3. Trigonometria.
   3.1. Arcos e ângulos.
   3.2. Redução no 1º quadrante.
   3.3. Relações métricas e trigonométricas no Triângulo
   3.4. Funções trigonométricas.

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Definiremos algumas relações e números obtidos a partir dos lados de triângulos retângulos. Antes, porém, precisamos rever algumas de suas propriedades.

A fig. 1 apresenta um triângulo onde um de seus ângulos internos é reto (de medida 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rad), o que nos permite classificá-lo como um triângulo retângulo.

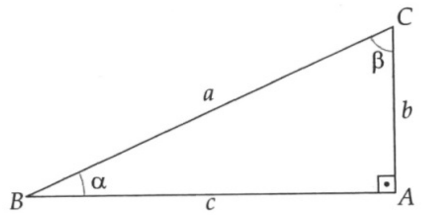


figura 1

Lembremo-nos de que, qualquer que seja o triângulo, a soma dos seus três ângulos internos vale 180º. Logo, a respeito do triângulo ABC apresentado, dizemos que:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

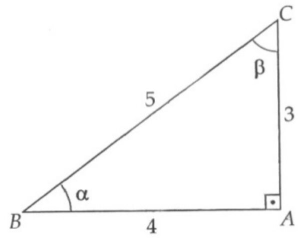
Com isso, podemos concluir:
- Que os ângulos α e β são complementares, isto é, são ângulos cujas medidas somam 90º;
- Uma vez que são complementares ambos terão medida inferior a 90º.

Portanto, dizemos que todo triângulo retângulo tem um ângulo interno reto e dois agudos, complementares entre si.
De acordo com a figura, reconhecemos nos lados b e c os catetos do triângulo retângulo e em a sua hipotenusa.

Lembremo-nos de que a hipotenusa será sempre o lado oposto ao ângulo reto em, ainda, o lado maior do triângulo. Podemos relacioná-los através do Teorema de Pitágoras, o qual enuncia que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos (sic) ou, em linguajar moderno, “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo”.
Aplicado ao nosso triângulo, e escrito em linguagem matemática, o teorema seria expresso como segue:
$a^2 = b^2 + c^2$

Seno, Co-seno e Tangente de um Ângulo Agudo

A fig. 2 ilustra um triângulo retângulo conhecido como triângulo pitagórico, classificação devida ao fato de que, segundo a tradição grega, através dele Pitágoras enunciou seu Teorema.



De fato, as medidas de seus lados (3, 4 e 5 unidades de comprimento) satisfazem a sentença $5^2 = 3^2 + 4^2$.
Apesar de nos apoiarmos particularmente no triângulo pitagórico, as relações que iremos definir são válidas para todo e qualquer triângulo retângulo. Apenas queremos, dessa forma, obter alguns resultados que serão comparados adiante.
Definimos seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas no quadro a seguir:

Seno do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Co-seno do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Tangente do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot \hat{a}ngulo}{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot \hat{a}ngulo}$

A partir dessas definições, o cálculo de seno, co-seno e tangente do ângulo α, por exemplo, nos fornecerão os seguintes valores:

sen α = $\frac{3}{5}$ = 0,6

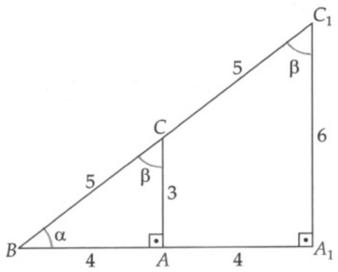
cos α = $\frac{4}{5}$ = 0,8

tg α = $\frac{3}{4}$ = 0,75

Ao que acabamos de ver, aliemos um conhecimento adquirido da Geometria. Ela nos ensina que dois triângulos de lados proporcionais são semelhantes.

Se multiplicarmos, então, os comprimentos dos lados de nosso triângulo pitagórico semelhante, com os novos lados (6, ,8 e 10) igualmente satisfazendo o Teorema de Pitágoras.

Na fig. 3, apresentamos o resultado dessa operação, em que mostramos o triângulo *ABC*, já conhecido na fig. 1 e A_1BC_1.



Observemos que os ângulos α e β permanecem sendo os ângulos agudos internos do triângulo recém-construído.

Lançando Mao das medidas dos novos lados $\overline{A_1B}, \overline{BC_1} e \overline{A_1C_1}$ (respectivamente 8, 10 e 6 unidades de comprimento), calculemos, para o ângulo α, os valores de seno, co-seno e tangente:

sen α = $\frac{8}{10}$ = 0,6

cos α = $\frac{8}{10}$ = 0,8

tg α = $\frac{6}{8}$ = 0,75

Nosso intuito, na repetição dessas operações, é mostrar que, não importando se o triângulo PE maior ou menor, as relações definidas como seno, co-seno e tangente têm, individualmente, valores constantes, desde que calculados para os mesmo ângulos.

