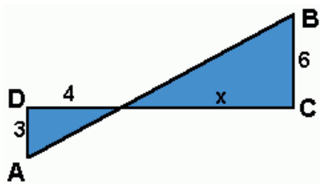
Dois lados proporcionais: Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.



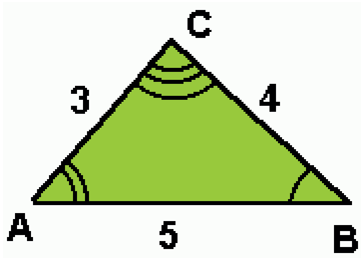
Como $m(AB) \ / \ m(EF) \ = m(BC) \ / \ m(FG) \ = \ 2$,

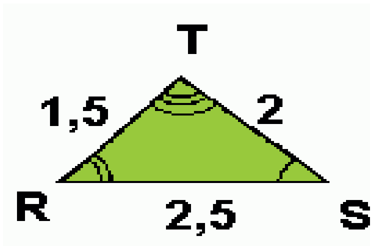
então $ABC \cong EFG$

Ex: Na figura abaixo, observamos que um triângulo pode ser "rodado" sobre o outro para gerar dois triângulos semelhantes e o valor de x será igual a 8.



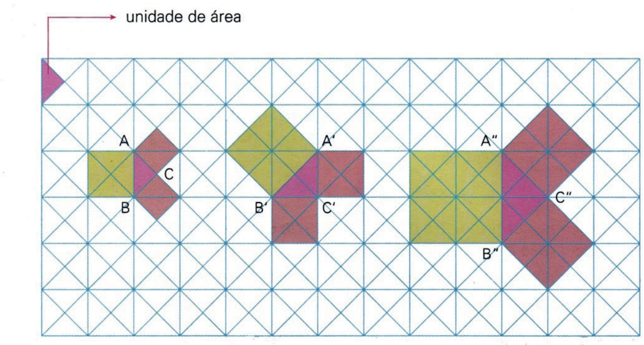
Três lados proporcionais: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.





Teorema de Pitágoras

Dizem que Pitágoras, filósofo e matemático grego que viveu na cidade de Samos no século VI a. C., teve a intuição do seu famoso teorema observando um mosaico como o da ilustração a seguir.

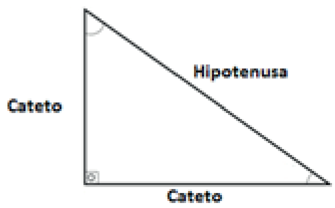


Observando o quadro, podemos estabelecer a seguinte tabela:

	Triângulo ABC	Triângulo A\`B\`C\`	Triângulo A\`\`B\`\`C\`\`
Área do quadrado construído sobre a hipotenusa	4	8	16
Área do quadrado construído sobre um cateto	2	4	8
Área do quadrado construído sobre o outro cateto	2	4	9

Como $4 = 2 + 2 \cdot 8 = 4 + 4 \cdot 16 = 8 + 8$, Pitágoras observou que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

A descoberta feita por Pitágoras estava restrita a um triângulo particular: o triângulo retângulo isósceles. Estudos realizados posteriormente permitiram provar que a relação métrica descoberta por Pitágoras era válida para todos os triângulos retângulos. Os lados do triângulo retângulo são identificados a partir a figura a seguir:



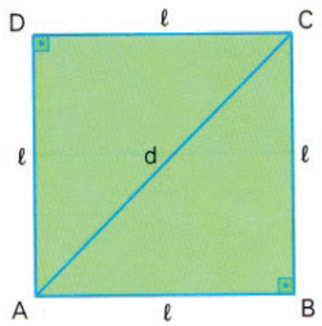
Onde os catetos são os segmentos que formam o ângulo de 90° e a hipotenusa é o lado oposto a esse ângulo. Chamando de "a" e "b" as medidas dos catetos e "c" a medida da hipotenusa, define-se um dos teoremas mais conhecidos da matemática, o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Onde a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Teorema de Pitágoras no quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida d da diagonal e a medida l do lado de um quadrado.



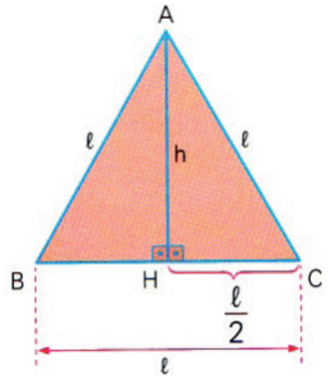
d= medida da diagonal
l= medida do lado

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = l\sqrt{2}$$

Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida h da altura e a medida l do lado de um triângulo equilátero.



l= medida do lado
h= medida da altura

No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem. Logo, é ponto médio do lado BC. No triângulo retângulo AHC, é ângulo reto. De acordo com o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

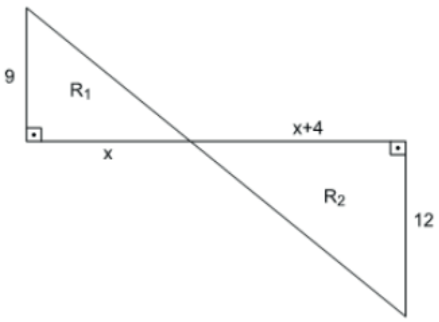
$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1.(TJ-SP – ESCREVENTE JUDICIÁRIO – VUNESP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2, e , ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.

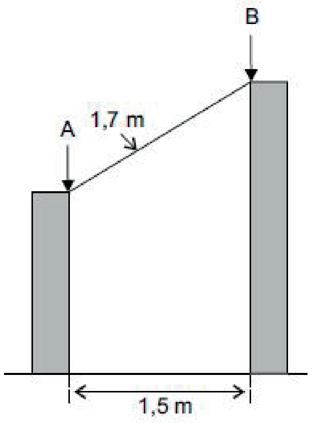


Se a área de R_1 é 54 m², então o perímetro de R_2, é, em metros, igual a:

a) 54
b) 48
c) 36
d) 40
e) 42

Resposta: Letra B.
Esse problema se resolve tanto por semelhança de triângulos, quanto pela área de . Em ambos os casos, encontraremos x = 12 m. Após isso, pelo teorema de Pitágoras, achamos a hipotenusa do triângulo R_2, que será 20 m. Assim, o perímetro será 12+16+20 = 48 m.

2. (PM SP 2014 – VUNESP). Duas estacas de madeira, perpendiculares ao solo e de alturas diferentes, estão distantes uma da outra, 1,5 m. Será colocada entre elas uma outra estaca de 1,7 m de comprimento, que ficará apoiada nos pontos A e B, conforme mostra a figura.



A diferença entre a altura da maior estaca e a altura da menor estaca, nessa ordem, em cm, é:

a) 95.
b) 75.
c) 85.
d) 80.
e) 90.

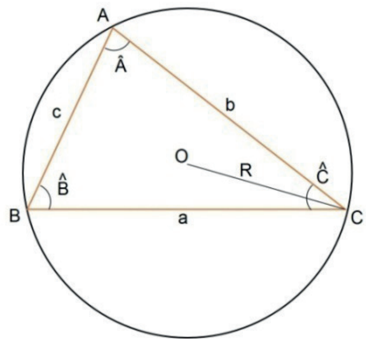
Resposta: Letra D.
Note que x é exatamente a diferença que queremos, e podemos calculá-lo através do Teorema de Pitágoras:

$$1{,}7^2 = 1{,}5^2 + x^2$$
$$2{,}89 = 2{,}25 + x^2$$
$$x^2 = 2{,}89 - 2{,}25$$
$$x^2 = 0{,}64x = 0{,}8 \text{ m ou } 80 \text{ cm}$$

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Lei dos Senos

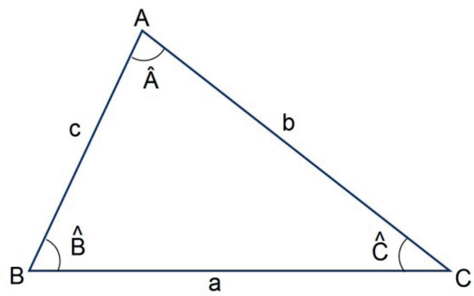
A Lei dos senos relaciona os senos dos ângulos de um triângulo qualquer (não precisa necessariamente ser retângulo) com os seus respectivos lados opostos. Além disso, há uma relação direta com o raio da circunferência circunscrita neste triângulo:



$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} = 2R$$

Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos é considerada uma generalização do teorema de Pitágoras, onde para qualquer triângulo, conseguimos relacionar seus lados com a subtração de um termo que possui o ângulo oposto do lado de referência.

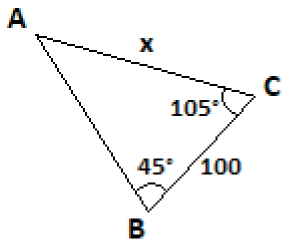


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

FIQUE ATENTO!
Há três formas distintas de utilizar a Lei dos Cossenos. Quando for utilizá-la, tenha cuidado ao expressar os termos conhecidos e a incógnita em uma das três equações propostas. Note que o termo à esquerda do sinal de igual é o lado oposto ao ângulo que deve aparecer na equação.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Calcule a medida de x:



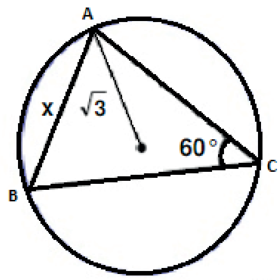
Resposta: Aplicando a lei dos senos, lembrando que temos que aplicar ao ângulo oposto ao lado que iremos usar. Assim, o lado de medida 100 possui o ângulo $\widehat{A}$ como oposto, e ele mede 30°, dado as medidas dos outros ângulos, assim:

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{100}{\text{sen } 30°}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}/2} = \frac{100}{1/2}$$

$$x = 100\sqrt{2}$$

2.Calcule a medida de x:



Resposta: Aplicando a lei dos senos, lembrando que ela se relaciona com a circunferência circunscrita ao triângulo:

$$\frac{x}{\text{sen } 60°} = 2R$$

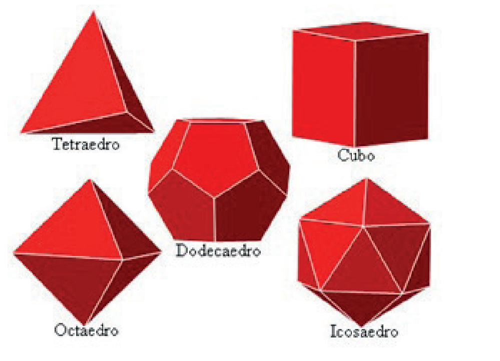
$$\frac{x}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}$$

$$x = 3$$

Geometria Espacial

Poliedros

Poliedros são sólidos compostos por faces, arestas e vértices. As faces de um poliedro são polígonos. Quando as faces do poliedro são polígonos regulares e todas as faces possuem o mesmo número de arestas, temos um poliedro regular. Há 5 tipos de poliedros regulares, a saber:

Tetraedro: poliedro de quatro faces Hexaedro: poliedro de seis faces (cubo) Octaedro: poliedro de oito faces Dodecaedro: poliedro de doze faces Icosaedro: poliedro de vinte faces	

Já poliedros não regulares são sólidos cujas faces ou são polígonos não regulares ou não possuem o mesmo número de arestas. Os exemplos mais usuais são pirâmides (com exceção do tetraedro) e prismas (com exceção do cubo).

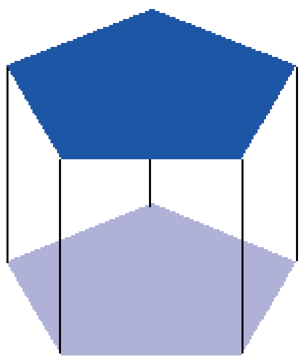
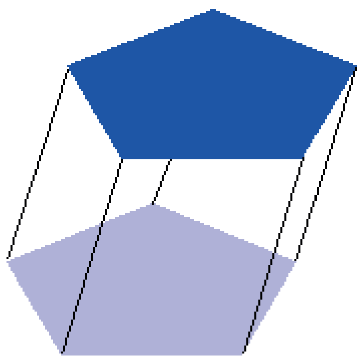
Relação de Euler: relação entre o número de arestas (A), faces (F) e vértices (V) de um poliedro convexo. É dada por:

$$V - A + F = 2$$

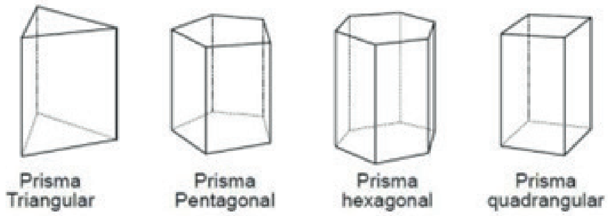
Prismas

Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto
As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.
As faces laterais são retangulares.
Prisma oblíquo
As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são oblíquas (formam um ângulo diferente de um ângulo reto) ao plano da base.
As faces laterais não são retangulares.

	**Bases**: regiões poligonais congruentes **Altura**: distância entre as bases **Arestas laterais paralelas**: mesmas medidas **Faces laterais**: paralelogramos	
Prisma reto	**Aspectos comuns**	**Prisma oblíquo**

Prismas regulares: prismas que possuem como base, polígonos regulares (todos os lados iguais).



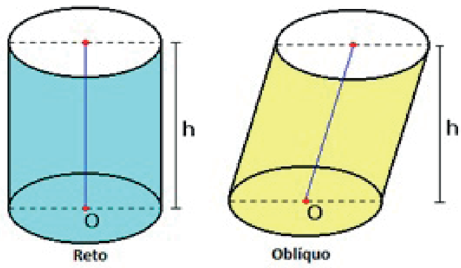
Sendo A_B , a área da base, ou seja, a área do polígono correspondente e A_L , a área lateral, caracterizada pela soma das áreas dos retângulos formados entre as duas bases, temos que:

Área total: $A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

Volume: $V = A_B . h$, onde h é a altura, caracterizada pela distância entre as duas bases

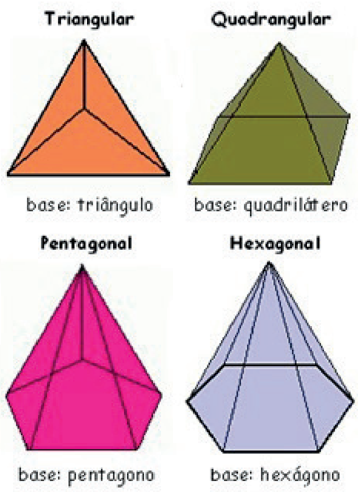
Cilindros

São sólidos parecidos com prismas, que apresentam bases circulares e também podem ser retos ou oblíquos.



Sendo R o raio da base, a altura do cilindro, temos que:
Área da base: $A_B = \pi R^2$
Área lateral: $A_L = 2\pi Rh$
Área total: $A_T = A_L + 2A_B$
Volume: $V = A_B \cdot h$
4. Pirâmides

As pirâmides possuem somente uma base e as faces laterais são triângulos. A distância do vértice de encontro dos triângulos com a base é o que determina a altura da pirâmide (h).



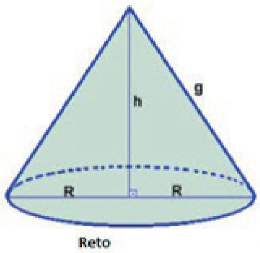
Sendo a área da base, determinada pelo polígono que forma a base, a área lateral, determinada pela soma das áreas dos triângulos laterais, temos que:

Área total: $A_T = A_L + A_B$

Volume: $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

5. Cones

Os cones são sólidos possuem uma única base (círculo). A distância do vértice à circunferência (contorno da base) é chamada de geratriz (g) e a distância entre o vértice e o centro do círculo é a altura do cone (h).



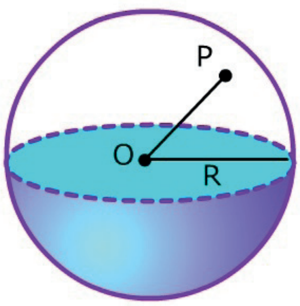
Reto

Geratriz: $g^2 = R^2 + h^2$
Área da Base: $A_B = \pi R^2$
Área Lateral: $A_L = \pi g R$
Área Total: $A_T = A_L + A_B$

Volume: $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

Esfera

A esfera é o conjunto de pontos nos quais a distância em relação a um centro é menor ou igual ao raio da esfera R. A esfera é popularmente conhecida como "bola" pois seu formato é o mesmo de uma bola de futebol, por exemplo.



Área da Superfície Esférica: $A = 4\pi R^2$

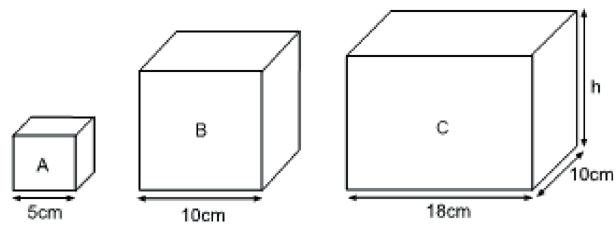
Volume: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

#FicaDica

Na área total dos prismas e cilindros, multiplicamos a área da base por 2 pois temos duas bases formando o sólido. Já no caso das pirâmides e dos cones isto não ocorre, pois há apenas uma base em ambos.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (TJ-SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2017) As figuras seguintes mostram os blocos de madeira A, B e C, sendo A e B de formato cúbico e C com formato de paralelepípedo reto retângulo, cujos respectivos volumes, em cm^3, são representados por V_A, V_B e V_C.



Se $V_A + V_B = 1/2\ V_C$, então a medida da altura do bloco C, indicada por h na figura, é, em centímetros, igual a:

a) 15,5
b) 11
c) 12,5
d) 14
e) 16

Resposta : Letra C.

$V_A = 5^3 = 125\ cm^3$
$V_B = 10^3 = 1000\ cm^3$

Logo: $\frac{V_C}{2} = V_A + V_B = 125 + 1000$

$\rightarrow \frac{V_C}{2} = 1125 \rightarrow V_C = 2250\ cm^3$

Portanto, $V_C = 18 \cdot 10 \cdot h = 2250 \rightarrow h = \frac{2250}{180} = 12{,}5\ cm$

2. (PEDAGOGO – IF/2016) Uma lata de óleo de soja de 1 litro, com formato cilíndrico, possui 8 cm de diâmetro interno. Assim, a sua altura é de aproximadamente: (Considere $\pi = 3{,}14$)

a) 20 cm
b) 25 cm
c) 201 cm
d) 200 cm
e) 24 cm

Resposta: Letra A.

$1L = 1dm^3 = 1000\ cm^3$

Volume da lata(cilindro):

$V_C = \pi R^2 h \rightarrow 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot h = 1000 \rightarrow h \cong 20\ cm$

Obs: Como o diâmetro é igual a 8cm o raio é igual a 4cm.

3. (PREF. ITAPEMA-SC – TÉCNICO CONTÁBIL – MS CONCURSOS/2016) O volume de um cone circular reto, cuja altura é 39 cm, é 30% maior do que o volume de um cilindro circular reto. Sabendo que o raio da base do cone é o triplo do raio da base do cilindro, a altura do cilindro é:

a) 9 cm
b) 30 cm
c) 60 cm
d) 90 cm

Resposta: Letra D.

Volume do cone: V_C

Volume do cilindro: V_{cil}

Do enunciado: $V_C = 1{,}3.V_{cil}$ (30% maior).

4. (CÂMARA DE ARACRUZ-ES – AGENTE ADMINISTRATIVO E LEGISLATIVO – IDECAN/2016) João possui cinco esferas as quais, quando colocadas em certa ordem, seus volumes formam uma progressão aritmética. Sabendo que a diferença do volume da maior esfera para a menor é 32 cm³ e que o volume da segunda maior esfera é 86,5 cm³, então o diâmetro da menor esfera é: (Considere: π = 3)

a) 2 cm
b) 2,5 cm
c) 4,25 cm
d) 5 cm

Resposta: Letra D.

Sendo a P.A. $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$, (, o enunciado fornece:
Do termo geral da P.A., sabe-se que

$V_5 = V_1 + (5-1) \cdot r = V_1 + 4r$

onde r é a razão da P.A.

Assim, $V_1 + 4r - V_1 = 32 \rightarrow 4r = 32 \rightarrow r = 8$
Como

$$V_4 = V_1 + 3r$$
$$\rightarrow V_1 + 3 \cdot 8 = 86{,}5$$
$$\rightarrow V_1 + 24 = 86{,}5$$
$$\rightarrow V_1 = 62{,}5\ cm$$

Como

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$\rightarrow \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot R^3 = 62{,}5$$
$$\rightarrow R^3 = \frac{62{,}5}{4}$$
$$\rightarrow R^3 = 15{,}625$$
$$\rightarrow R = 2{,}5\ cm$$

Como o exercício pediu o diâmetro, $D = 2.2{,}5 = 5\ cm$

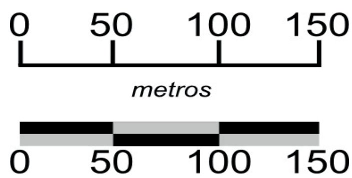
ESCALAS

Em linhas gerais, escala é a relação matemática entre a distância medida em um mapa (ou desenho, planta, etc.) e a dimensão real do objeto (local) representado por esse mapa (ou desenho, planta, etc.). Quando se observa um mapa e lê-se que ele foi feito em escala 1:500 cm, significa que 1 cm medido no mapa equivale a 500 cm na realidade.

Tipos de Escala

Considerando a forma de apresentação, há dois tipos de escala, a saber:

Gráfica: a escala gráfica é aquela na qual a distância a ser medida no mapa e sua equivalência são apresentadas por unidade. Geralmente estão na parte inferior do mapa, como no exemplo abaixo:



Fonte: brasilescola.uol.com.br/geografia/escalas.htm

Medindo com uma régua a distância entre 0 e 50 metros, por exemplo, significa que a medida dessa distância no mapa equivale a 50 metros na realidade.

Numérica: a escala numérica é apresentada como uma relação e estabelece diretamente qual é a relação entre distâncias no mapa e real, sem a necessidade de medições com régua como na escala gráfica. Um exemplo de escala numérica:

1:50.000

Isso significa que 1 cm no mapa equivale a 50.000 cm na realidade.

Considerando o tamanho da representação de determinado mapa ou desenho, a escala pode ser classificada de três formas:

Natural: a escala natural é aquela na qual o tamanho do desenho coincide com o tamanho do objeto real.

Reduzida: a escala reduzida é aquela na qual o desenho é menor do que a realidade. É a escala na qual a maioria dos mapas é feita.

Ampliada: a escala ampliada é aquela na qual o desenho é maior do que a realidade. Figuras obtidas com auxílio de microscópios, por exemplo, estão em escala ampliada.

Cálculo de Escala

A escala (E) pode ser expressa como:

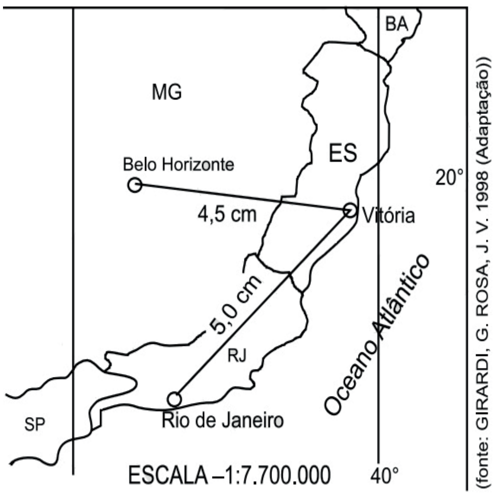
$$E = \frac{d}{D}$$

onde d é a distância medida no desenho (mapa) e D é a distância real do objeto (local que o mapa representa). Assim é possível calcular quaisquer distâncias medidas no desenho.

> **FIQUE ATENTO!**
> Não se esqueça de trabalhar sempre com as mesmas unidades de medida!

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (NOVA CONCURSOS - 2018) Considere o mapa a seguir:



Fonte: GIRARDI, G. ROSA, J.V. 1998 (Adaptação)

Determine, em quilômetros, a distância entre as cidades do Rio de Janeiro e Vitória, e de Belo Horizonte a Vitória.

Resposta: 385 km e 346,5 km. Começando pela distância entre Rio de Janeiro e Vitória.
Pela definição de escala:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow \frac{1}{7.700.000} = \frac{5}{D} \rightarrow D = 5 \cdot 7.700.000 = 38.500.00\ cm$$

Logo, a distância em quilômetros é igual a: 385 km

Entre Belo Horizonte e Vitória.
Pela definição de escala:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow \frac{1}{7.700.000} = \frac{4}{D} \rightarrow D = 4{,}5 \cdot 7.700.000 = 34.650.00\ cm$$

Logo, a distância em quilômetros é igual a: 346,5 km

2. (NOVA CONCURSOS - 2018) Em uma cidade duas atrações turísticas distam 4 km. Sabe-se que no mapa dessa cidade, esses pontos estão distantes 20 cm um do outro. Qual é a escala do mapa?