Em outras palavras, seno, co-seno e tangente são funções apenas dos ângulos internos do triângulo, e não de seus lados.

Outras Razões Trigonométricas – Co-tangente, Secante e Co-secante

Além das razões com que trabalhamos até aqui, são definidas a co-tangente, secante e co-secante de um ângulo agudo de triângulo retângulo através de relações entre seus lados, como definimos no quadro a seguir:

cot do ângulo = $\frac{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}$

sec do ângulo = $\frac{hipotenusa}{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}$

cosec do ângulo = $\frac{hipotenusa}{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}$

Por exemplo, para um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento, como exibido na fig. 6, teríamos, para o ângulo α,

cotg α = $\frac{4}{3}$

sec α = $\frac{5}{4}$

cosec α = $\frac{5}{3}$

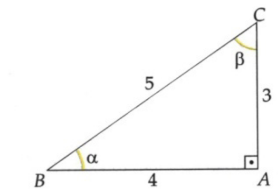
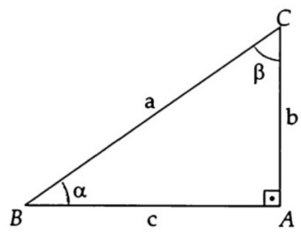


fig. 6

Seno, Co-seno, Tangente e Co-tangente de Ângulos Complementares

Já foi visto que em todo triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares.



$\alpha + \beta = 90^{\circ}$

Sabemos ainda que:

sen α = $\frac{b}{a}$ sen β = $\frac{c}{a}$

cos α = $\frac{c}{a}$ cos β = $\frac{b}{a}$

tg α = $\frac{b}{c}$ tg β = $\frac{c}{b}$

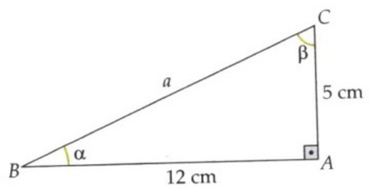
cotg α = $\frac{c}{b}$ cotg β = $\frac{b}{c}$

Verifica-se facilmente que:

sen α = cos β; cos α = sen β;
tg α = cotg β; cotg α = tg β.

Exemplo

Um triângulo retângulo tem catetos cujas medidas são 5 cm e 12 cm. Determine o valor de seno, co-seno e tangente dos seus ângulos agudos.



Resolução
Para respondermos ao que se pede, necessitaremos do comprimento da hipotenusa do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

Logo, *a* = 13 cm. Assim, obtemos para seno, co-seno e tangente dos ângulos da Figura, os seguintes valores:

$$sen\alpha = \frac{5}{13} \bullet con\alpha = \frac{12}{13} \bullet tg\alpha = \frac{5}{12}$$
$$sen\beta = \frac{12}{13} \bullet con\beta = \frac{5}{13} \bullet tg\beta = \frac{12}{5}$$

Ângulos Notáveis

Seno, Co-seno e Tangente dos Ângulos Notáveis

Uma vez definidos os conceitos de seno, co-seno e tangente de ângulos agudos internos a um triângulo retângulo, passaremos a determinar seus valores para ângulos de grande utilização em diversas atividades profissionais e encontrados facilmente em situações cotidianas.

Por exemplo, na Mecânica, demonstra-se que o ângulo de lançamento, tomado com relação à horizontal, para o qual se obtém o máximo alcance com uma mesma velocidade de tiro, é de 45º; uma colméia é constituída, interiormente, de hexágonos regulares, que por sua vez, são divisíveis, cada um, em seis triângulos equiláteros, cujos ângulos internos medem 60º; facilmente encontram-se coberturas de casas, de regiões tropicais, onde não há neve, com ângulo de inclinação definido nos 30º, etc.

Vamos selecionar, portanto, figuras planas em que possamos delimitar ângulo com as medidas citadas (30º, 45º e 60º). Para isso, passaremos a trabalhar com o quadrado e o triângulo equilátero.

Observemos, na figura 4 e na figura 5, que a diagonal de um quadrado divide ângulos internos opostos, que são retos, em duas partes de 45 + o+, e que o segmento que define a bissetriz (e altura) de um ângulo interno do triângulo equilátero permite-nos reconhecer, em qualquer das metades em que este é dividido, ângulos de medidas 30º e 60º.

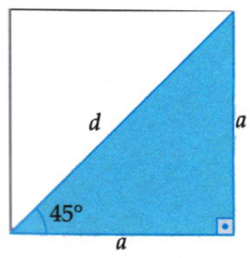


Figura 4

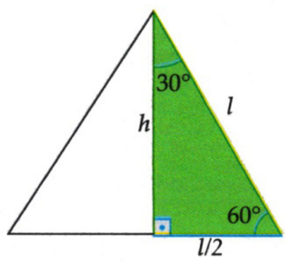


Figura 5

Primeiramente, vamos calcular os comprimentos da diagonal do quadrado (identificado na figura 4 por *d*) e a altura *h*, do triângulo equilátero (figura 5).

Uma vez que as regiões sombreadas nas figuras são triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para cada um deles.

Para o meio-quadrado, temos que:

$D^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2 \,.\, a^2$

$$\therefore d = a\sqrt{2}$$

Quanto ao triângulo equilátero, podemos escrever o seguinte:

$$l^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow \therefore h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos, agora, que o triângulo hachurado no interior do quadrado tem catetos de medida ***a*** e hipotenusa ***a*** $\sqrt{2}$. Para o outro triângulo sombreado, teremos catetos e medidas $\frac{1}{2} e \frac{l\sqrt{3}}{2}$, enquanto sua hipotenusa tem comprimento *l*.

Passemos, agora, ao cálculo de seno, co-seno e tangente dos ângulos de 30ºm 45º e 60º.

Seno, Co-seno e Tangente de 30º e 60º.

Tomando por base o triângulo equilátero da figura 5, e conhecendo as medidas de seus lados, temos:

sen 30º= $\dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2}$

cos 30º= $\dfrac{h}{l} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

tg 30º= $\dfrac{\frac{l}{2}}{h} = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{l}{2}.\dfrac{2}{l\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

sen 60º= $\dfrac{h}{l} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

cos 60º= $\dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2}.\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2}$

tg 60º= $\dfrac{h}{\frac{l}{2}} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$

Seno, Co-seno e Tangente de 45º

A partir do quadrado representado na figura 4, de lado ***a*** e diagonal ***a***$\sqrt{2}$, podemos calcular:

sen 45º= $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

cos 45º= $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45^o = \dfrac{a}{a} = 1$

Os resultados que obtivemos nos permitem definir, a seguir, uma tabela de valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos notáveis, que nos será extremamente útil.

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidades Trigonométricas

É comum a necessidade de obtermos uma razão trigonométrica, para um ângulo, a partir de outra razão cujo valor seja conhecido, ou mesmo simplificar expressões extensas envolvendo várias relações trigonométricas para um mesmo ângulo.

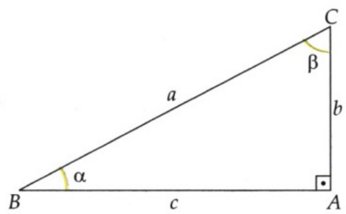
Nesses casos, as identidades trigonométricas que iremos deduzir neste tópico são ferramentas de grande aplicabilidade.

Antes de demonstrá-las, é necessário que definamos o que vem a ser uma identidade.

Identidade em uma ou mais variáveis é toda igualdade verdadeira para quaisquer valores a elas atribuídos, desde que verifiquem as condições de existência de expressão.

Por exemplo, a igualdade $x+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+4}{2x}$ é uma identidade em *x*, pois é verdadeira para todo *x* real, desde q $x \neq 0$ (divisão por zero é indeterminado ou inexistente).

Fig. A



Vamos verificar agora como se relacionam as razões trigonométricas que já estudamos. Para isso, faremos uso do triângulo *ABC* apresentado na figura A, retângulo em *A*.

Aplicando as medidas de seus lados no teorema de Pitágoras, obtemos a seguinte igualdade:

$b^2 + c^2 = a^2$

Dividindo os seus membros por a^2, não alteraremos a igualdade. Assim, teremos:

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$$

Observemos que as frações entre parênteses podem definir, com relação ao nosso triângulo, que:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$

Podemos afirma, portanto, que a soma dos quadrados de seno e co-seno de um ângulo *x* é igual à unidade, ou seja:

$Sen^2x + cos^2x = 1$

Expliquemos o significado da partícula co, que inicia o nome das relações co-seno, cotangente e co-secante. Ela foi introduzida por Edmund Gunter, em 1620, querendo indicar a razão trigonométrica do complemento. Por exemplo, co-seno de 22º tem valor idêntico ao seno de 68º (complementar de 22º)

Assim, as relações co-seno, co-tangente e co-secante de um ângulo indicam, respectivamente, seno, tangente e secante do complemento desse ângulo.