Resposta: 1:20000 Antes de utilizar a definição de escala é importante que ambas as distâncias estejam na mesma medida. Assim, é necessário passar 4 km para cm: 4 km=400000 cm.
Pela definição de escala:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow E = \frac{20}{400000} = \frac{1}{20000} \rightarrow E = 1:20000$$

3. (NOVA CONCURSOS - 2018) Qual será a distância entre dois pontos em um mapa sabendo que a escala do mapa é de 1:200 000 e a distância real entre eles é de 8 km?

Resposta: 4 cm. Antes de utilizar a definição de escala é importante que ambas as distâncias estejam na mesma medida. Assim, é necessário passar 8 km para cm: 8 km=800000 cm.
Pela definição de escala:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow \frac{1}{200000} = \frac{d}{800000} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{8} \rightarrow d = 4cm$$

RACIOCÍNIO LÓGICO

Definição: Todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

Nossa professora, bela definição!

Não entendi nada!

Vamos pensar que para ser proposição a frase tem que fazer sentido, mas não só sentido no nosso dia a dia, mas também no sentido lógico.

Para uma melhor definição dentro da lógica, para ser proposição, temos que conseguir julgar se a frase é verdadeira ou falsa.

Exemplos:

(A) A Terra é azul.

Conseguimos falar se é verdadeiro ou falso? Então é uma proposição.

(B) $\sqrt{2}>2$

Como $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, então a proposição tem valor lógico falso.

Todas elas exprimem um fato.

Agora, vamos pensar em uma outra frase:

O dobro de 1 é 2?

Sim, correto?

Correto. Mas é uma proposição?

Não! Porque sentenças interrogativas, não podemos declarar se é falso ou verdadeiro.

Bruno, vá estudar.

É uma declaração imperativa, e da mesma forma, não conseguimos definir se é verdadeiro ou falso, portanto, não é proposição.

Passei!

Ahh isso é muito bom, mas infelizmente, não podemos de qualquer forma definir se é verdadeiro ou falso, porque é uma sentença exclamativa.

Vamos ver alguns princípios da lógica:

I. Princípio da não Contradição: uma proposição não pode ser verdadeira “e” falsa ao mesmo tempo.

II. Princípio do Terceiro Excluído: toda proposição “ou” é verdadeira “ou” é falsa, isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro caso.

1. Valor Lógico das Proposições

Definição: Chama-se valor lógico de uma proposição a verdade, se a proposição é verdadeira (V), e a falsidade, se a proposição é falsa (F).

Exemplo

p: Thiago é nutricionista.

V(p)=V essa é a simbologia para indicar que o valor lógico de p é verdadeira, ou

V(p)=F

Basicamente, ao invés de falarmos, é verdadeiro ou falso, devemos falar tem o valor lógico verdadeiro, tem valor lógico falso.

2. Classificação

Proposição simples: não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. São geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p,q,r,s...

E depois da letra colocamos “:”

Exemplo:

p: Marcelo é engenheiro.

q: Ricardo é estudante.

Proposição composta: combinação de duas ou mais proposições. Geralmente designadas pelas letras maiúsculas P, Q, R, S,...

Exemplo:

P: Marcelo é engenheiro e Ricardo é estudante.

Q: Marcelo é engenheiro ou Ricardo é estudante.

Se quisermos indicar quais proposições simples fazem parte da proposição composta:

P(p,q)

Se pensarmos em gramática, teremos uma proposição composta quando tiver mais de um verbo e proposição simples, quando tiver apenas 1. Mas, lembrando que para ser proposição, temos que conseguir definir o valor lógico.

3. Conectivos

Agora que vamos entrar no assunto mais interessante e o que liga as proposições.

Antes, estávamos vendo mais a teoria, a partir dos conectivos vem a parte prática.

3.1. Definição

Palavras que se usam para formar novas proposições, a partir de outras.

Vamos pensar assim: conectivos? Conectam alguma coisa?

Sim, vão conectar as proposições, mas cada conectivo terá um nome, vamos ver?

-Negação

$$\begin{cases} \textit{extensa}\text{: não, é falso que, não é verdade que, é mentira que} \\ \textit{símbolo}\text{: } \sim, \quad \neg \end{cases}$$

Exemplo

p: Lívia é estudante.

~p: Lívia não é estudante.

q: Pedro é loiro.

¬q: É falso que Pedro é loiro.

r: Érica lê muitos livros.

~r: Não é verdade que Érica lê muitos livros.

s: Cecilia é dentista.

¬s: É mentira que Cecilia é dentista.

-Conjunção

$$\begin{cases} \textbf{extensa: } \text{“e”, “nem”, “mas também”, “como também”, “além de (disso, disto, daquilo)”,} \\ \text{“quanto” (depois de tanto), “bem como”, “mas”, “porém”, “todavia”, “entretanto”,} \\ \text{“no entanto”, “senão”, “não obstante”, “contudo” etc.} \\ \textit{Símbolo}\text{: } \wedge \end{cases}$$

Nossa, são muitas formas de se escrever com a conjunção.

Não precisa decorar todos, alguns são mais usuais: “e”, “mas”, “porém”.

Exemplos

p: Vinícius é professor.

q: Camila é médica.

p$\wedge$q: Vinícius é professor e Camila é médica.

p$\wedge$q: Vinícius é professor, mas Camila é médica.

p$\wedge$q: Vinícius é professor, porém Camila é médica.

- Disjunção

$$\begin{cases} \textit{extensa}\text{: ..ou...} \\ \textit{símbolo}\text{: } \vee \end{cases}$$

p: Vitor gosta de estudar.

q: Vitor gosta de trabalhar.

p$\vee$q: Vitor gosta de estudar ou Vitor gosta de trabalhar.

- Disjunção Exclusiva

Extensa: Ou...ou...

Símbolo: $\underline{\vee}$

p: Vitor gosta de estudar.

q: Vitor gosta de trabalhar

p∨q Ou Vitor gosta de estudar ou Vitor gosta de trabalhar.

-Condicional

Extenso: Se..., então..., É necessário que, Condição necessária

Símbolo: →

Exemplos

p→q: Se chove, então faz frio.

p→q: É suficiente que chova para que faça frio.

p→q: Chover é condição suficiente para fazer frio.

p→q: É necessário que faça frio para que chova.

p→q: Fazer frio é condição necessária para chover.

-Bicondicional

Extenso: se, e somente se, ...

Símbolo: ↔

p: Lucas vai ao cinema.

q: Danilo vai ao cinema.

p↔q: Lucas vai ao cinema se, e somente se, Danilo vai ao cinema.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgar de – Iniciação a lógica matemática – São Paulo: Nobel – 2002.

TABELA-VERDADE

WWCom a tabela-verdade, conseguimos definir o valor lógico de proposições compostas facilmente, analisando cada coluna.

Se tivermos uma proposição p, ela pode ter V(p)=V ou V(p)=F.

p
V
F

Quando temos duas proposições, não basta colocar só VF, será mais que duas linhas.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Observe, a primeira proposição ficou VVFF

E a segunda intercalou VFVF

Vamos raciocinar, com uma proposição temos 2 possibilidades, com 2 proposições temos 4, tem que haver um padrão para se tornar mais fácil!

As possibilidades serão 2^n,

Onde:

n=número de proposições

p	q	r
V	V	V
V	F	V
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V
F	V	F
F	F	F

A primeira proposição, será metade verdadeira e metade falsa.

A segunda, vamos sempre intercalar VFVFVF.

E a terceira VVFFVVFF.

Agora, vamos ver a tabela verdade de cada um dos operadores lógicos?

-Negação

p	~p
V	F
F	V

Se estamos negando uma coisa, ela terá valor lógico oposto, faz sentido, não?

- Conjunção

Eu comprei bala e chocolate, só vou me contentar se eu tiver as duas coisas, certo?

Se eu tiver só bala não ficarei feliz, e nem se tiver só chocolate.

E muito menos se eu não tiver nenhum dos dois.

p	q	p ∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

-Disjunção

Vamos pensar na mesma frase anterior, mas com o conectivo “ou”.

Eu comprei bala ou chocolate.

Eu comprei bala e também comprei a chocolate, está certo pois poderia ser um dos dois ou os dois.

Se eu comprei só bala, ainda estou certa, da mesma forma se eu comprei apenas chocolate.

Agora se eu não comprar nenhum dos dois, não dará certo.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

-Disjunção Exclusiva

Na disjunção exclusiva é diferente, pois OU comprei chocolate OU comprei bala.

Ou seja, um ou outro, não posso ter os dois ao mesmo tempo.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

-Condicional

Se chove, então faz frio.

Se choveu e fez frio.

Estamos dentro da possibilidade.(V)

Choveu e não fez frio.

Não está dentro do que disse. (F)

Não choveu e fez frio.

Ahh tudo bem, porque pode fazer frio se não chover, certo?(V)

Não choveu, e não fez frio.

Ora, se não choveu, não precisa fazer frio. (V)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

-Bicondicional

Ficarei em casa, se e somente se, chover.

Estou em casa e está chovendo.

A ideia era exatamente essa. (V)

Estou em casa, mas não está chovendo.

Você não fez certo, era só pra ficar em casa se chovesse. (F)

Eu sai e está chovendo.

Aiaiai não era pra sair se está chovendo (F)

Não estou em casa e não está chovendo.

Sem chuva, você pode sair, ta?(V)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1.(EBSERH – ÁREA MÉDICA – CESPE – 2018) A respeito de lógica proposicional, julgue o item que se segue.
Se P, Q e R forem proposições simples e se ~R indicar a negação da proposição R, então, independentemente dos valores lógicos V = verdadeiro ou F = falso de P, Q e R, a proposição $P \rightarrow Q \vee (\sim R)$ será sempre V.

( )CERTO ( )ERRADO

Resposta: Errado

Se P for verdadeiro, Q falso e R falso, a proposição é falsa.

2. (TRT 7ª REGIÃO – CONHECIMENTOS BÁSICOS – CESPE – 2017)

Texto CB1A5AAA – Proposição P

A empresa alegou ter pago suas obrigações previdenciárias, mas não apresentou os comprovantes de pagamento; o juiz julgou, pois, procedente a ação movida pelo ex-empregado.
A quantidade mínima de linhas necessárias na tabela-verdade para representar todas as combinações possíveis para os valores lógicos das proposições simples que compõem a proposição P do texto CB1A5AAA é igual a

a) 32.
b) 4.
c) 8.
d) 16.

Resposta: Letra C.

P: A empresa alegou ter pago suas obrigações previdenciárias.

Q: apresentou os comprovantes de pagamento.

R: o juiz julgou, pois, procedente a ação movida pelo ex-empregado.

Número de linhas: $2^3=8$

3.(SERES-PE – AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA – CESPE – 2017) A partir das proposições simples P: “Sandra foi passear no centro comercial Bom Preço”, Q: “As lojas do centro comercial Bom Preço estavam realizando liquidação” e R: “Sandra comprou roupas nas lojas do Bom Preço” é possível formar a proposição composta S: “Se Sandra foi passear no centro comercial Bom Preço e se as lojas desse centro estavam realizando liquidação, então Sandra comprou roupas nas lojas do Bom Preço ou Sandra foi passear no centro comercial Bom Preço”. Considerando todas as possibilidades de as proposições P, Q e R serem verdadeiras (V) ou falsas (F), é possível construir a tabela-verdade da proposição S, que está iniciada na tabela mostrada a seguir.

P	Q	R			S
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Completando a tabela, se necessário, assinale a opção que mostra, na ordem em que aparecem, os valores lógicos na coluna correspondente à proposição S, de cima para baixo.

a) V / V / F / F / F / F / F / F.
b) V / V / F / V / V / F / F / V.
c) V / V / F / V / F / F / F / V.
d) V / V / V / V / V / V / V / V.
e) V / V / V / F / V / V / V / F.

Resposta: Letra D
A proposição S é composta por: $(p\wedge q)\rightarrow(r\vee p)$

P	Q	R	$p\wedge q$	$r\vee p$	$S(p\wedge q)\rightarrow(r\vee p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V

TAUTOLOGIA

Definição: Chama-se tautologia, toda proposição composta que terá a coluna inteira de valor lógico V.

Podemos ter proposições SIMPLES que são falsas e se a coluna da proposição composta for verdadeira é tautologia.

Vamos ver alguns exemplos.

A proposição $\sim(p\wedge p)$ é tautologia, pelo Princípio da não contradição. Está lembrado?

Princípio da não Contradição: uma proposição não pode ser verdadeira “e” falsa ao mesmo tempo.

P	$\sim p$	$p\wedge\sim p$	$\sim(p\wedge\sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

A proposição $p\vee\sim p$ é tautológica, pelo princípio do Terceiro Excluído.

Princípio do Terceiro Excluído: toda proposição “ou” é verdadeira “ou” é falsa, isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro caso.

P	$\sim p$	$p\vee\sim p$
V	F	V
F	V	V

Esses são os exemplos mais simples, mas normalmente conseguiremos resolver as questões com base na tabela verdade, por isso insisto que a tabela verdade dos operadores, têm que estar na “ponta da língua”, quase como a tabuada da matemática.

Veremos outros exemplos.

Exemplo 1
Vamos pensar nas proposições:
P: João é estudante.
Q: Mateus é professor.
Se João é estudante, então João é estudante ou Mateus é professor.

Em simbologia: $p\rightarrow p\vee q$

P	Q	$p\vee q$	$p\rightarrow p\vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

A coluna inteira da proposição composta deu verdadeiro, então é uma tautologia.

Exemplo 2

Com as mesmas proposições anteriores:

João é estudante ou não é verdade que João é estudante e Mateus é professor.

$p \vee \sim(p \wedge q)$

P	Q	p∧q	~(p∧q)	p∨~(p∧q)
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Novamente, coluna deu inteira com valor lógico verdadeiro, é tautologia.

Exemplo 3

Se João é estudante ou não é estudante, então Mateus é professor.

P	Q	~p	p∨~p	p∨~p→q
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

Deu pelo menos uma falsa e agora?

Não é tautologia.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgar de. I*niciação a lógica matemática*. São Paulo: Nobel – 2002.

EXERCÍCIO COMENTADO

1.(INSS – ANALISTA DO SEGURO SOCIAL – CESPE – 2016) Com relação a lógica proposicional, julgue o item subsequente.

Considerando-se as proposições simples "Cláudio pratica esportes" e "Cláudio tem uma alimentação balanceada", é correto afirmar que a proposição "Cláudio pratica esportes ou ele não pratica esportes e não tem uma alimentação balanceada" é uma tautologia.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: Errado

p: Cláudio pratica esportes.

q: Cláudio tem uma alimentação balanceada.

$(p \vee \sim p) \wedge \sim q$

P	~P	Q	~q	p∨~P	(p∨~p)∧~q
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Diz-se que uma proposição P(p,q,r..) é logicamente equivalente ou equivalente a uma proposição Q(p,r,s..) se as tabelas-verdade dessas duas proposições são IDÊNTICAS.

Para indicar que são equivalentes, usaremos a seguinte notação:

$P(p,q,r..) \Leftrightarrow Q(p,r,s..)$

Essa parte de equivalência é um pouco mais chatinha, mas conforme estudamos, vou falando algumas dicas.

Regra da Dupla negação

$\sim\sim p \Leftrightarrow p$

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

São iguais, então $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

Regra de Clavius

$\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

p	~p	~p→p
V	F	V
F	V	F

Regra de Absorção

$p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

p	q	p∧q	p→p∧q	p→q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Condicional

Gostaria da sua atenção aqui, pois as condicionais são as mais pedidas nos concursos.

A condicional $p \rightarrow q$ e a disjunção $\sim p \vee q$, têm tabelas-verdades idênticas

p	~p	q	p∧q	p→q	~p∨q
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V

Exemplo
p: Coelho gosta de cenoura
q: Coelho é herbívoro.

p→q: Se coelho gosta de cenoura, então coelho é herbívoro.
~p∨q: Coelha não gosta de cenoura ou coelho é herbívoro

A condicional ~p→~q é equivalente a disjunção p∨~q

p	q	~p	~q	~p→~q	p∨~q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Equivalências fundamentais (Propriedades Fundamentais): a equivalência lógica entre as proposições goza das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva.

1 – Simetria (equivalência por simetria)

a) p ∧ q ⇔ q ∧ p

p	q	p ∧ q	q ∧ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

b) p ∨ q ⇔ q ∨ p

p	q	p ∨ q	q ∨ p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

c) p ⊻ q ⇔ q ⊻ p

p	q	p ⊻ q	q ⊻ p
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

d) p ↔ q ⇔ q ↔ p

p	q	p ↔ q	q ↔ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Equivalências notáveis:

1 - Distribuição (equivalência pela distributiva)

a) p ∧ (q ∨ r) ⇔ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

p	q	r	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

b) p ∨ (q ∧ r) ⇔ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)

p	q	r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

2 - Associação (equivalência pela associativa)

a) p ∧ (q ∧ r) ⇔ (p ∧ q) ∧ (p ∧ r)

p	q	r	q ∧ r	p ∧ (q ∧ r)	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∧ (p ∧ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F

MATEMÁTICA

F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

b) p ∨ (q ∨ r) ⇔ (p ∨ q) ∨ (p ∨ r)

p	q	r	q ∨ r	p ∨ (q ∨ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∨ (p ∨ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

3 – Idempotência

a) p ⇔ (p ∧ p)

Para ficar mais fácil o entendimento, vamos fazer duas colunas com p

p	p	p∧p
V	V	V
F	F	F

b) p ⇔ (p ∨ p)

p	p	p∨p
V	V	V
F	F	F

4 - Pela contraposição: de uma condicional gera-se outra condicional equivalente à primeira, apenas invertendo-se e negando-se as proposições simples que as compõem.

Da mesma forma que vimos na condicional mais acima, temos outros modos de definir a equivalência da condicional que são de igual importância.

1º caso: (p → q) ⇔ (~q → ~p)

p	q	~p	~q	p → q	~q → ~p
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

2º caso: (~p → q) ⇔ (~q → p)

p	q	~p	~p → q	~q	~q → p
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F

3º caso: (p → ~q) ⇔ (q → ~p)

p	q	~q	p → ~q	~p	q → ~p
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

5 - Pela bicondicional

a) (p ↔ q) ⇔ (p → q) ∧ (q → p), por definição

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

b) (p ↔ q) ⇔ (~q → ~p) ∧ (~p → ~q)

p	q	p ↔ q	~q	~p	~q → ~p	~p → ~q	(~q → ~p) ∧ (~p → ~q)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

c) (p ↔ q) ⇔ (p ∧ q) ∨ (~p ∧ ~q)

p	q	p ↔ q	p ∧ q	~p	~q	~p ∧ ~q	(p ∧ q) ∨ (~p ∧ ~q)
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

6 - Pela exportação-importação

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) → r	q → r	p → (q → r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Proposições Associadas a uma Condicional (se, então)

Chama-se proposições associadas a p → q as três proposições condicionadas que contêm p e q:

– Proposições recíprocas: p → q: q → p
– Proposição contrária: p → q: ~p → ~q
– Proposição contrapositiva: p → q: ~q → ~p

Observe a tabela verdade dessas quatro proposições:

p	q	~p	~q	p → q	q → p	~p → ~q	~q → ~p
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Observamos ainda que a condicional p → q e a sua recíproca q → p ou a sua contrária ~p → ~q NÃO SÃO EQUIVALENTES.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (TRF 1ª REGIÃO – TÉCNICO JUDICIÁRIO – CESPE – 2017) A partir da proposição P: "Quem pode mais, chora menos.", que corresponde a um ditado popular, julgue o próximo item.
Do ponto de vista da lógica sentencial, a proposição P é equivalente a "Se pode mais, o indivíduo chora menos".

( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: Certo
Uma dica é que normalmente quando tem vírgula é condicional, não é regra, mas acontece quando você não acha o conectivo.

2. (PC-PE – PERITO PAPILOSCOPISTA – CESPE – 2016)

Texto CG1A06AAA

A Polícia Civil de determinado município prendeu, na sexta-feira, um jovem de 22 anos de idade suspeito de ter cometido assassinatos em série. Ele é suspeito de cortar, em três partes, o corpo de outro jovem e de enterrar as partes em um matagal, na região interiorana do município. Ele é suspeito também de ter cometido outros dois esquartejamentos, já que foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os crimes
Assinale a opção que é logicamente equivalente à proposição "Ele é suspeito também de ter cometido outros dois esquartejamentos, já que foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os crimes", presente no texto CG1A06AAA.

a) Se foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os dois esquartejamentos, ele é suspeito também de ter cometido esses crimes.
b) Ele não é suspeito de outros dois esquartejamentos, já que não foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os crimes.
c) Se não foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os dois esquartejamentos, ele não é suspeito desses crimes.
d) Como ele é suspeito de ter cometido também dois esquartejamentos, foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os crimes.
e) Foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os dois esquartejamentos, pois ele é também suspeito de ter cometido esses crimes.

Resposta: A
A expressão já que=pois
Que se for escrita com a condicional, devemos mudar as proposições de lugar.
Se foram encontrados vídeos em que ele supostamente aparece executando os dois esquartejamentos, ele é suspeito também de ter cometido esses crimes.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgar de – Iniciação a lógica matemática – São Paulo: Nobel – 2002.
CABRAL, Luiz Cláudio Durão; NUNES, Mauro César de Abreu - Raciocínio lógico passo a passo – Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

Negação de uma proposição composta

Definição: Quando se nega uma proposição composta primitiva, gera-se outra proposição também composta e equivalente à negação de sua primitiva.

Ou seja, muitas vezes para os exercícios teremos que saber qual a equivalência da negação para compor uma frase, por exemplo.

Negação de uma conjunção (Lei de Morgan)

Para negar uma conjunção, basta negar as partes e trocar o conectivo conjunção pelo conectivo disjunção.

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

p	q	~p	~q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p ∨ ~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Negação de uma disjunção (Lei de Morgan)

Para negar uma disjunção, basta negar as partes e trocar o conectivo-disjunção pelo conectivo-conjunção.

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	~p	~q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p ∧ ~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Resumindo as negações, quando é conjunção nega as duas e troca por "ou"
Quando for disjunção, nega tudo e troca por "e".

Negação de uma disjunção exclusiva

$\sim(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	p⊻q	~(p⊻q)	p ↔ q
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Negação de uma condicional

Famoso MANE
Mantém a primeira e nega a segunda.

$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

p	q	p → q	~q	~(p → q)	p ∧ ~q
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Negação de uma bicondicional

$\sim(p \leftrightarrow q) = \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$

MATEMÁTICA

P	Q	p ↔ q	p → q	q → p	p → q) ∧ (q → p)]	~[(p → q) ∧ (q → p)]	p ∧ ~q	q ∧ ~p	[(p ∧ ~q) ∨ (q ∧ ~p)]
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	F	F

Dupla negação (Teoria da Involução)

a) De uma proposição simples: p ⇔ ~ (~p)

P	~P	~ (~p)
V	F	V
F	V	F

b) De uma condicional: Definição: A dupla negação de uma condicional dá-se da seguinte forma: nega-se a 1ª parte da condicional, troca-se o conectivo-condicional pela disjunção e mantém-se a 2ª parte.

Demonstração: Seja a proposição primitiva: p → q nega-se pela 1ª vez: ~(p → q) ⇔ p ∧ ~q nega-se pela 2ª vez: ~(p ∧ ~q) ⇔ ~p ∨ q

Conclusão: Ao negarmos uma proposição primitiva duas vezes consecutivas, a proposição resultante será equivalente à sua proposição primitiva. Logo, p → q ⇔ ~p ∨ q

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (TRF 1ª REGIÃO – TÉCNICO JUDICIÁRIO – CESPE – 2017) A partir da proposição P: “Quem pode mais, chora menos.”, que corresponde a um ditado popular, julgue o próximo item.
A negação da proposição P pode ser expressa por “Quem não pode mais, não chora menos”

( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: Errado.
Negação de uma condicional: mantém a primeira e nega a segunda

2. (PC-PE – PERITO CRIMINAL – CESPE – 2016) Considere as seguintes proposições para responder a questão.

P1: Se há investigação ou o suspeito é flagrado cometendo delito, então há punição de criminosos.

P2: Se há punição de criminosos, os níveis de violência não tendem a aumentar.

P3: Se os níveis de violência não tendem a aumentar, a população não faz justiça com as próprias mãos.

Assinale a opção que apresenta uma negação correta da proposição P1.

a) Se não há punição de criminosos, então não há investigação ou o suspeito não é flagrado cometendo delito.
b) Há punição de criminosos, mas não há investigação nem o suspeito é flagrado cometendo delito.
c) Há investigação ou o suspeito é flagrado cometendo delito, mas não há punição de criminosos.
d) Se não há investigação ou o suspeito não é flagrado cometendo delito, então não há punição de criminosos.
e) Se não há investigação e o suspeito não é flagrado cometendo delito, então não há punição de criminosos.

Resposta: Letra C
Famoso MANE
Mantém a primeira e nega a segunda.
Há investigação ou o suspeito é flagrado cometendo delito e não há punição de criminosos.