Assim, indicando seno, tangente e secante simplesmente pelo nome de razão, podemos dizer que:

co-razão *x* = razão (90º –*x*)

Facilmente podemos concluir, com base no triângulo apresentado na figura A, que:

sen α=cos β — sen β=cos α
tg α=cotg β — tg β=cotg α
sec α=cossec β — sec β=cossec α

Façamos outro desenvolvimento. Tomemos um dos ângulos agudos do triângulo *ABC*, da figura A. Por exemplo, α. Dividindo-se sen α por cos α, obtemos:

$$\frac{sen\,\alpha}{\cos\beta}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{a}.\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=tg\,\alpha$$

De forma análoga, o leitor obterá o mesmo resultado se tomar o ângulo β. Dizemos, portanto, que, para um ângulo *x*, tal que cós $x \neq 0$,

$$tg\ x=\frac{sen\ x}{\cos x}$$

Podemos observar, também, que a razão $\frac{b}{c}$, que representa tg α, se invertida (passando a $\frac{c}{b}$), vem a constituir cotg α. Em virtude disso, e aproveitando a identidade enunciada anteriormente, podemos dizer que, para todo ângulo *x* de seno não-nulo:

$$\text{cotg}\ x = \frac{1}{tg\,x}=\frac{\cos x}{sen\ x}$$

Tais inversões ocorrem também e se tratando das relações seno, co-seno, secante e co-secante. Vejamos que:

$$\begin{cases} sen\ \alpha=\dfrac{a}{b} \\ \cos ec\ \alpha=\dfrac{a}{b}\end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \sec\ \alpha=\dfrac{a}{c}\end{cases}$$

Teríamos encontrado inversões semelhantes se utilizássemos o ângulo β.

Dizemos, assim, que, para um dado ângulo *x*,

$$\sec x = \frac{1}{cox\ x}$$

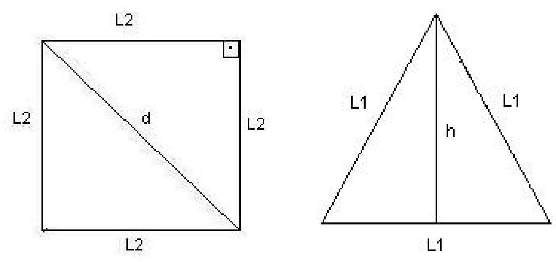
$$\text{cosec}\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

Desde que seja respeitada a condição de os denominadores dos segundos membros dessas identidades não serem nulos.

Exercícios

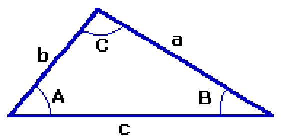
1. Sabe-se que, em qualquer triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa. Se um triângulo retângulo tem catetos medindo 5cm e 2cm, calcule a representação decimal da medida da mediana relativa a hipotenusa nesse triângulo.

2. Um quadrado e um triângulo equilátero têm o mesmo perímetro. Sendo h a medida da altura do triângulo e d a medida da diagonal do quadrado. Determine o valor da razão h/d.

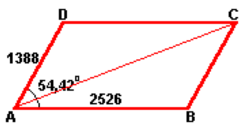


3. As raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ expressam em centímetros as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Determine a medida da hipotenusa e o perímetro desse triângulo.

4. Seja o triângulo ABC, mostrado na figura, onde a = 20, b = $10\sqrt{2}$ e B = 30. Calcular o raio do círculo circunscrito e o ângulo C.



5. Os lados adjacentes de um paralelogramo medem 1388m e 2526m e o ângulo formado entre estes lados mede 54,42°. Determinar o comprimento da maior diagonal desse quadrilátero.



6. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:
a) 11 / 24
b) - 11 / 24
c) 3 / 8
d) - 3 / 8
e) - 3 / 10

7. Se x e y são dois arcos complementares, então podemos afirmar que A = $(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$ é igual a:
a) 0
b) ½
c) 3/2
d) 1
e) 2

8. Calcule sen 2x sabendo-se que tg x + cotg x = 3.

9. Qual o domínio e o conjunto imagem da função y = arcsen 4x?

10. Calcule o triplo do quadrado do coseno de um arco cujo quadrado da tangente vale 2.

Respostas

1) Solução:

$$h^2 = 5^2 + 2^2$$
$$h^2 = 25 + 4$$
$$h^2 = 29$$
$$h = \sqrt{29}$$
$$mediana = \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5,38}{2} = 2,69$$

2) Solução:

$$4L_2 = 3L_1$$
$$L_2 = \frac{3}{4}L_1$$
$$d^2 = L_2{}^2 + L_2{}^2$$
$$d^2 = 2L_2{}^2$$
$$d = L_2\sqrt{2}$$
$$d = \frac{3}{4}L_1\sqrt{2}$$
$$L_1{}^2 = \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = L_1{}^2 - \frac{L_1{}^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4L_1{}^2 - L_1{}^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3L_1{}^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3L_1{}^2}{4}}$$
$$h = \frac{L_1\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{h}{d} = \frac{\frac{L_1\sqrt{3}}{2}}{\frac{3L_1\sqrt{2}}{4}} = \frac{L_1\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{3L_1\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3) Solução:

$$x2-14x+48=0$$
$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)2-4.148}}{2.1}$$
$$x=\frac{14\pm\sqrt{196-192}}{2}$$
$$x=\frac{14+2}{2}$$
$$x_1=\frac{14+2}{2}=8$$
$$x2=\frac{14-2}{2}=6$$

$$h^2=62+82$$
$$h^2=36+64$$
$$h^2=100$$
$$h=\sqrt{100}$$
$$h=10cm$$
$$P=6+8+10=24cm$$

4) Solução:

Pela Lei dos senos, b = 2R . sen(B), logo $10\sqrt{2}$ = 2R . sen(30) e desse modo R = $10\sqrt{2}$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, calcularemos o ângulo A.

Pela Lei dos Senos, b . sem (A) = a . sen(B), de onde segue que $10\sqrt{2}$. sem(A) = 20 . sen(30), assim, sem (A) = $\sqrt{2}/2$

Como A é um dos ângulos do triângulo então A = 45º ou A = 135º.

Como B = 30°, da relação A + B + C = 180º, segue que A + C = 150° e temos duas possibilidades:

1. A = 45º e C = 105º
2. A = 135º e C = 15º.

5) Solução:

No triângulo ABC, A + C = 54,42º, então: B = 180º - 54,42º = 125,58º

A lei dos cossenos:

b² = a² + c² - 2ac cos(B)

garante que:

b² = (1388)² + (2526)² - 2(1388)(2526) cos(125,58º)

Assim, b = 3519,5433 e então garantimos que a maior diagonal do paralelogramo mede aproximadamente 3519,54 metros.

6) Resposta "B".

Solução: Sabemos que num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Logo, o maior ângulo será aquele oposto ao lado de medida 6. Teremos então, aplicando a lei dos cossenos:

$6^2 = 3^2 + 4^2$ - 2 . 3 . 4 . cos b \ 36 - 9 - 16 = - 24 . cos b \ cos b = - 11 / 24 e, portanto, a alternativa correta é a letra B.

Lembrete: TC - Teorema dos cossenos: Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do angulo que eles formam.

7) Resposta "E".

Solução: Desenvolvendo os quadrados, vem:

A = $\cos^2$ x - 2 . cosx . cosy + $\cos^2$ y + sen^2 x + 2 . senx . seny + sen^2 y

Organizando convenientemente a expressão, vem:

A = ($\cos^2$ x + sen^2 x) + (sen^2 y + $\cos^2$ y) - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

A = 1 + 1 - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

A = 2 - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

Como os arcos são complementares, isto significa que x + y = 90º \ y = 90º - x.

Substituindo, vem:

A = 2 - 2 . cosx . cos(90º - x) + 2 . senx . sen(90º - x)

Mas, cos(90º - x) = senx e sen(90º - x) = cosx, pois sabemos que o seno de um arco é igual ao cosseno do seu complemento e o cosseno de um arco é igual ao seno do seu complemento.

Logo, substituindo, fica:

A = 2 - 2 . cosx . senx + 2 . senx . cosx

A = 2 + (2senxcosx - 2senxcosx) = 2 + 0 = 2 , e portanto a alternativa correta é a letra E.

8) Solução:

Escrevendo a tgx e cotgx em função de senx e cosx , vem:

$$\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}=3\therefore\frac{sen^2x+\cos^2 x}{senx\cos x}=3\therefore\frac{1}{senxconx}=3$$

Daí, vem: 1 = 3 . senx . cosx \ senx . cosx = 1 / 3. Ora, sabemos que sen 2x = 2 . senx . cosx e portanto senx . cosx = (sen 2x) / 2 , que substituindo vem:

(sen 2x) / 2 = 1 / 3 e, portanto, sen 2x = 2 / 3.

9. Solução:
Podemos escrever: 4x = seny. Daí, vem:
Para x: -1 £ 4x £ 1 Þ -1/4 £ x £ 1/4. Portanto, Domínio = D = [-1/4, 1/4].
Para y: Da definição vista acima, deveremos ter -p /2 £ y £ p /2.
Resposta: D = [-1/4, 1/4] e Im = [-p /2, p /2].