No caso, a questão ao invés de “e”utilizou mas

ARGUMENTOS

Um argumento é um conjunto finito de premissas (proposições), sendo uma delas a consequência das demais. Tal premissa (proposição), que é o resultado dedutivo ou consequência lógica das demais, é chamada conclusão. Um argumento é uma fórmula: $P1 \wedge P2 \wedge ... \wedge Pn \rightarrow Q$

OBSERVAÇÃO: A fórmula argumentativa $P1 \wedge P2 \wedge ... \wedge Pn \rightarrow Q$, também poderá ser representada pela seguinte forma:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

1. Argumentos válidos

Um argumento é válido quando a conclusão é verdadeira (V), sempre que as premissas forem todas verdadeiras (V). Dizemos, também, que um argumento é válido quando a conclusão é uma consequência obrigatória das verdades de suas premissas.

Argumentos inválidos

Um argumento é dito inválido (ou falácia, ou ilegítimo ou mal construído), quando as verdades das premissas são insuficientes para sustentar a verdade da conclusão. Caso a conclusão seja falsa, decorrente das insuficiências geradas pelas verdades de suas premissas, tem-se como conclusão uma contradição (F).

2. **Métodos para testar a validade dos argumentos**

(IF-BA – ADMINISTRADOR – FUNRIO – 2016) Ou João é culpado ou Antônio é culpado. Se Antônio é inocente então Carlos é inocente. João é culpado se e somente se Pedro é inocente. Ora, Pedro é inocente. Logo,

a) Pedro e Antônio são inocentes e Carlos e João são culpados.

b) Pedro e Carlos são inocentes e Antônio e João são culpados.

c) Pedro e João são inocentes e Antônio e Carlos são culpados.

d) Antônio e Carlos são inocentes e Pedro e João são culpados.

e) Antônio, Carlos e Pedro são inocentes e João é culpado.

Resposta: Letra E.

Vamos começar de baixo pra cima.

Ou João é culpado ou Antônio é culpado.
Se Antônio é inocente então Carlos é inocente.
João é culpado se e somente se Pedro é inocente.
Ora, Pedro é inocente.
(V)

Sabendo que Pedro é inocente,

João é culpado se e somente se Pedro é inocente.
João é culpado, pois a bicondicional só é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas falsas.

João é culpado se e somente se Pedro é inocente
(V) (V)
Ora, Pedro é inocente
(V)

Sabendo que João é culpado, vamos analisar a primeira premissa.

Ou João é culpado ou Antônio é culpado.

Então, Antônio é inocente, pois a disjunção exclusiva só é verdadeira se apenas uma das proposições for.

Se Antônio é inocente então Carlos é inocente.

Carlos é inocente, pois sendo a primeira verdadeira, a condicional só será verdadeira se a segunda proposição também for.

Então, temos:

Pedro é inocente, João é culpado, António é inocente e Carlos é inocente.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (DPU – AGENTE ADMINISTRATIVO – CESPE – 2016)
Considere que as seguintes proposições sejam verdadeiras.
• Quando chove, Maria não vai ao cinema.
• Quando Cláudio fica em casa, Maria vai ao cinema.
• Quando Cláudio sai de casa, não faz frio.
• Quando Fernando está estudando, não chove.
• Durante a noite, faz frio.
Tendo como referência as proposições apresentadas, julgue o item subsecutivo.
Se Maria foi ao cinema, então Fernando estava estudando.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Resposta: Errado

• Durante a noite, faz frio.
V

• Quando Cláudio sai de casa, não faz frio.
F F

• Quando Cláudio fica em casa, Maria vai ao cinema.
V V

• Quando chove, Maria não vai ao cinema.
F F

• Quando Fernando está estudando, não chove.
V/F V

Portanto, Se Maria foi ao cinema, então Fernando estava estudando.
Não tem como ser julgado.

DIAGRAMAS LÓGICOS

As questões de Diagramas lógicos envolvem as proposições categóricas (todo, algum, nenhum), cuja solução requer que desenhemos figuras, os chamados diagramas.

Quantificadores são elementos que, quando associados às sentenças abertas, permitem que as mesmas sejam avaliadas como verdadeiras ou falsas, ou seja, passam a ser qualificadas como sentenças fechadas.

O quantificador universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças (proposições) abertas em proposições fechadas, é indicado pelo símbolo "$\forall$", que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplo:

$(\forall x)(x + 2 = 6)$

Lê-se: "Qualquer que seja x, temos que x + 2 = 6" (falsa).

É falso, pois não podemos colocar qualquer x para a afirmação ser verdadeira.

O quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo "$\exists$" que se lê: "existe", "existe pelo menos um" e "existe um".

Exemplos:

$(\exists x)(x + 5 = 9)$

Lê-se: "Existe um número x, tal que x + 5 = 9" (verdadeira).

Nesse caso, existe um número, ahh tudo bem... claro que existe algum número que essa afirmação será verdadeira.

Ok? Sem maiores problemas, certo?

Representação de uma proposição quantificada

$(\forall x)(x \in N)(x + 3 > 15)$

Quantificador: $\forall$

Condição de existência da variável: $x \in N$.

Predicado: $x + 3 > 15$.

$(\exists x)[(x + 1 = 4) \wedge (7 + x = 10)]$

Quantificador: $\exists$

Condição de existência da variável: não há.

Predicado: "$(x + 1 = 4) \wedge (7 + x = 10)$".

Negações de proposições quantificadas ou funcionais

Seja uma sentença $(\forall x)(A(x))$.

Negação: $(\exists x)(\sim A(x))$

Exemplo

$(\forall x)(2x-1=3)$

Negação: $(\exists x)(2x-1 \neq 3)$

Seja uma sentença $(\exists x)(Q(x))$.

Negação: $(\forall x)(\sim Q(x))$.

$(\exists x)(2x-1=3)$

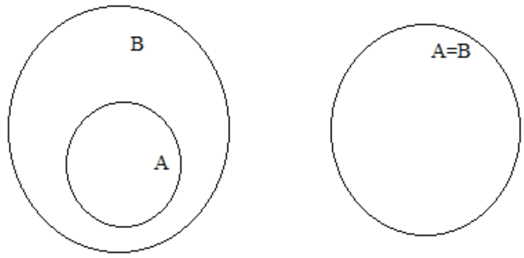
Negação: $(\forall x)(2x-1 \neq 3)$

1. Definição das proposições

<u>Todo A é B.</u>

O conjunto A está contido no conjunto B, assim todo elemento de A também é elemento de B.

Podemos representar de duas maneiras:



Quando "todo A é B" é verdadeira, vamos ver como ficam os valores lógicos das outras?

Pensemos nessa frase: Toda criança é linda.

Nenhum A é B é necessariamente falsa.

Nenhuma criança é linda, mas eu não acabei de falar que TODA criança é linda? Por isso é falsa.

Algum A é B é necessariamente verdadeira.

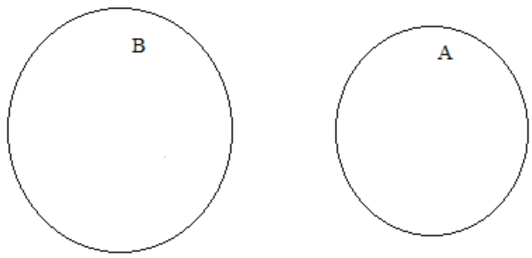
Alguma Criança é linda, sim, se todas são 1, 2, 3...são lindas.

Algum A não é B necessariamente é falsa, pois A está contido em B.

Alguma criança não é linda, bem como já vimos impossível, pois todas são.

<u>Nenhum A é B.</u>

A e B não terão elementos em comum.



Quando "nenhum A é B" é verdadeira, vamos ver como ficam os valores lógicos das outras?

Frase: Nenhum cachorro é gato. (sim, eu sei. Frase extrema, mas assim é bom para entendermos..hehe)

Todo A é B é necessariamente falsa.

Todo cachorro é gato, faz sentido? Nenhum, não é?

Algum A é B é necessariamente falsa.
Algum cachorro é gato, ainda não faz sentido.

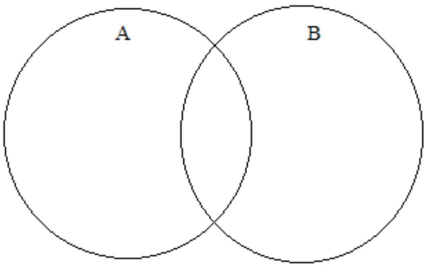
Algum A não é B necessariamente verdadeira.
Algum cachorro não é gato. Ah, sim! Espero que todos não sejam, mas se já está dizendo "algum" vou concordar.

<u>Algum A é B.</u>

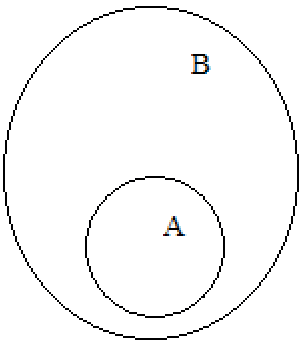
Quer dizer que há pelo menos 1 elemento de A em comum com o conjunto B

Temos 4 representações possíveis

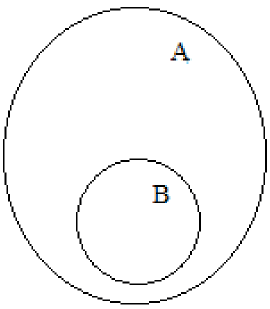
a) os dois conjuntos possuem uma parte dos elementos em comum



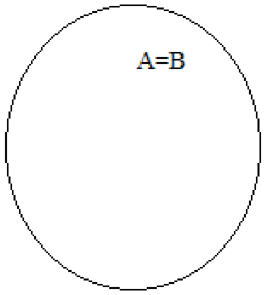
b) Todos os elementos de A estão em B.



c) Todos os elementos de B estão em A



d) O conjunto A é igual ao conjunto B.



Quando "algum A é B" é verdadeira, vamos ver como ficam os valores lógicos das outras?
Frase: Algum copo é de vidro.

Nenhum A é B é necessariamente falsa.
Nenhum copo é de vidro.
Com frase fica mais fácil né? Porque assim, conseguimos ver que é falsa, pois acabei de falar que algum copo é de vidro, ou seja, tenho pelo menos 1 copo de vidro.

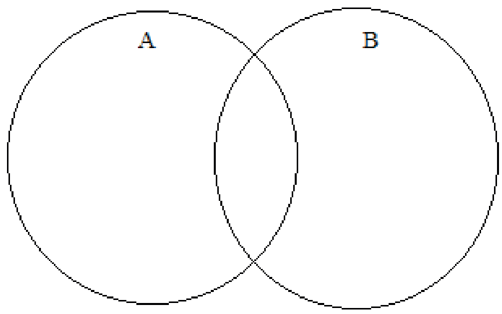
Todo A é B.
Não conseguimos determinar, podendo ser verdadeira ou falsa (podemos analisar também os diagramas mostrados nas figuras a e c).
Todo copo é de vidro.
Pode ser que sim, ou não.

Algum A não é B.
Não conseguimos determinar, podendo ser verdadeira ou falsa (contradiz com as figuras b e d)
Algum copo não é de vidro.
Como não sabemos se todos os copos são de vidros, pode ser verdadeira.

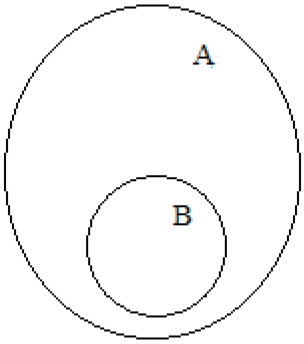
<u>Algum A não é B.</u>
O conjunto A tem pelo menos um elemento que não pertence ao conjunto B.

Aqui teremos 3 modos de representar:

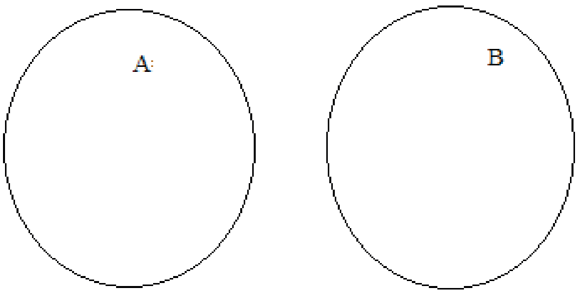
a) Os dois conjuntos possuem uma parte dos elementos em comum.



b) Todos os elementos de B estão em A.



c) Não há elementos em comum entre os dois conjuntos.



Quando "algum A não é B" é verdadeira, vamos ver como ficam os valores lógicos das outras?

Vamos fazer a frase contrária do exemplo anterior.

Frase: Algum copo não é de vidro.

Nenhum A é B é indeterminada (contradição com as figuras a e b).

Nenhum copo é de vidro, algum não é, mas não sei se todos não são de vidro.

Todo A é B é necessariamente falsa.

Todo copo é de vidro, mas eu disse que algum copo não era.

Algum A é B é indeterminada.

Algum copo é de vidro, não consigo determinar se tem algum de vidro ou não.

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. (PC-RS – ESCRIVÃO – FUNDATEC – 2018) Supondo a verdade da sentença aberta: Alguns investigados são advogados mas nem todos os investigados têm domicílio conhecido. Podemos deduzir a verdade da alternativa:

a) Todos investigados são advogados e têm domicílio conhecido.
b) Todos investigados são advogados e não têm domicílio conhecido.
c) Alguns investigados são advogados e têm domicílio conhecido.
d) Alguns investigados são advogados e alguns investigados têm domicílio conhecido.
e) Alguns investigados são advogados e alguns investigados não têm domicílio conhecido.

Resposta: Letra E

Nem todos os investigados têm domicilio = Existem investigados que não têm domicilio.

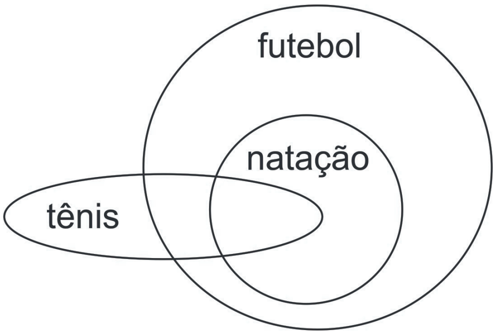
2. (UFES – ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO – UFES – 2017) Em um determinado grupo de pessoas,

• todas as pessoas que praticam futebol também praticam natação,
• algumas pessoas que praticam tênis também praticam futebol,
• algumas pessoas que praticam tênis não praticam natação.

É CORRETO afirmar que no grupo

a) todas as pessoas que praticam natação também praticam tênis.
b) todas as pessoas que praticam futebol também praticam tênis.
c) algumas pessoas que praticam natação não praticam futebol.
d) algumas pessoas que praticam natação não praticam tênis.
e) algumas pessoas que praticam tênis não praticam futebol.

Resposta: Letra E.



3. (SEPOG-RO – TÉCNICO EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO – FGV – 2017) Considere a afirmação:

"Toda pessoa que faz exercícios não tem pressão alta".

De acordo com essa afirmação é correto concluir que

a) se uma pessoa tem pressão alta então não faz exercícios.
b) se uma pessoa não faz exercícios então tem pressão alta.
c) se uma pessoa não tem pressão alta então faz exercícios.
d) existem pessoas que fazem exercícios e que têm pressão alta.
e) não existe pessoa que não tenha pressão alta e não faça exercícios.

Resposta: Letra A
Se toda pessoa que faz exercício não tem pressão alta, ora, se a pessoa tem pressão alta, então não faz exercício.

Referências

CARVALHO, S. *Raciocínio Lógico Simplificado*. Série Provas e Concursos, 2010.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

1. Definição

O diário do professor é composto pelos nomes de seus alunos e esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética). Essa lista de nomes (diário) pode ser considerada uma sequência. Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem que também é um tipo de sequência. Assim, sequências estão presentes no nosso dia a dia com mais frequência que você pode imaginar.

A definição formal de sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem ou padrão. No estudo da matemática estudamos obviamente, as sequências numéricas.

Ao representarmos uma sequência numérica, devemos colocar seus elementos entre parênteses. Veja alguns exemplos de sequências numéricas:

Ex: (2,4,6,8,10,12,...) - números pares positivos.
Ex: (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11...) - números naturais.
Ex: (10,20,30,40,50...) - números múltiplos de 10.
Ex: (10,15,20,30) - múltiplos de 5, maiores que 5 e menores que 35.

Pelos exemplos, observou-se dois tipos básicos de sequências:

Sequência finita: Sequência numérica onde a quantidade dos elementos é finita.

Sequência infinita: Sequência que seus elementos seguem ao infinito.

2. Representação

Em uma sequencia numérica qualquer, o primeiro termo será representado por uma letra minúscula seguido de sua posição na sequência. Assim, o primeiro termo é representado por , o segundo termo é , o terceiro e assim por diante.

#FicaDica

Na matemática, achar uma expressão que possa descrever a sequência numérica em função da posição do termo na mesma torna-se conveniente e necessário para se usar essa teoria. Os exemplos a seguir exemplificam esse conceito:

Ex: (1,2,3,4,...)→Essa sequência pode ser descrita como sendo: . Ou seja, qualquer termo da sequência é exatamente o valor de sua posição.

Ex: (5,8,11,14,...)→Essa sequência pode ser descrita como sendo: . Ou seja, qualquer termo da sequência é o triplo da sua posição somado 2.

Ex: (0,3,8,15,...)→ Essa sequência pode ser descrita como sendo: . Ou seja, qualquer termo da sequência é o quadrado da sua posição subtraído 1.

Essa expressão de a_n é definida como expressão do termo geral da sequência.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (FCC-2016 – MODIFICADO) Determine o termo geral a_n da sequência numérica $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\dots,a_n\right\}$

Resposta:
Mediante análise dos termos da sequência, nota-se que termo geral é

$$a_n = \frac{2n-1}{2n}$$

2. (FCC-2016) A sequência numérica 1/2, 3/4, 5/6, 7/8;...é ilimitada e criada seguindo o mesmo padrão lógico. A diferença entre o 500º e o 50º termos dessa sequência é igual a:
a) 0,9
b) 9
c) 0,009
d) 0,09
e) 0,0009

Resposta: Letra C.
Utilizando o termo geral dessa sequência $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, facilmente a_{500} e a_{50} são identificados. Substituindo para n=500 e n=50, chega-se ao resultado.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1. Definição

As progressões aritméticas, conhecidas com "PA", são sequências de números, que seguem um determinado padrão. Este padrão caracteriza-se pelo termo seguinte da sequência ser o termo anterior adicionado de um valor fixo, que chamaremos de constante da PA, representado pela letra "r".

Os exemplos a seguir ilustrarão a definição acima:

a) S={1,2,3,4,5...} : Esta seqüência é caracterizada por sempre somar o valor 1 no termo seguinte, ou seja, trata-se de uma PA com razão . Se , classificaremos com PA crescente.
b) S={13,11,9,7,5...} : Também podemos ter sequências onde ao invés de somar, estaremos subtraindo um valor fixo. Neste exemplo, o termo seguinte é o termo anterior subtraído 2, assim, trata-se de uma PA com razão . Se , classificaremos com PA decrescente.
c) S={4,4,4,4,4...} : Além disso, podemos ter uma sequência de valores constantes, nesse caso, é como se estivéssemos somando 0 ao termos. Assim, se , classificaremos com PA constante.

2. mTermo Geral

Dado esta lógica de formação das progressões aritméticas, pode-se definir o que chamamos de "expressão do termo geral". Trata-se de uma fórmula matemática que relaciona dois termos de uma PA com a razão r:

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot r \quad , \text{com } n \in \mathbb{N}^*$$

Onde a_n e a_p são termos quaisquer da PA. Essa expressão geral pode ser utilizada de 2 formas:

a) Sabemos um termo e a razão e queremos encontrar outro termo.

Ex: O primeiro termo da PA igual a 7 e a razão é 3, qual é o quinto termo?

Temos então $a_1 = 7$ e $r = 3$ e queremos achar a_5. Substituindo na fórmula do termo geral, temos que p = 1 e n = 5. Assim:

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot r$$
$$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot r$$
$$a_5 = 7 + (4) \cdot 3$$
$$a_5 = 19$$

Ou seja, o quinto termo desta PA é 19.

b) Sabemos dois termos quaisquer e queremos obter a razão da PA.

Ex: O terceiro termo da PA é 2 e o sexto é -1, qual será a razão da PA?

Temos então $a_3 = 2$ e $a_6 = -1$ e queremos achar r. Substituindo na fórmula do termo geral, temos que p = 3 e n = 6. Assim:

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot r$$
$$a_6 = a_3 + (6-3) \cdot r$$
$$-1 = 2 + (3) \cdot r$$
$$3r = -3$$
$$r = -1$$

Ou seja, a razão desta PA é -1.

3. Soma dos termos

Outro ponto importante de uma progressão aritmética é a soma dos termos. Considerando uma PA que queremos saber a soma dos 5 primeiros termos: S={2,4,6,8,10...}. Como são poucos termos e sabemos todos eles, podemos simplesmente somá-los: 2+4+6+8+10 = 30. Agora, considere que você saiba apenas o primeiro e o quinto termo, ou seja: $a_1 = 2$ e $a_5 = 10$ e . Como você calcularia a soma dos 5 termos?

O jeito que você aprendeu até agora seria obter os outros termos e a razão a partir da expressão do termo geral, porém você teria que fazer muitas contas para chegar ao resultado, gastando tempo. Como a PA segue um padrão, foi possível deduzir uma expressão que dependa apenas do primeiro termo e do último:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Assim, com , $a_1 = 2$, $a_5 = 10$ e $n = 5$, podemos calcular a soma:

$$S_n = \frac{(2+10) \cdot 5}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

MATEMÁTICA

Ou seja, não precisamos saber nem a razão da PA para acharmos a soma.

4. Propriedades

As progressões aritméticas possuem algumas propriedades interessantes que podem ser exploradas em provas de concursos:

P_1: Para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a média aritmética dos outros dois termos. Essa propriedade é fácil de verificar com o exemplo: Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} .Podemos afirmar a partir da fórmula do termo geral que:

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$a_n = a_{n+1} - r$$

Somando as duas expressões:

$$2a_n = a_{n-1} + r + a_{n+1} - r$$
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

O que leva a:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

P_2: Termos equidistantes dos Extremos. Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n),$$

Temos:

a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;
a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;
a_4 e a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Nota-se que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos e são equidistantes dos extremos, então:

$$p + k = n + 1$$

FIQUE ATENTO!
Com as considerações anteriores, temos que numa PA com termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é constante e igual a soma do primeiro termo com o último termo.

Ex: Sejam, numa PA de termos, a_p e a_k termos equidistantes dos extremos, teremos, então:

$$a_p = a_1 + (p-1) \cdot r \Rightarrow a_p = a_1 + p \cdot r - r$$
$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \Rightarrow a_k = a_1 + k \cdot r - r$$

Somando as expressões:

$$a_p + a_k = a_1 + p \cdot r - r + a_1 + k \cdot r - r$$
$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) \cdot r$$

Considerando que $p + k = n + 1$, ficamos com:

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 - 1) \cdot r$$
$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_p + a_k = a_1 + a_n$$

EXERCÍCIOS COMENTADOS

1. Em relação à progressão aritmética (10, 17, 24, ...), determine:

a) o termo geral dessa PA;
b) o seu 15° termo;

Resposta:

a) Para encontrar o termo geral da progressão aritmética, devemos, primeiramente, determinar a razão **r**:
$r = a_2 - a_1$
r = 17 – 10
r = 7
A razão é 7, e o primeiro termo da progressão **(a_1)** é **10**. Através da fórmula do termo geral da PA, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1). r$
$a_n = 10 + (n - 1). 7$

Portanto, o termo geral da progressão é dado por **$a_n = 10 + (n - 1). 7$**.

b) Como já encontramos a fórmula do termo geral, vamos utilizá-la para encontrar o 15° termo. Tendo em vista que **n = 15,** temos então:

$a_n = 10 + (n - 1). 7$
$a_{15} = 10 + (15 - 1). 7$
$a_{15} = 10 + 14 . 7$
$a_{15} = 10 + 98$
$a_{15} = 108$

O 15° termo da progressão é **108**.

2. (CONED-2016) Em uma PA com 12 termos, a soma dos três primeiros é 12 e a soma dos dois últimos é 65. A razão dessa PA é um número:

a) Múltiplo de 5
b) Primo
c) Com 3 divisores positivos
d) Igual a média geométrica entre 9 e 4
e) Igual a 4!

Resposta: Letra B.
Aplicando a fórmula do termo geral nas duas considerações do enunciado, chega-se a razão igual a 3, que é um número primo

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

1. Definição

As progressões geométricas, conhecidas com "PG", são sequências de números, como as PA, mas seu padrão está relacionado com a operação de multiplicação e divisão. Ou seja, o termo seguinte de uma PG é composto pelo termo anterior multiplicado por uma razão constante, que será chamada de "q".

Os exemplos a seguir ilustrarão melhor essas definições:

a) S={2,4,8,16,32...}: Esta sequência é caracterizada por sempre multiplicar o termo anterior por uma razão constante, q = 2. Como os termos subseqüentes são maiores, temos uma PG crescente (caracterizada por $q > 0$)
b) $S = \{9,3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}\ldots\}$: Esta sequência é caracterizada por sempre multiplicar o termo anterior por uma razão constante $q = \frac{1}{3}$, ou seja, estar sendo dividida sempre por 3. Assim, como os termos subseqüentes são menores, temos uma PG decrescente (caracterizada por $a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1$).
c) S={-1,-2,-4,-8 ,-16,...}: Esta sequência é caracterizada por sempre multiplicar o termo anterior por uma constante q=-2. Assim, como os termos subseqüentes são menores, temos outro caso de PG decrescente (caracterizada por $a_1 < 0 \text{ e } q > 1$).
d) S={1,-4,16,-64,256...}: Esta sequência mostra alternância de sinal entre os termos. A razão neste caso é q=-4 e quando isto ocorre, definimos como PG alternada. (caracterizada por $q < 0$).
e) S={5,5,5,5,5,5,...}: Esta sequência possui termos constantes e é caracterizada por ter uma razão q=1. Neste caso, é definido o que chamamos de PG constante.

FIQUE ATENTO!
Atenção as definições de PG decrescente e PG alternada, muitos alunos se confundem e dizem que PG decrescente ocorre quando , em uma analogia a PA.

2. Termo Geral

Dado esta lógica de formação das progressões geométricas, podemos também definir a "expressão do termo geral". Trata-se de uma fórmula matemática que relaciona dois termos de uma PG com a razão q:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}, n \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{R}$$

Onde a_n e a_p são termos quaisquer da PG. Essa expressão geral pode ser utilizada de 2 formas:

a) Sabemos um termo e a razão e queremos encontrar outro termo. Exemplo: O primeiro termo da PG igual a 5 e a razão é 2, qual é o quarto termo?

Resolução: Temos então $a_1 = 5 \text{ e } q = 2$ e queremos achar a_4. Substituindo na fórmula do termo geral, temos que p = 1 e n = 4. Assim:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$$
$$a_4 = 5 \cdot 2^3$$
$$a_4 = 5 \cdot 8 = 40$$

Ou seja, o quarto termo desta PG é 40.

b) Sabemos dois termos quaisquer e queremos obter a razão da PG. Exemplo: O segundo termo da PG é 3 e o quarto é 1/3, qual será a razão da PG, sabendo que $q < 0$?

Resolução: Temos então $a_2 = 3 \text{ e } a_4 = \frac{1}{3}$ e queremos achar q. Substituindo na fórmula do termo geral, temos que p = 2 e n = 4. Assim:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$
$$a_4 = a_2 \cdot q^{4-2}$$
$$\frac{1}{3} = 3 \cdot q^2$$
$$q^2 = \frac{1}{9}$$
$$q = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

Como $q < 0$, temos que a razão dessa PG é -1/3.

3. Soma finita dos termos

Seguindo o mesmo princípio da PA, temos na PG a somatória dos "n" primeiros termos também. Uma fórmula foi deduzida e está apresentada a seguir:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

O ponto interessante desta fórmula é que ela depende apenas da razão e do primeiro termo, sem a necessidade de obter o termo . Caso você tenha qualquer outro termo e a razão q, você obtém primeiramente o primeiro termo com a fórmula do termo geral e depois obtém a soma. O exemplo a seguir ilustra isso:

Exemplo: Calcule a soma dos quatro primeiros temos de uma PG, com $q = 3$ e $a_2 = 12$

Resolução: Para aplicar a fórmula da soma, é necessário obter o primeiro termo da PG. Usando o termo geral (com n=2 e p=1):

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$$
$$12 = a_1 \cdot 3^1$$
$$a_1 = 4$$

Com o primeiro termo obtido, podemos encontrar a somatória (com n=4):

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{4(3^4 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_4 = \frac{4 \cdot (343 - 1)}{2} = 2 \cdot 342 = 684$$

Assim, a soma dos primeiros quatro termos desta PG é igual a 684.

4. Soma da PG infinita

Além da soma dos "n" primeiros termos, as progressões geométricas possuem uma particularidade. Para PG com , ou seja, para PG decrescentes ou alternadas, podemos definir a "soma da PG infinita". Em outras palavras, se tivermos uma PG com infinitos termos com $q < 1$, podemos obter a somar todos eles e obter um valor finito. A fórmula da PG infinita é apresentada a seguir:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

#FicaDica

A fórmula é bem simples e como na fórmula da soma dos "n" primeiros termos, temos dependência apenas do primeiro termo e da razão.

Exemplo: Calcule a soma infinita da seguinte PG:

$$S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$$

Resolução: Como se trata de uma PG decrescente com $a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{2}$, ela atende aos requisitos da soma infinita: Substituindo na fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ou seja, a soma dos termos desta PG infinita vale 2.

EXERCÍCIO COMENTADO

1. (FUNAI – CONHECIMENTOS GERAIS – ESAF/2016) O limite da série infinita S de razão 1/3, $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots)$ é:

a) 13,444...
b) 13,5
c) 13,666...
d) 13,6
e) 14

Resposta: Letra B.
Aplicando a fórmula da PG infinita $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, chega-se na resposta.

2. Determine o valor do sexto termo da seguinte progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...).

Resposta: $a_6 = 32$
Nota-se que a razão da progressão geométrica é igual a 2. Então, tem-se que:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$
$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$$
$$a_6 = 1 \cdot 2^5 = 32$$

HORA DE PRATICAR!

1.(SAAE de Aimorés – MG) Em uma festa de aniversário, cada pessoa ingere em média 5 copos de 250 ml de refrigerante. Suponha que em uma determinada festa, havia 20 pessoas presentes. Quantos refrigerantes de 2 litros o organizador da festa deveria comprar para alimentar as 20 pessoas?

a) 12
b) 13
c) 15
d) 25

2. Analise as afirmativas a seguir e assinale a alternativa **CORRETA**:

I) $3\,x\,4 : 2 = 6$
II) $3 + 4\,x\,2 = 14$
III) O resto da divisão de 18 por 5 é 3

a) I somente
b) I e II somente
c) I e III somente
d) I, II e III

3. (Pref. de Timon – MA) O problema de divisão 648 : 2 é equivalente à:

a) $600{:}\,2\;x\;40{:}\,2\;x\;8{:}\,2$
b) $6{:}\,2 + 4{:}\,2 + 8{:}\,2$
c) $600{:}\,2 - 40{:}\,2 - 8{:}\,2$
d) $600{:}\,2 + 40{:}\,2 + 8{:}\,2$
e) $6{:}\,2x4{:}\,2x8{:}\,2$

4. (Pref. de São José do Cerrito – SC) Qual o valor da expressão: $34 + 14.4/2 \quad - 4$?

a) 58
b) -31
c) 92
d) -96

5. (IF-ES) Um caminhão tem uma capacidade máxima de 700 kg de carga. Saulo precisa transportar 35 sacos de cimento de 50 kg cada um. Utilizando-se desse caminhão, o número mínimo de viagens que serão necessárias para realizar o transporte de toda a carga é de:

a) 4
b) 5
c) 2
d) 6
e) 3

6. (Pref. Teresina – PI) Roberto trabalha 6 horas por dia de expediente em um escritório. Para conseguir um dia extra de folga, ele fez um acordo com seu chefe de que trabalharia 20 minutos a mais por dia de expediente pelo número de dias necessários para compensar as horas de um dia do seu trabalho. O número de dias de expediente que Roberto teve que trabalhar a mais para conseguir seu dia de folga foi igual a Parte superior do formulário

a) 16
b) 15
c) 18
d) 13
e) 12

7.(ITAIPU BINACIONAL) O valor da expressão:
$1 + 1 + 1 + 1x7 + 1 + 1x0 + 1 - 1$ é

a) 0
b) 11
c) 12
d) 29
e) 32

8. Qual a diferença prevista entre as temperaturas no Piauí e no Rio Grande do Sul, num determinado dia, segundo as informações? Tempo no Brasil: Instável a ensolarado no Sul. Mínima prevista -3º no Rio Grande do Sul. Máxima prevista 37° no Piauí.

a) 34
b) 36
c) 38
d) 40
e) 42

9. Qual é o produto de três números inteiros consecutivos em que o maior deles é –10?

a) -1320
b) -1440
c) +1320
d) +1440
e) nda

10. Três números inteiros são consecutivos e o menor deles é +99. Determine o produto desses três números.

a) 999.000
b) 999.111
c) 999.900
d) 999.999
e) 1.000.000

11. Adicionando –846 a um número inteiro e multiplicando a soma por –3, obtém-se +324. Que número é esse?

a) 726
b) 738
c) 744
d) 752
e) 770

12. Numa adição com duas parcelas, se somarmos 8 à primeira parcela, e subtrairmos 5 da segunda parcela, o que ocorrerá com o total?

a) -2
b) -1
c) +1
d) +2
e) +3

13. (Prefeitura de Chapecó – Engenheiro de Trânsito – IOBV/2016) A alternativa cujo valor não é divisor de 18.414 é:

a) 27
b) 31
c) 37
d) 22

14. Verifique se os números abaixo são divisíveis por 4.

a) 23418
b) 65000
c) 38036
d) 24004
e) 58617

15. (ALGÁS – ASSISTENTE DE PROCESSOS ORGANIZACIONAIS – COPEVE/2014)

Critério de divisibilidade por 11

Esse critério é semelhante ao critério de divisibilidade por 9. Um número é divisível por 11 quando a soma alternada dos seus algarismos é divisível por 11. Por soma alternada queremos dizer que somamos e subtraímos algarismos alternadamente (539 ⇨ 5 - 3 + 9 = 11).
Disponível em:<http://educacao.globo.com> . Acesso em: 07 maio 2014.

Se A e B são algarismos do sistema decimal de numeração e o número 109AB é múltiplo de 11, então

a) B = A
b) A+B=1
c) B-A=1
d) A-B=10
e) A+B=-10

16. (IF-SE – TÉCNICO DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO - FDC-2014) João, nascido entre 1980 e 1994, irá completar, em 2014, x anos de vida. Sabe-se que x é divisível pelo produto dos seus algarismos. Em 2020, João completará a seguinte idade:

a) 32
b) 30
c) 28
d) 26

17. (PREF. ITATINGA-PE – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – IDHTEC/2016) O número $10^2 + 10^1 + 10^0$ é a representação de que número?

a) 100
b) 101
c) 010
d) 111
e) 110

18. (TRF-SP – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2014) O resultado da expressão numérica $5^3 : 5^1 \times 5^4 : 5 \times 5^5 : 5 : 5^6 - 5$ é igual a :

a) 120.
b) $\frac{1}{5}$
c) 55.
d) 25.
e) 620.

19. (FEI-SP) O valor da expressão $B = 5 \,.\, 10^8 \,.\, 4 \,.\, 10^{-3}$ é:

a) 20^6
b) $2 \,.\, 10^6$
c) $2 \,.\, 10^9$
d) $20 \,.\, 10^{-4}$

20. (PREF. GUARULHOS-SP –ASSISTENTE DE GESTÃO ESCOLAR – VUNESP/2016) Para iniciar uma visita monitorada a um museu, 96 alunos do 8º ano e 84 alunos do 9º ano de certa escola foram divididos em grupos, todos com o mesmo número de alunos, sendo esse número o maior possível, de modo que cada grupo tivesse somente alunos de um único ano e que não restasse nenhum aluno fora de um grupo. Nessas condições, é correto afirmar que o número total de grupos formados foi

a) 8
b) 12
c) 13
d) 15
e) 18

21. (PREF. ITATINGA-PE – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – IDHTEC/2016) Um ciclista consegue fazer um percurso em 12 min, enquanto outro faz o mesmo percurso 15 min. Considerando que o percurso é circular e que os ciclistas partem ao mesmo tempo do mesmo local, após quanto tempo eles se encontrarão?

a) 15 min
b) 30 min
c) 1 hora
d) 1,5 horas
e) 2 horas

22. (PREF. SANTA TERIZINHA DO PROGRESSO-SC – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – CURSIVA/2018) Acerca dos números primos, analise.
I- O número 11 é um número primo;
II- O número 71 não é um número primo;
III- Os números 20 e 21 são primos entre si.

Dos itens acima:

a) Apenas o item I está correto.
b) Apenas os itens I e II estão corretos.
c) Apenas os itens I e III estão corretos.
d) Todos os itens estão corretos.

23. (SAMAE DE CAXIAS DO SUL –RS – OPERADOR DE ESTAÇÃO DE TRATAMENTO DE ÁGUA E ESGOTO – OBJETIVA/2017) Marcar C para as afirmativas Certas, E para as Erradas e, após, assinalar a alternativa que apresenta a sequência CORRETA:
(---) Pertencem ao conjunto dos números naturais ímpares os números ímpares negativos e os positivos.
(---) O número 72 é divisível por 2, 3, 4, 6, 8 e 9
(---) A decomposição do número 256 em fatores primos é 27
(---) Considerando-se os números 84 e 96, é correto afirmar que o máximo divisor comum é igual a 12.

a) E - E - C - C.
b) E - C - C - E.
c) C - E - E - E.
d) E - C - E - C.
e) C - E - C - C.

24. (PREF. GUARULHOS-SP – AGENTE ESCOLAR – VUNESP/2016) No ano de 2014, três em cada cinco estudantes, na faixa etária dos 18 aos 24 anos, estavam cursando o ensino superior, segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Supondo-se que naquele ano 2,4 milhões de estudantes, naquela faixa etária, não estivesse cursando aquele nível de ensino, o número dos que cursariam o ensino superior, em milhões, seria:

a) 3,0
b) 3,2
c) 3,4
d) 3,6
e) 4,0

25.(PREF. TERRA DE AREIA-RS – AGENTE ADMINISTRATIVO – OBJETIVA/2016) Três funcionários (Fernando, Gabriel e Henrique) de determinada empresa deverão dividir o valor de R$ 950,00 entre eles, de forma diretamente proporcional aos dias trabalhos em certo mês. Sabendo-se que Fernando trabalhou 10 dias, Gabriel, 12, e Henrique, 16, analisar os itens abaixo:
I - Fernando deverá receber R$ 260,00.
II - Gabriel deverá receber R$ 300,00.
III - Henrique deverá receber R$ 410,00.

Está(ão) CORRETO(S):

a) II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) Todos os itens

26. (TRT- 15ª REGIÃO SP– ANALISTA JUDICIÁRIO – FCC/2018) André, Bruno, Carla e Daniela eram sócios em um negócio, sendo a participação de cada um, respectivamente, 10%, 20%, 20% e 50%. Bruno faleceu e, por não ter herdeiros naturais, estipulara, em testamento, que sua parte no negócio deveria ser distribuída entre seus sócios, de modo que as razões entre as participações dos três permanecessem inalteradas. Assim, após a partilha, a nova participação de André no negócio deve ser igual a:

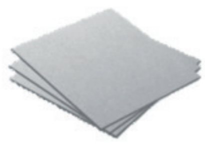
a) 20%.
b) 8%
c) 12,5%
d) 15%
e) 10,5%

27. (PREF. GUARULHOS-SP – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – VUNESP/2018) Um terreno retangular tem 35 m de largura e 1750 m^2 de área. A razão entre a largura e o comprimento desse terreno é

a) 0,8.
b) 0,7.
c) 0,6.
d) 0,5.
e) 0,4.

Leia o texto, para responder a Questão a seguir:

Uma loja vende peças de MDF (mistura de fibras de madeira prensada) retangulares para artesãos. A unidade padrão mede 22 cm de comprimento por 15 cm de largura e custa R$ 24,00.



MATEMÁTICA

Fonte: http://voltarelliprudente.com.br/ o-que-e-mdf-cru/

O catálogo desta loja disponibiliza peças com outras medidas cortadas a partir da unidade padrão. Observe que ele está com informações incompletas em relação a área e preço das peças.

Peça		Área (cm^2)	Preço (R$)
Unidade Padrão	15 cm × 22 cm	330	24,00
Peça A	15 cm × 11 cm		
Peça B	7,5 cm × 22 cm		
Peça C	7,5 cm × 11 cm		
Peça D	5 cm × 11 cm		

28. (UTPR 2018) O preço de cada peça é definido proporcionalmente à área de cada uma em relação à unidade padrão. Por exemplo, a área da peça B é metade da área da unidade padrão, desse modo o preço da peça B é metade do preço da unidade padrão, ou seja, R$ 12,00. Assim, as peças A, C e D custam respectivamente:

a) R$ 12,00; R$ 12,00; R$ 4,00
b) R$ 12,00; R$ 6,00; R$ 6,00
c) R$ 6,00; R$ 4,00; R$ 4,00
d) R$ 12,00; R$ 4,00; R$ 6,00
e) R$ 12,00; R$ 6,00; R$ 4,00

29. Dividindo-se 660 em partes inversamente proporcionais aos números 1/2, 1/3 e 1/6 obtém-se que números?

a) 30, 10, 5.
b) 30, 20, 10.
c) 40, 30, 20.
d) 20, 10, 5

30. Certo concreto é obtido misturando-se uma parte de cimento, dois de areis e quatro de pedra. Qual será (em m^3) a quantidade de areia a ser empregada, se o volume a ser concretado é 378 m^3?

a) $108m^3$
b) $100m^3$
c) $80m^3$
e) $60m^3$

31. A herança de R$ 30.000,00 deve ser repartida entre Antonio, Bento e Carlos. Cada um deve receber em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 6, respectivamente, e inversamente proporcionais às idades de cada um. Sabendo-se que Antonio tem 12 anos, Bento tem 15 anos e Carlos 24 anos, qual será a parte recebida por Bento?

a) R$ 12.000,00.
b) R$ 14.000,00.
b) R$ 8.000,00.
c) R$ 24.000,00.

32. (SAAE Aimorés- MG – Ajudante – MÁXIMA/2016) Misturam-se 30 litros de álcool com 20 litros de gasolina. A porcentagem de gasolina na mistura é igual a:

a) 40%
b) 20%
c) 30%
d) 10%

33. (PREF. PIRAÚBA-MG – OFICIAL DE SERVIÇO PÚBLICO – MS CONCURSOS/2017) Certo estabelecimento de ensino possui em seu quadro de estudantes alunos de várias idades. A quantidade de alunos matriculados neste estabelecimento é de 1300. Sabendo que deste total 20% são alunos maiores de idade, podemos concluir que a quantidade de alunos menores de idade que estão matriculados é:

a) 160
b) 1040
c) 1100
d) 1300

34. (PREF. JACUNDÁ-PA – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – INAZ/2016) Das 300 dúzias de bananas que seu José foi vender na feira, no 1° dia, ele vendeu 50% ao preço de R$ 3,00 cada dúzia; no 2° dia ele vendeu 30% da quantidade que sobrou ao preço de R$ 2,00; e no 3° dia ele vendeu 20% do que restou da venda dos dias anteriores ao preço de R$ 1,00. Quanto seu José apurou com as vendas das bananas nos três dias?

a) R$ 700,00
b) R$ 540,00
c) R$ 111,00
d) R$ 450,00
e) R$ 561,00

35. (COLÉGIO PEDRO II – PROFESSOR – 2016) Com a criação de leis trabalhistas, houve muitos avanços em relação aos direitos dos trabalhadores. Entretanto, ainda há muitas barreiras. Atualmente, a renda das mulheres corresponde, aproximadamente, a três quartos da renda dos homens. Considerando os dados apresentados, qual a diferença aproximada, em termos percentuais, entre a renda do homem e a da mulher?

a) 75%
b) 60%
c) 34%
d) 25%

36. (EBSERH – TÉCNICO EM ENFERMAGEM – IBFC/2017) Paulo gastou 40% de 3/5 de seu salário e ainda lhe restou R$ 570,00. Nessas condições o salário de Paulo é igual a:

a) R$ 2375,00
b) R$ 750,00
c) R$ 1240,00
d) R$ 1050,00
e) R$ 875,00

37. (PREF. TANGUÁ-RJ – TÉCNICO E ENFERMAGEM – MS CONCURSOS/2017) Raoni comprou um fogão com 25% de desconto, pagando por ele R$ 330,00. Qual era o preço do fogão sem o desconto?

a) R$ 355,00
b) R$ 412,50
c) R$ 440,00
d) R$ 460,00

38. (EBSERH – ADVOGADO – IBFC/2016) Ao comprar um produto, José obteve um desconto de 12% (doze por cento) por ter pagado à vista e pagou o valor de R$ 105,60 (cento e cinco reais e sessenta centavos). Nessas condições, o valor do produto, sem desconto, é igual a:

a) R$ 118,27
b) R$ 125,00
c) R$ 120,00
d) R$ 130,00
e) R$ 115,00

39. (PREF. ITAPEMA-SC – AGENTE MUNICIPAL DE TRÂNSITO – MS CONCURSOS/2016) Segundo dados do IBGE, a população de Itapema (SC) em 2010 era de, aproximadamente, 45.800 habitantes. Já atualmente, essa população é de, aproximadamente, 59.000 habitantes. O aumento percentual dessa população no período de 2010 a 2016 foi de:

a) 22,4%
b) 28,8%
c) 71,2%
d) 77,6%

40. (EBSERH – ADVOGADO – IBFC/2016) Joana gastou 60% de 50% de 80% do valor que possuía. Portanto, a porcentagem que representa o que restou para Joana do valor que possuía é:

a) 76%
b) 24%
c) 32%
d) 68%
e) 82%

41. (TRT 11ª REGIÃO – ANALISTA JUDICIÁRIO – FCC/2015) Em 2015 as vendas de uma empresa foram 60% superiores as de 2014. Em 2016 as vendas foram 40% inferiores as de 2015. A expectativa para 2017 é de que as vendas sejam 10% inferiores as de 2014. Se for confirmada essa expectativa, de 2016 para 2017 as vendas da empresa vão.

a) diminuir em 6,25%
b) aumentar em 4%
c) diminuir em 4%
d) diminuir em 4,75%
e) diminuir em 5,5%

42. (SAMAE CAXIAS DO SUL –RS –AJUSTADOR DE HIDRÔMETROS – OBJETIVA/2017) Em certa turma de matemática do Ensino Fundamental, o professor dividiu igualmente os 34 alunos em dois grupos (A e B) para que participassem de certa competição de matemática envolvendo frações. Para cada resposta correta dada pelo grupo, este ganhava 10 pontos e, para cada resposta incorreta, o grupo transferia 5 dos seus pontos para a equipe adversária. Considerando-se que os grupos A e B iniciaram a competição com 20 pontos cada, e as questões foram as seguintes, assinalar a alternativa CORRETA:

- Questão 1: O resultado da operação $\frac{7}{4}.\frac{12}{5}$ é:

  Resposta grupo A: $\frac{48}{35}$

  Resposta grupo B: $\frac{21}{5}$

- Questão 2: O resultado da operação $\frac{16}{21} \div \frac{32}{7}$ é:

  Resposta grupo A: $\frac{2}{3}$

  Resposta grupo B: $\frac{1}{6}$

- Questão 3: O resultado da operação $\frac{3}{4}.\frac{19}{5} \div \frac{25}{8}$ é:

  Resposta grupo A: $\frac{114}{125}$

  Resposta grupo B: $\frac{12}{5}$

a) grupo B ficou com 25 pontos a mais do que o grupo A.
b) grupo A ficou com 10 pontos a mais do que o grupo B.
c) grupo B ganhou ao todo 30 pontos e perdeu 5.
d) grupo A ganhou ao todo 20 pontos e perdeu 10.
e) Os dois grupos terminaram a competição com a mesma pontuação, 30 pontos cada.

43. (UFGO) Uma fração equivalente a 3/4 cujo denominador é um múltiplo dos números 3 e 4 é:

a) 6/8
b) 9/12
c) 15/24
d) 12/16

44. (COLÉGIO PEDRO II – PROFESSOR – 2018) O número decimal que representa a quantidade de crianças e jovens envolvidos em atividades não agrícolas no Brasil, segundo o PNAD 2015, é:

a) 68/10
b) 0,68
c) 6,8
d) 68/100

45. Em seu testamento, uma mulher decide dividir seu patrimônio entre seus quatro filhos. Tal divisão foi feita da seguinte forma:

- João receberá 1/5;
- Camila receberá 15%;
- Ana receberá R$ 16.000,00;
- Carlos receberá 25%.

A fração que representa a parte do patrimônio recebida por Ana é:

a) 2/4.
b) 3/5.
c) 2/5.
d) 1/4.
e) 3/4.

46. Bela é uma leitora voraz. Ela comprou uma cópia do *best seller* «A Beleza da Matemática». No primeiro dia, Bela leu 1/5 das páginas mais 12 páginas, e no segundo dia, ela leu 1/4 das páginas restantes mais 15 páginas. No terceiro dia, ela leu 1/3 das páginas restantes mais 18 páginas. Então, Bela percebeu que restavam apenas 62 páginas para ler, o que ela fez no dia seguinte. Então, o livro lido por Bela possuía o seguinte número de páginas:

a) 120.
b) 180.
c) 240.
d) 300.

GABARITO

1	B
2	C
3	D
4	A
5	E
6	C
7	B
8	D
9	A
10	C
11	B
12	E
13	C
14	B
15	C
16	B
17	D
18	A
19	B
20	D
21	C
22	C
23	D
24	D
25	A
26	C
27	B
28	E
29	A
30	B
31	A
32	A
33	B
34	E
35	D
36	B
37	C
38	C
39	B
40	A
41	A
42	C
43	B
44	C
45	B
46	C

ANOTAÇÕES