10) Solução:
Seja x o arco. Teremos:
tg^{2}x = 2

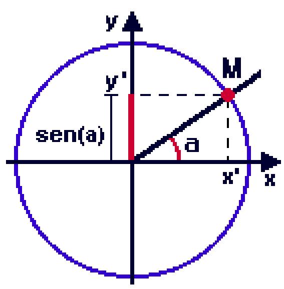
Desejamos calcular 3.cos^{2}x, ou seja, o triplo do quadrado do coseno do arco.
Sabemos da Trigonometria que: 1 + tg^{2}x = sec^{2}x

Portanto, substituindo, vem: 1 + 2 = sec^{2}x = 3
Como sabemos que:
secx = 1/cosx , quadrando ambos os membros vem:
sec^{2}x = 1/ cos^{2}x \ cos^{2}x = 1/sec^{2}x = 1/3 \ 3cos^{2}x = 3(1/3) = 1

Portanto, o triplo do quadrado do coseno do arco cuja tangente vale 2, é igual à unidade.
Resposta: 1

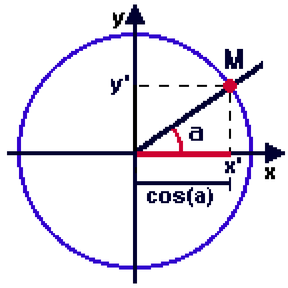
Circunferência Trigonométrica

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto A=(1,0) e um número real x, existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.
Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x',y') um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x',0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y').
A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).



Como temos várias determinações para o mesmo ângulo, escreveremos sen(AM)=sen(a)=sen(a+2kπ)=y'
Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos sen(x) para denotar o seno do arco de medida x radianos.

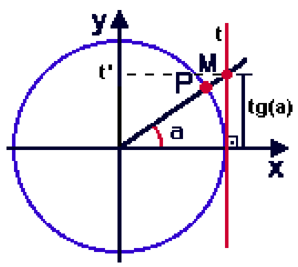
Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x' do ponto M.



Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escrevemos cos(AM) = cos(a) = cos(a+2kπ) = x'

Tangente

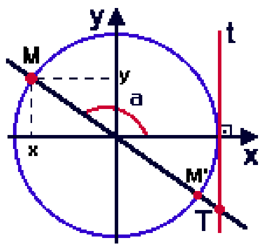
Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A=(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t'). A ordenada deste ponto T, é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a.



Assim a tangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações: tan(AM) = tan(a) = tan(a+kπ) = µ(AT) = t'
Podemos escrever M=(cos(a),sen(a)) e T=(1,tan(a)), para cada ângulo a do primeiro quadrante. O seno, o cosseno e a tangente de ângulos do primeiro quadrante são todos positivos.
Um caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo horizontal OX. Neste caso: cos(0)=1, sen(0)=0 e tan(0)=0
Ampliaremos estas noções para ângulos nos outros quadrantes

Ângulos no segundo quadrante

Se na circunferência trigonométrica, tomamos o ponto M no segundo quadrante, então o ângulo a entre o eixo OX e o segmento OM pertence ao intervalo $\pi/2<a<\pi$. Do mesmo modo que no primeiro quadrante, o cosseno está relacionado com a abscissa do ponto M e o seno com a ordenada deste ponto. Como o ponto M=(x,y) possui abscissa negativa e ordenada positiva, o sinal do seno do ângulo a no segundo quadrante é positivo, o cosseno do ângulo a é negativo e a tangente do ângulo a é negativa.



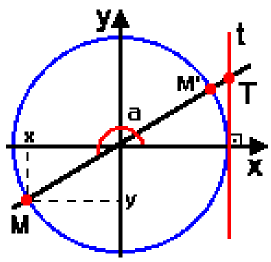
Outro caso particular importante é quando o ponto M está

sobre o eixo vertical OY e neste caso: $\cos(\pi/2)=0$ e $\text{sen}(\pi/2)=1$

A tangente não está definida, pois a reta OM não intercepta a reta t, pois elas são paralelas.

Ângulos no terceiro quadrante

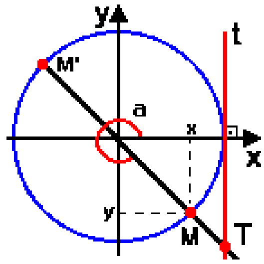
O ponto M=(x,y) está localizado no terceiro quadrante, o que significa que o ângulo pertence ao intervalo: $\pi<a<3\pi/2$. Este ponto M=(x,y) é simétrico ao ponto M'=(-x,-y) do primeiro quadrante, em relação à origem do sistema, indicando que tanto a sua abscissa como a sua ordenada são negativos. O seno e o cosseno de um ângulo no terceiro quadrante são negativos e a tangente é positiva.



Em particular, se $a=\pi$ radianos, temos que $\cos(\pi)=-1$, $\text{sen}(\pi)=0$ e $\tan(\pi)=0$

Ângulos no quarto quadrante

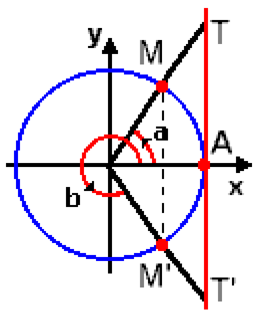
O ponto M está no quarto quadrante, $3\pi/2<a<2\pi$. O seno de ângulos no quarto quadrante é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa.



Quando o ângulo mede $3\pi/2$, a tangente não está definida pois a reta OP não intercepta a reta t, estas são paralelas. Quando $a=3\pi/2$, temos: $\cos(3\pi/2)=0$, $\sin(3\pi/2)=-1$

Simetria em relação ao eixo OX

Em uma circunferência trigonométrica, se M é um ponto no primeiro quadrante e M' o simétrico de M em relação ao eixo OX, estes pontos M e M' possuem a mesma abscissa e as ordenadas possuem sinais opostos.



Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM', obtemos:

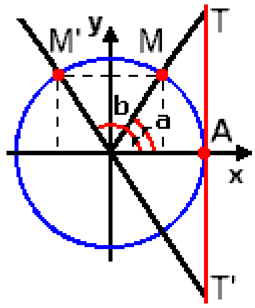
sen(a) = -sen(b)

cos(a) = cos(b)

tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação ao eixo OY

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico a M em relação ao eixo OY, estes pontos M e M' possuem a mesma ordenada e as abscissa são simétricas.

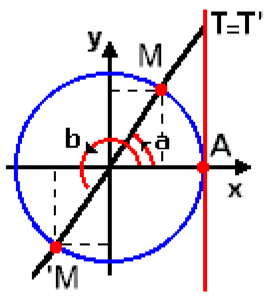


Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = sen(b)
cos(a) = -cos(b)
tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação à origem

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação a origem, estes pontos M e M' possuem ordenadas e abscissas simétricas.

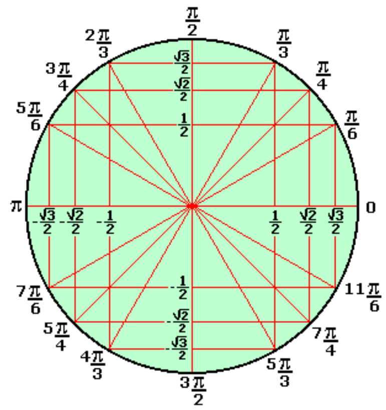


Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = -sen(b)
cos(a) = -cos(b)
tan(a) = tan(b)

Senos e cossenos de alguns ângulos notáveis

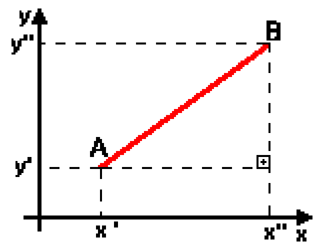
Uma maneira de obter o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que aparecem com muita frequência em exercícios e aplicações, sem necessidade de memorização, é através de simples observação no círculo trigonométrico.



Primeira relação fundamental

Uma identidade fundamental na trigonometria, que realiza um papel muito importante em todas as áreas da Matemática e também das aplicações é: $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ que é verdadeira para todo ângulo a.

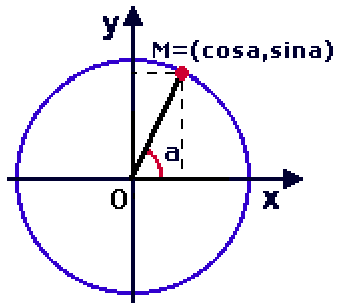
Necessitaremos do conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano, que nada mais é do que a relação de Pitágoras. Sejam dois pontos, A=(x',y') e B=(x",y").



Definimos a distância entre A e B, denotando-a por d(A,B), como:

$$d(A,B) = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

Se M é um ponto da circunferência trigonométrica, cujas coordenadas são indicadas por (cos(a),sen(a)) e a distância deste ponto até a origem (0,0) é igual a 1. Utilizando a fórmula da distância, aplicada a estes pontos, $d(M,0)=[(-\cos(a)-0)^2+(\text{sen}(a)-0)^2]^{1/2}$, de onde segue que $1=\cos^2(a)+\sin^2(a)$.



Segunda relação fundamental

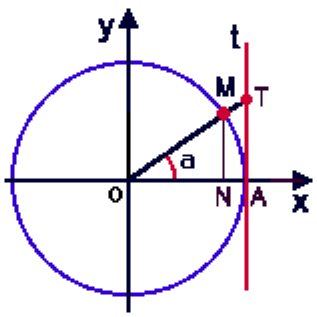
Outra relação fundamental na trigonometria, muitas vezes tomada como a definição da função tangente, é dada por:

$$\tan(a) = \frac{sen(a)}{\cos(a)}$$

Deve ficar claro, que este quociente somente fará sentido quando o denominador não se anular.

Se a=0, a=π ou a=2π, temos que sen(a)=0, implicando que tan(a)=0, mas se a=π/2 ou a=3π/2, segue que cos(a)=0 e a divisão acima não tem sentido, assim a relação tan(a)=sen(a)/cos(a) não é verdadeira para estes últimos valores de a.

Para $a \neq 0$, $a \neq \pi$, $a \neq 2\pi$, $a \neq \pi/2$ e $a \neq 3\pi/2$, considere novamente a circunferência trigonométrica na figura seguinte.



Os triângulos OMN e OTA são semelhantes, logo:

$$\frac{AT}{MN} = \frac{OA}{ON}$$

Como AT=|tan(a)|, MN=|sen(a)|, OA=1 e ON=|cos(a)|, para todo ângulo a, $0 \le a \le 2\pi$ com $a \neq \pi/2$ e $a \neq 3\pi/2$ temos

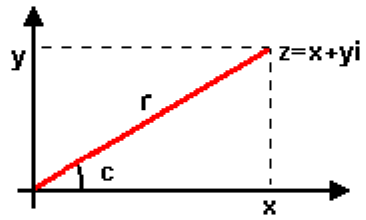
$$\tan(a) = \frac{sen(a)}{\cos(a)}$$

Forma polar dos números complexos

Um número complexo não nulo z=x+yi, pode ser representado pela sua forma polar:

z = r [cos(c) + i sen(c)]

onde r=|z|=R[x^2+y^2], i^2=-1 e c é o argumento (ângulo formado entre o segmento Oz e o eixo OX) do número complexo z.



A multiplicação de dois números complexos na forma polar:

A = |A| [cos(a)+isen(a)]

B = |B| [cos(b)+isen(b)]

é dada pela Fórmula de De Moivre:

AB = |A||B| [cos(a+b)+isen(a+b)]

Isto é, para multiplicar dois números complexos em suas formas trigonométricas, devemos multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos.

Se os números complexos A e B são unitários então |A|=1 e |B|=1, e nesse caso

A = cos(a) + i sen(a)

B = cos(b) + i sen(b)

Multiplicando A e B, obtemos

AB = cos(a+b) + i sen(a+b)

Existe uma importantíssima relação matemática, atribuída a Euler (lê-se "óiler"), garantindo que para todo número complexo z e também para todo número real z:

e^{iz} = cos(z) + i sen(z)

Tal relação, normalmente é demonstrada em um curso de Cálculo Diferencial, e, ela permite uma outra forma para representar números complexos unitários A e B, como:

A = e^{ia} = cos(a) + i sen(a)

B = e^{ib} = cos(b) + i sen(b)

onde a é o argumento de A e b é o argumento de B. Assim, $e^{i(a+b)}$ = cos(a+b)+isen(a+b)

Por outro lado $e^{i(a+b)}$ = e^{ia} . e^{ib} = [cos(a)+isen(a)] [cos(b)+isen(b)]

e desse modo $e^{i(a+b)}$ = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b) + i [cos(a)sen(b) + cos(b)sen(a)]

Para que dois números complexos sejam iguais, suas partes reais e imaginárias devem ser iguais, logo

cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)

sen(a+b) = cos(a)sen(b) + cos(b)sen(a)

Para a diferença de arcos, substituímos b por -b nas fórmulas da soma

cos(a+(-b)) = cos(a)cos(-b) - sen(a)sen(-b)
sen(a+(-b)) = cos(a)sen(-b) + cos(-b)sen(a)

para obter
cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)
sen(a-b) = cos(b)sen(a) - cos(a)sen(b)

Seno, cosseno e tangente da soma e da diferença

Na circunferência trigonométrica, sejam os ângulos a e b com 0£a£2π e 0£b£2π, a>b, então;
sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)
cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)

Dividindo a expressão de cima pela de baixo, obtemos:

$$\tan(a+b) = \frac{sen(a)\cos(b) + \cos(a)sen(b)}{\cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)}$$

Dividindo todos os quatro termos da fração por cos(a) cos(b), segue a fórmula:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Como
sen(a-b) = sen(a)cos(b) - cos(a)sen(b)
cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)
podemos dividir a expressão de cima pela de baixo, para obter:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES