01
01
19
33
38
38
43
47 51 53
51
53
54
54
54 54
73
73 73



1. OPERAÇÕES EM CONJUNTOS NUMÉRICOS (NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E REAIS) 2. NÚMEROS, OPERAÇÕES E PROBLEMAS ENVOLVENDO AS QUATRO OPERAÇÕES

NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula *N* e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos. No século VII, os árabes invadiram a Índia, difundindo o seu sistema numérico. Embora o zero não seja um número natural no sentido que tenha sido proveniente de objetos de contagens naturais, iremos considerá-lo como um número natural uma vez que ele tem as mesmas propriedades algébricas que os números naturais. Na verdade, o zero foi criado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo.

Na sequência consideraremos que os naturais têm início com o número zero e escreveremos este conjunto como: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Representaremos o conjunto dos números naturais com a letra N. As reticências (três pontos) indicam que este conjunto não tem fim. N é um conjunto com infinitos números

Excluindo o zero do conjunto dos números naturais, o conjunto será representado por: $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$

A construção dos Números Naturais

- Todo número natural dado tem um sucessor (número que vem depois do número dado), considerando também o zero.

Exemplos: Seja m um número natural.

- a) O sucessor de m é m+1.
- b) O sucessor de 0 é 1.
- c) O sucessor de 1 é 2.
- d) O sucessor de 19 é 20.
- Se um número natural é sucessor de outro, então os dois números juntos são chamados números consecutivos. Exemplos:
 - a) 1 e 2 são números consecutivos.
 - b) 5 e 6 são números consecutivos.
 - c) 50 e 51 são números consecutivos.
- Vários números formam uma coleção de números naturais consecutivos se o segundo é sucessor do primeiro, o terceiro é sucessor do segundo, o quarto é sucessor do terceiro e assim sucessivamente.

Exemplos:

- a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são consecutivos.
- b) 5, 6 e 7 são consecutivos.
- c) 50, 51, 52 e 53 são consecutivos.

- Todo número natural dado N, exceto o zero, tem um antecessor (número que vem antes do número dado).

Exemplos: Se m é um número natural finito diferente de zero.

- a) O antecessor do número m é m-1.
- b) O antecessor de 2 é 1.
- c) O antecessor de 56 é 55.
- d) O antecessor de 10 é 9.
- O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais pares. Embora uma sequência real seja outro objeto matemático denominado função, algumas vezes utilizaremos a denominação sequência dos números naturais pares para representar o conjunto dos números naturais pares: P = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais ímpares, às vezes também chamados, a sequência dos números ímpares. I = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

Operações com Números Naturais

Na sequência, estudaremos as duas principais operações possíveis no conjunto dos números naturais. Praticamente, toda a Matemática é construída a partir dessas duas operações: adição e multiplicação.

A adição de números naturais

A primeira operação fundamental da Aritmética tem por finalidade reunir em um só número, todas as unidades de dois ou mais números. Antes de surgir os algarismos indo-arábicos, as adições podiam ser realizadas por meio de tábuas de calcular, com o auxílio de pedras ou por meio de ábacos.

Propriedades da Adição

- <u>Fechamento</u>: A adição no conjunto dos números naturais é fechada, pois a soma de dois números naturais é ainda um número natural. O fato que a operação de adição é fechada em N é conhecido na literatura do assunto como: A adição é uma lei de composição interna no conjunto N.
- <u>Associativa</u>: A adição no conjunto dos números naturais é associativa, pois na adição de três ou mais parcelas de números naturais quaisquer é possível associar as parcelas de quaisquer modos, ou seja, com três números naturais, somando o primeiro com o segundo e ao resultado obtido somarmos um terceiro, obteremos um resultado que é igual à soma do primeiro com a soma do segundo e o terceiro. (A + B) + C = A + (B + C)
- <u>Elemento neutro</u>: No conjunto dos números naturais, existe o elemento neutro que é o zero, pois tomando um número natural qualquer e somando com o elemento neutro (zero), o resultado será o próprio número natural.
- <u>Comutativa</u>: No conjunto dos números naturais, a adição é comutativa, pois a ordem das parcelas não altera a soma, ou seja, somando a primeira parcela com a segunda parcela, teremos o mesmo resultado que se somando a segunda parcela com a primeira parcela.



Multiplicação de Números Naturais

É a operação que tem por finalidade adicionar o primeiro número denominado multiplicando ou parcela, tantas vezes quantas são as unidades do segundo número denominadas multiplicador.

Exemplo

4 vezes 9 é somar o número 9 quatro vezes: $4 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$

O resultado da multiplicação é denominado produto e os números dados que geraram o produto, são chamados fatores. Usamos o sinal \times ou \cdot ou x, para representar a multiplicação.

Propriedades da multiplicação

- <u>Fechamento</u>: A multiplicação é fechada no conjunto N dos números naturais, pois realizando o produto de dois ou mais números naturais, o resultado estará em N. O fato que a operação de multiplicação é fechada em N é conhecido na literatura do assunto como: A multiplicação é uma lei de composição interna no conjunto N.

- <u>Associativa</u>: Na multiplicação, podemos associar 3 ou mais fatores de modos diferentes, pois se multiplicarmos o primeiro fator com o segundo e depois multiplicarmos por um terceiro número natural, teremos o mesmo resultado que multiplicar o terceiro pelo produto do primeiro pelo segundo. (m . n) . p = m .(n . p) \rightarrow (3 . 4) . 5 = 3 . (4 . 5) = 60

- <u>Elemento Neutro</u>: No conjunto dos números naturais existe um elemento neutro para a multiplicação que é o 1. Qualquer que seja o número natural n, tem-se que: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n \rightarrow 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = 7$

- <u>Comutativa</u>: Quando multiplicamos dois números naturais quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, multiplicando o primeiro elemento pelo segundo elemento teremos o mesmo resultado que multiplicando o segundo elemento pelo primeiro elemento. m . n = n . m \rightarrow 3 . 4 = 4 . 3 = 12

Propriedade Distributiva

Multiplicando um número natural pela soma de dois números naturais, é o mesmo que multiplicar o fator, por cada uma das parcelas e a seguir adicionar os resultados obtidos. m . (p + q) = m . p + m . q \rightarrow 6 x (5 + 3) = 6 x 5 + 6 x 3 = 30 + 18 = 48

Divisão de Números Naturais

Dados dois números naturais, às vezes necessitamos saber quantas vezes o segundo está contido no primeiro. O primeiro número que é o maior é denominado dividendo e o outro número que é menor é o divisor. O resultado da divisão é chamado quociente. Se multiplicarmos o divisor pelo quociente obteremos o dividendo.

No conjunto dos números naturais, a divisão não é fechada, pois nem sempre é possível dividir um número natural por outro número natural e na ocorrência disto a divisão não é exata.

Relações essenciais numa divisão de números naturais

- Em uma divisão exata de números naturais, o divisor deve ser menor do que o dividendo. 35 : 7 = 5

- Em uma divisão exata de números naturais, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente. 35 = 5 x 7

- A divisão de um número natural n por zero não é possível pois, se admitíssemos que o quociente fosse q, então poderíamos escrever: $n \div 0 = q$ e isto significaria que: n = 0 x q = 0 o que não é correto! Assim, a divisão de n por 0 não tem sentido ou ainda é dita impossível.

Potenciação de Números Naturais

O número que se repete como fator é denominado base que neste caso é m. O número de vezes que a base se repete é denominado expoente que neste caso é n. O resultado é denominado potência. Esta operação não passa de uma multiplicação com fatores iguais, como por exemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \rightarrow 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

Propriedades da Potenciação

- Uma potência cuja base é igual a 1 e o expoente natural é n, denotada por 1º, será sempre igual a 1.

Exemplos:

$$a-1^n = 1 \times 1 \times ... \times 1$$
 (n vezes) = 1

$$b-1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$C-1^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

- Se n é um número natural não nulo, então temos que nº=1. Por exemplo:

$$- (a) n^{o} = 1$$

$$- (b) 5^{\circ} = 1$$

$$- (c) 49^{\circ} = 1$$

- A potência zero elevado a zero, denotada por 0º, é carente de sentido no contexto do Ensino Fundamental.

- Qualquer que seja a potência em que a base é o número natural n e o expoente é igual a 1, denotada por n¹, é igual ao próprio n. Por exemplo:

$$- (a) n^1 = n$$

$$- (b) 5^1 = 5$$

$$- (c) 64^1 = 64$$

- Toda potência 10º é o número formado pelo algarismo 1 seguido de n zeros.

Exemplos:

$$a - 10^{\frac{1}{3}} = 1000$$

$$b-10^8 = 100.000.000$$

$$c-10^{\circ}=1$$



QUESTÕES

1 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) A partir de 1º de março, uma cantina escolar adotou um sistema de recebimento por cartão eletrônico. Esse cartão funciona como uma conta corrente: coloca-se crédito e vão sendo debitados os gastos. É possível o saldo negativo. Enzo toma lanche diariamente na cantina e sua mãe credita valores no cartão todas as semanas. Ao final de março, ele anotou o seu consumo e os pagamentos na seguinte tabela:

	Valor Gasto	Valor Creditado
1ª semana	R\$ 27,00	R\$ 40,00
2ª semana	R\$ 33,00	R\$ 30,00
3ª semana	R\$ 42,00	R\$ 35,00
4ª semana	R\$ 25,00	R\$ 15,00

No final do mês, Enzo observou que tinha

- A) crédito de R\$ 7,00.
- B) débito de R\$ 7,00.
- C) crédito de R\$ 5.00.
- D) débito de R\$ 5,00.
- E) empatado suas despesas e seus créditos.
- 2 (PREF. IMARUI/SC AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS PREF. IMARUI/2014) José, funcionário público, recebe salário bruto de R\$ 2.000,00. Em sua folha de pagamento vem o desconto de R\$ 200,00 de INSS e R\$ 35,00 de sindicato. Qual o salário líquido de José?
 - A) R\$ 1800,00
 - B) R\$ 1765,00
 - C) R\$ 1675,00
 - D) R\$ 1665,00
- 3 (Professor/Pref.de Itaboraí) O quociente entre dois números naturais é 10. Multiplicando-se o dividendo por cinco e reduzindo-se o divisor à metade, o quociente da nova divisão será:
 - A) 2
 - B) 5
 - C) 25
 - D) 50
 - E) 100
- 4 (PREF. ÁGUAS DE CHAPECÓ OPERADOR DE MÁ-QUINAS – ALTERNATIVE CONCURSOS) Em uma loja, as compras feitas a prazo podem ser pagas em até 12 vezes sem juros. Se João comprar uma geladeira no valor de R\$ 2.100,00 em 12 vezes, pagará uma prestação de:
 - A) R\$ 150,00.
 - B) R\$ 175,00.
 - C) R\$ 200,00.
 - D) R\$ 225,00.

- 5 PREF. JUNDIAI/SP AGENTE DE SERVIÇOS OPERA-CIONAIS – MAKIYAMA/2013) Ontem, eu tinha 345 bolinhas de gude em minha coleção. Porém, hoje, participei de um campeonato com meus amigos e perdi 67 bolinhas, mas ganhei outras 90. Sendo assim, qual a quantidade de bolinhas que tenho agora, depois de participar do campeonato?
 - A) 368
 - B) 270
 - C) 365
 - D) 290
 - E) 376
- 6 (Pref. Niterói) João e Maria disputaram a prefeitura de uma determinada cidade que possui apenas duas zonas eleitorais. Ao final da sua apuração o Tribunal Regional Eleitoral divulgou a seguinte tabela com os resultados da eleição. A quantidade de eleitores desta cidade é:

	1ª Zona Eleitoral	2ª Zona Eleitoral
João	1750	2245
Maria	850	2320
Nulos	150	217
Brancos	18	25
Abstenções	183	175

- A) 3995
- B) 7165
- C) 7532
- D) 7575
- E) 7933
- 7 (PREF. JUNDIAI/SP AGENTE DE SERVIÇOS OPE-RACIONAIS MAKIYAMA/2013) Durante um mutirão para promover a limpeza de uma cidade, os 15.000 voluntários foram igualmente divididos entre as cinco regiões de tal cidade. Sendo assim, cada região contou com um número de voluntários igual a:
 - A) 2500
 - B) 3200
 - C) 1500
 - D) 3000
 - E) 2000
- 8 (PREF. JUNDIAI/SP AGENTE DE SERVIÇOS OPERA-CIONAIS – MAKIYAMA/2013) Em determinada loja, o pagamento de um computador pode ser feito sem entrada, em 12 parcelas de R\$ 250,00. Sendo assim, um cliente que opte por essa forma de pagamento deverá pagar pelo computador um total de:
 - A) R\$ 2500,00
 - B) R\$ 3000,00
 - C) R\$1900,00
 - D) R\$ 3300,00
 - E) R\$ 2700,00



- 9 (CREFITO/SP ALMOXARIFE VUNESP/2012) O sucessor do dobro de determinado número é 23. Esse mesmo determinado número somado a 1 e, depois, dobrado será igual a
 - A) 24.
 - B) 22.
 - C) 20.
 - D) 18.
 - E) 16.
- 10 (SABESP ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABILIDA-DE – FCC/2012) Uma montadora de automóveis possui cinco unidades produtivas num mesmo país. No último ano, cada uma dessas unidades produziu 364.098 automóveis. Toda a produção foi igualmente distribuída entre os mercados consumidores de sete países. O número de automóveis que cada país recebeu foi
 - A) 26.007
 - B) 26.070
 - C) 206.070
 - D) 260.007
 - E) 260.070

Respostas

1 - RESPOSTA: "B".

crédito: 40+30+35+15=120

débito: 27+33+42+25=127

120-127=-7

Ele tem um débito de R\$ 7,00.

2 - RESPOSTA: "B".

2000-200=1800-35=1765

O salário líquido de José é R\$1765,00.

3 - RESPOSTA: "E".

D= dividendo

d= divisor

Q = quociente = 10

R= resto = 0 (divisão exata)

Equacionando:

D = d.Q + R

 $D = d.10 + 0 \rightarrow D = 10d$

Pela nova divisão temos:

$$5D = \frac{d}{2}.Q \rightarrow 5.(10d) = \frac{d}{2}.Q$$

Isolando Q temos:

$$Q = \frac{50d}{\frac{d}{2}} \rightarrow Q = 50d.\frac{2}{d} \rightarrow Q = 50.2 \rightarrow Q = 100$$

4 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{2100}{12} = 175$$

Cada prestação será de R\$175,00

5 - RESPOSTA: "A".

345-67=278

Depois ganhou 90

278+90=368

6 - RESPOSTA: "E".

Vamos somar a 1^a Zona: 1750+850+150+18+183 = 2951

2ª Zona : 2245+2320+217+25+175 = 4982 Somando os dois: 2951+4982 = 7933

7 - RESPOSTA: "D".

$$\frac{15000}{5} = 3000$$

Cada região terá 3000 voluntários.

8 - RESPOSTA: "B".

250.12=3000

O computador custa R\$3000,00.

9 - RESPOSTA: "A".

Se o sucessor é 23, o dobro do número é 22, portanto o número é 11.

 $(11+1) \rightarrow 2=24$

10 - RESPOSTA: "E".

364098 → 5=1820490 automóveis

$$\frac{1820490}{7} = 260070$$

NÚMEROS INTEIROS – Z

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais (N = $\{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por: $Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros não nulos:

$$Z^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...\};$$

 $Z^* = Z - \{0\}$

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**:

 $Z_{+} = \{0, 1, 2, 3, 4,...\}$

 Z_{+} é o próprio conjunto dos números naturais: $Z_{+} = N$

- O conjunto dos números inteiros **positivos**:

 $Z^*_{\perp} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

- O conjunto dos números inteiros não positivos:

$$Z_{-} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

- O conjunto dos números inteiros **negativos**:

$$Z^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$$



Módulo: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.

- O módulo de $0 \in 0$ e indica-se |0| = 0
- O módulo de +7 é 7 e indica-se |+7| = 7
- O módulo de -9 é 9 e indica-se |-9| = 9
- O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números Opostos: Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Exemplo: O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0

No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de a é – a, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Adição de Números Inteiros

Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a idéia de ganhar e aos números inteiros negativos a idéia de perder.

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

Propriedades da adição de números inteiros: O conjunto Z é fechado para a adição, isto é, a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos *a,b,c* em *Z*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

 $2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7$

Comutativa: Para todos *a,b* em *Z*:

$$a + b = b + a$$

$$3 + 7 = 7 + 3$$

Elemento Neutro: Existe 0 em Z, que adicionado a cada z em Z, proporciona o próprio z, isto é:

$$z + 0 = z$$

$$7 + 0 = 7$$

Elemento Oposto: Para todo z em Z, existe (-z) em Z, tal que

$$z + (-z) = 0$$

$$9 + (-9) = 0$$

Subtração de Números Inteiros

A subtração é empregada quando:

- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;

- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.

Observe que:
$$9-5=4$$
 $4+5=9$ diferença subtraendo minuendo

Considere as seguintes situações:

1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?

Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) -(+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?

Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (-3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) - (+3) é o mesmo que (+6) + (-3).

Temos:

$$(+6) - (+3) = (+6) + (-3) = +3$$

$$(+3) - (+6) = (+3) + (-6) = -3$$

$$(-6) - (-3) = (-6) + (+3) = -3$$

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um \mathbf{x} , isto é: $1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1 = 30 \times 1 = 30$

Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos: $2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 \times 2 = 60$

Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos: $(-2) + (-2) + ... + (-2) = 30 \times (-2) = -60$

Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.

Na multiplicação o produto dos números a e b, pode ser indicado por $a \times b$, $a \cdot b$ ou ainda ab sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números inteiros, devemos obedecer à seguinte regra de sinais:



$$(+1) \times (+1) = (+1)$$

$$(+1) \times (-1) = (-1)$$

$$(-1) \times (+1) = (-1)$$

$$(-1) \times (-1) = (+1)$$

Com o uso das regras acima, podemos concluir que:

Sinais dos números	Resultado do produto
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

Propriedades da multiplicação de números inteiros: O conjunto Z é fechado para a multiplicação, isto é, a multiplicação de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos a,b,c em *Z*:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

 $2 \times (3 \times 7) = (2 \times 3) \times 7$

Comutativa: Para todos a,b em *Z*:

Elemento neutro: Existe 1 em Z, que multiplicado por todo z em Z, proporciona o próprio z, isto é:

$$z \times 1 = z$$

 $7 \times 1 = 7$

Elemento inverso: Para todo inteiro z diferente de zero, existe um inverso $z^{-1}=1/z$ em Z, tal que

$$z \times z^{-1} = z \times (1/z) = 1$$

 $9 \times 9^{-1} = 9 \times (1/9) = 1$

Distributiva: Para todos *a,b,c* em *Z*:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

 $3 \times (4+5) = (3 \times 4) + (3 \times 5)$

Divisão de Números Inteiros

Dividendo<u>| divisor</u> dividendo: Divisor = quociente 0

Quociente . divisor = dividendo

Sabemos que na divisão exata dos números naturais:

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros. Veja o cálculo:

$$(-20): (+5) = q \Rightarrow (+5) \cdot q = (-20) \Rightarrow q = (-4)$$

Logo: $(-20): (+5) = -4$

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro positivo.
- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro negativo.
- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto Z. Por exemplo, (+7): (-2) ou (-19): (-5) são divisões que não podem ser realizadas em Z, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto Z, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.
 - 1- Não existe divisão por zero.

Exemplo: (-15): 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a -15.

2- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.

Exemplos: a)
$$0: (-10) = 0$$
 b) $0: (+6) = 0$ c) $0: (-1) = 0$

Potenciação de Números Inteiros

A potência a^n do número inteiro a, é definida como um produto de n fatores iguais. O número a é denominado a base e o número n é o expoente.

$$a^n = a \times a \times a \times a \times ... \times a$$

 $a \in \text{multiplicado por } a \text{ } n \text{ vezes}$

Exemplos:
$$3^3 = (3) \times (3) \times (3) = 27$$

(-5)⁵ = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = -3125

$$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$$

 $(+9)^2 = (+9) \times (+9) = 81$

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo:
$$(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo:
$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **inteiro negativo**.

Exemplo:
$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

Propriedades da Potenciação:

Produtos de Potências com bases iguais: Conservase a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3$. $(-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

Quocientes de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(+13)^8$: $(+13)^6$ = $(+13)^{8-6}$ = $(+13)^2$

Potência de Potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(+4)^5]^2 = (+4)^{5.2} = (+4)^{10}$

Potência de expoente 1: É sempre igual à base. $(+9)^1$ = +9 $(-13)^1 = -13$

Potência de expoente zero e base diferente de zero: É igual a 1. Exemplo: $(+14)^{\circ} = 1$ $(-35)^{\circ} = 1$



Radiciação de Números Inteiros

A raiz n-ésima (de ordem n) de um número inteiro a é a operação que resulta em outro número inteiro não negativo b que elevado à potência n fornece o número a. O número n é o índice da raiz enquanto que o número a é o radicando (que fica sob o sinal do radical).

A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número inteiro negativo no conjunto dos números inteiros.

Erro comum: Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas aparecimento de:

 $\sqrt{9} = \pm 3$

mas isto está errado. O certo é:

 $\sqrt{9} = +3$

Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro a é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número a. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.

Exemplos

(a)
$$\sqrt[3]{8} = 2$$
, pois $2^3 = 8$.

(b)
$$\sqrt[3]{-8} = -2$$
, pois $(-2)^3 = -8$.

(c)
$$\sqrt[3]{27} = 3$$
, pois $3^3 = 27$.

(d)
$$\sqrt[3]{-27} = -3$$
, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:

- (a) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.
- (b) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

QUESTÕES

1 - (TRF 2^a – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012) Uma operação λ é definida por:

 $w^{\lambda} = 1 - 6w$, para todo inteiro w.

Com base nessa definição, é correto afirmar que a soma $2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda}$ é igual a

A) -20.

B) -15.

C) -12.

D) 15.

E) 20.

2 - (UEM/PR - AUXILIAR OPERACIONAL - UEM/2014)

Ruth tem somente R\$ 2.200,00 e deseja gastar a maior quantidade possível, sem ficar devendo na loja.

Verificou o preço de alguns produtos:

TV: R\$ 562,00

DVD: R\$ 399,00

Micro-ondas: R\$ 429,00

Geladeira: R\$ 1.213,00

Na aquisição dos produtos, conforme as condições mencionadas, e pagando a compra em dinheiro, o troco recebido será de:

A) R\$ 84,00

B) R\$ 74,00

C) R\$ 36,00

D) R\$ 26,00

E) R\$ 16,00

3 - (PREF. JUNDIAI/SP - ELETRICISTA - MAKIYA-MA/2013) Analise as operações a seguir:

$$I a^b a^c = a^x$$

$$II\frac{a^b}{a^c}=a^y$$

$$III (a^c)^2 = a^z$$

De acordo com as propriedades da potenciação, temos que, respectivamente, nas operações I, II e III:

A) x=b-c, y=b+c e z=c/2.

B) x=b+c, y=b-c e z=2c.

c) x=2bc, y=-2bc e z=2c.

D) x=c-b, y=b-c e z=c-2.

E) x=2b, y=2c e z=c+2.

4 - (BNDES - TÉCNICO ADMINISTRATIVO - CES-GRANRIO/2013) Multiplicando-se o maior número inteiro menor do que 8 pelo menor número inteiro maior do que - 8, o resultado encontrado será

A) - 72

B) - 63

C) - 56

D) - 49

E) - 42

5 - (SEPLAG - POLÍCIA MILITAR/MG - ASSISTENTE ADMINISTRATIVO - FCC/2012) Em um jogo de tabuleiro, Carla e Mateus obtiveram os seguintes resultados:

Carla			
1ª partida Ganhou 520 pontos			
2ª partida	Perdeu 220 pontos		
3ª partida	Perdeu 485 pontos		
4ª partida	Ganhou 635 pontos		

Mateus			
1ª partida Perdeu 280 pontos			
2ª partida	Ganhou 675 pontos		
3ª partida	Ganhou 295 pontos		
4ª partida	Perdeu 115 pontos		

Ao término dessas quatro partidas,

- A) Carla perdeu por uma diferença de 150 pontos.
- B) Mateus perdeu por uma diferença de 175 pontos.
- C) Mateus ganhou por uma diferença de 125 pontos.
- D) Carla e Mateus empataram.

6 – (Operador de máq./Pref.Coronel Fabriciano/MG) Quantos são os valores inteiros e positivos de x para os quais x + 15 é um número inteiro?

x + 5

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

7- (CASA DA MOEDA) O quadro abaixo indica o número de passageiros num vôo entre Curitiba e Belém, com duas escalas, uma no Rio de Janeiro e outra em Brasília. Os números indicam a quantidade de passageiros que subiram no avião e os negativos, a quantidade dos que desceram em cada cidade.

Curtiba	+240
Rio de Janeiro	-194 +158
Brasília	-108 +94

O número de passageiros que chegou a Belém foi:

- A) 362
- B) 280
- C) 240
- D) 190
- E) 135

RESPOSTAS

1 - RESPOSTA:"E".

Pela definição:

Fazendo w=2

$$2^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 2 = -11$$

$$1^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 1 = -5$$

$$(1^{\lambda})^{\lambda} = 1 - 6 \cdot (-5) = 31$$

$$2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda} = -11 + 31 = 20$$



2 - RESPOSTA: "D".

Geladeira + Microondas + DVD = 1213+429+399 = 2041

Geladeira + Microondas + TV = 1213+429+562 = 2204, extrapola o orçamento

Geladeira +TV + DVD=1213+562+399=2174, é a maior quantidade gasta possível dentro do orçamento.

Troco:2200-2174=26 reais

3 - RESPOSTA: "B".

I da propriedade das potências, temos:

$$a^x = a^{b+c} \Rightarrow x = b+c$$

$$II a^y = a^{b-c} \Rightarrow y = b - c$$

$$III a^{2c} = a^z \Rightarrow z = 2c$$

4 - RESPOSTA: "D".

Maior inteiro menor que 8 é o 7 Menor inteiro maior que -8 é o -7. Portanto: $7 \cdot (-7) = -49$

5 - RESPOSTA: "C".

Carla: 520-220-485+635=450 pontos Mateus: -280+675+295-115=575 pontos Diferença: 575-450=125 pontos

6 - RESPOSTA:"C".

Fazendo substituição dos valores de x, dentro dos conjuntos do inteiros positivos temos:

$$x=0; \frac{15}{5} = 3$$
 $x=1; \frac{16}{6} = n\tilde{a}o \text{ \'e inteiro}$

$$\therefore x = 2 \frac{17}{7} = n\tilde{a}o \text{ \'e inteiro}$$

x=5 $\frac{20}{10}=2$, logo os únicos números que satisfazem a condição é x= 0 e x=5 , dois números apenas.

7 - RESPOSTA:"D".

240- 194 +158 -108 +94 = 190

NÚMEROS RACIONAIS - Q

m Um número racional é o que pode ser escrito na forma -, onde m e n são números inteiros, sendo que n deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos m/n para significar a divisão de *m* por *n*.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por Q. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

$$Q = \{\frac{m}{n} : m \ e \ n \ em \ Z, n \ differente \ de \ zero\}$$

No conjunto Q destacamos os seguintes subconjuntos:

- Q* = conjunto dos racionais não nulos;

Q₊ = conjunto dos racionais não negativos;

Q*₊ = conjunto dos racionais positivos;

Q = conjunto dos racionais não positivos;
 Q*_ = conjunto dos racionais negativos.

Representação Decimal das Frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que p não seja múltiplo de q. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1°) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$$\frac{2}{5}$$
 = 0,4

$$\frac{1}{4}$$
 = 0,25

$$\frac{35}{4}$$
 = 8,75

$$\frac{153}{50}$$
 = 3,06

2º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$$\frac{1}{3}$$
 = 0,333...

$$\frac{1}{22}$$
 = 0,04545...

$$\frac{167}{66}$$
 = 2,53030...

Representação Fracionária dos Números Decimais

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

1º) Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:



$$0.9 = \frac{9}{10}$$

$$5.7 = \frac{57}{10}$$

$$0.76 = \frac{76}{100}$$

$$3,48 = \frac{348}{100}$$

$$0,005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

2º) Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

Exemplo 1

Seja a dízima 0, 333....

Façamos x = 0.333... e multipliquemos ambos os membros por 10: 10x = 0.333

Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade da segunda:

$$10x - x = 3,333... - 0,333... \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = 3/9$$

Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

Exemplo 2

Seja a dízima 5, 1717...

Façamos x = 5,1717... e 100x = 517,1717... . Subtraindo membro a membro, temos: $99x = 512 \implies x = 512/99$

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.

Exemplo 3

Seja a dízima 1, 23434...

Façamos x = 1,23434... 10x = 12,3434... 1000x = 1234,34...

Subtraindo membro a membro, temos:

 $990x = 1234,34... - 12,34... \Rightarrow 990x = 1222 \Rightarrow x = 1222/990$

Simplificando, obtemos x = $\frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1, 23434...

Módulo ou valor absoluto: É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.

Exemplo: Módulo de
$$-\frac{3}{2}$$
 é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Módulo de
$$+\frac{3}{2}$$
 é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left| +\frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3}{2} \right|$

Números Opostos: Dizemos que $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

Soma (Adição) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Propriedades da Adição de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional.

- Associativa: Para todos a, b, c em Q: a + (b + c) = (a + b) + c
 - Comutativa: Para todos a, b em Q: a + b = b + a
- Elemento neutro: Existe 0 em Q, que adicionado a todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: q + 0 = q
- Elemento oposto: Para todo q em Q, existe -q em Q, tal que q + (-q) = 0

Subtração de Números Racionais

A subtração de dois números racionais p e q é a própria operação de adição do número p com o oposto de q, isto é: p-q=p+(-q)

Multiplicação (Produto) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{c}$, da mesma forma que o produto de frações, atravês de.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais a e b também pode ser indicado por $a \times b$, axb, a.b ou ainda ab sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

$$(+1) \times (+1) = (+1)$$

$$(+1) \times (-1) = (-1)$$

$$(-1) \times (+1) = (-1)$$

$$(-1) \times (-1) = (+1)$$

Podemos assim concluir que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.



Propriedades da Multiplicação de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número

- Associativa: Para todos a, b, c em Q: $a \times (b \times c) = (a \times (b \times c))$ $a \times b) \times c$
 - Comutativa: Para todos a, b em Q: $a \times b = b \times a$
 - Elemento neutro: Existe 1 em Q, que multiplicado por
- todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: $q \times 1 = q$ Elemento inverso: Para todo q = $\frac{a}{a}$ em Q, q diferente de zero, existe $q^{-1} = \frac{b}{a}$ em Q: $q \times q^{-1} = \frac{a}{b}$ $x \times a = 1$
- a Distributiva: Para todos a, b, c em Q: $a \times (b + c) = (a + c)$ $a \times b$) + ($a \times c$)

Divisão de Números Racionais

A divisão de dois números racionais p e q é a própria operação de multiplicação do número p pelo inverso de q, isto é: $p \div q =$

Potenciação de Números Racionais

A potência q^n do número racional q é um produto de n fatores iguais. O número q é denominado a base e o número *n* é o expoente.

$$q^n = q \times q \times q \times q \times ... \times q$$
, (q aparece n vezes)

a)
$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$$

b)
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

c)
$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

d)
$$(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = 25$$

Propriedades da Potenciação: Toda potência com expoente 0 é igual a 1.

$$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$$

- Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

- Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

- Toda potência com expoente par é um número

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

'- Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

- Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

- Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes

$$\left[\left(\frac{1^2}{2} \right) \right]^3 = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}^{2+2+2} = \frac{1}{2}^{3 \times 2} = \frac{1}{2}^6$$

Radiciação de Números Racionais

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

4 Representa o produto 2 . 2 ou 22. Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se √4= 2.

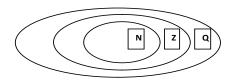
 $\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{1}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{1}{9}$. Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Exemplo 3

0,216 Representa o produto 0,6 . 0,6 . <u>0,6 ou</u> (0,6)³. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.



Assim, podemos construir o diagrama:



Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $\frac{-100}{9}$ não tem raiz quadrada em Q pois tanto $\frac{-10}{3}$ como $\frac{+10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão

Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê $\frac{2}{3}$.

Questões

1 - (PREF. JUNDIAI/SP - AGENTE DE SERVIÇOS OPE-RACIONAIS - MAKIYAMA/2013) Na escola onde estudo, 1/4 dos alunos tem a língua portuguesa como disciplina favorita, 9/20 têm a matemática como favorita e os demais têm ciências como favorita. Sendo assim, qual fração representa os alunos que têm ciências como disciplina favorita?

- A) 1/4
- B) 3/10
- C) 2/9
- D) 4/5
- E) 3/2

2 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014)

Dirce comprou 7 lapiseiras e pagou R\$ 8,30, em cada uma delas. Pagou com uma nota de 100 reais e obteve um desconto de 10 centavos. Quantos reais ela recebeu de troco?

- A) R\$ 40,00
- B) R\$ 42,00
- C) R\$ 44,00
- D) R\$ 46,00
- E) R\$ 48,00

3 - (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERA-CIONAL - VUNESP/2013) De um total de 180 candidatos, 2/5 estudam inglês, 2/9 estudam francês, 1/3 estuda espanhol e o restante estuda alemão. O número de candidatos que estuda alemão é:

- A) 6.
- B) 7.
- C) 8.
- D) 9.
- E) 10.

4 - (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERA-CIONAL - VUNESP/2013) Em um estado do Sudeste, um Agente de Apoio Operacional tem um salário mensal de: saláriobase R\$ 617,16 e uma gratificação de R\$ 185,15. No mês passado, ele fez 8 horas extras a R\$ 8,50 cada hora, mas precisou faltar um dia e foi descontado em R\$ 28,40. No mês passado, seu salário totalizou

- A) R\$ 810,81.
- B) R\$ 821,31.
- C) R\$ 838,51.
- D) R\$ 841,91.
- E) R\$ 870,31.

5 - (Pref. Niterói) Simplificando a expressão abaixo

Obtém-se
$$\frac{1,3333+\frac{3}{2}}{1,5+\frac{4}{3}}$$
:

- B) 1
- C) 3/2
- D) 2
- E) 3

6 - (SABESP - APRENDIZ - FCC/2012) Em um jogo matemático, cada jogador tem direito a 5 cartões marcados com um número, sendo que todos os jogadores recebem os mesmos números. Após todos os jogadores receberem seus cartões, aleatoriamente, realizam uma determinada tarefa que também é sorteada. Vence o jogo quem cumprir a tarefa corretamente. Em uma rodada em que a tarefa era colocar os números marcados nos cartões em ordem crescente, venceu o jogador que apresentou a sequência

A) -4; -1;
$$\sqrt{16}$$
; $\sqrt{25}$; $\frac{14}{3}$

B) -1; -4;
$$\sqrt{16}$$
; $\frac{14}{3}$; $\sqrt{25}$

$$(C) -1; -4; \frac{14}{3}; \sqrt{16}; ; \sqrt{25}$$

$$D) - 4; -1; \sqrt{16}; \frac{14}{3}; \sqrt{25}$$

$$E)-4;-1; \frac{14}{3}; \sqrt{16}; \sqrt{25}$$

7 – (Prof./Prefeitura de Itaboraí) Se x = 0.181818...então o valor numérico da expressão:

$$\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1}$$

- A) 34/39
- B) 103/147
- C) 104/147
- D) 35/49
- E) 106/147

8 - (SABESP - APRENDIZ - FCC/2012) Mariana abriu seu cofrinho com 120 moedas e separou-as:



- 1 real: 1/4 das moedas

- 50 centavos: 1/3 das moedas

- 25 centavos: 2/5 das moedas

- 10 centavos: as restantes

Mariana totalizou a quantia contida no cofre em

A) R\$ 62,20.

B) R\$ 52,20.

C) R\$ 50,20.

D) R\$ 56,20.

E) R\$ 66,20.

9 - (PM/SE - SOLDADO 3°CLASSE - FUNCAB/2014)

Numa operação policial de rotina, que abordou 800 pessoas, verificou-se que 3/4 dessas pessoas eram homens e 1/5 deles foram detidos. Já entre as mulheres abordadas, 1/8 foram detidas.

Qual o total de pessoas detidas nessa operação policial?

A) 145

B) 185

C) 220

D) 260

E) 120

10 - (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Quando perguntado sobre qual era a sua idade, o professor de matemática respondeu:

"O produto das frações 9/5 e 75/3 fornece a minha idade!".

Sendo assim, podemos afirmar que o professor tem:

A) 40 anos.

B) 35 anos.

C) 45 anos.

D) 30 anos.

E) 42 anos.

Respostas

1 - RESPOSTA: "B".

Somando português e matemática:

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{20} = \frac{5+9}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

O que resta gosta de ciências:

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

2 - RESPOSTA: "B".

$$8.3 \cdot 7 = 58.1$$

Como recebeu um desconto de 10 centavos, Dirce pagou 58 reais

Troco:100-58=42 reais

3 - RESPOSTA: "C".

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}$$

Mmc(3,5,9)=45

$$\frac{18+10+15}{45} = \frac{43}{45}$$

O restante estuda alemão: 2/45

$$180 \cdot \frac{2}{45} = 8$$

4 - RESPOSTA: "D".

salário mensal: 617,16 + 185,15 = 802,31horas extras: $8,5 \cdot 8 = 68$ mês passado: 802,31 + 68,00 - 28,40 = 841,91Salário foi R\$ 841.91.

5 - RESPOSTA: "B".

$$1,3333 = 12/9 = 4/3$$

 $1,5 = 15/10 = 3/2$

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{17}{6}}{\frac{17}{6}} = 1$$

6 - RESPOSTA: "D".

$$\sqrt{16} = 4
\sqrt{25} = 5
\frac{14}{3} = 4,67$$

A ordem crescente é : -4; -1; $\sqrt{16}$; $\frac{14}{3}$; $\sqrt{25}$

7 - RESPOSTA: "B".

x=0,181818... temos então pela transformação na fração geratriz: 18/99 = 2/11, substituindo:

$$\frac{\frac{2}{11} + \frac{1}{\frac{2}{11}} - 1}{\frac{2}{11} + \frac{1}{\frac{2}{11}} + 1} = \frac{\frac{2}{11} + \frac{11}{2} - 1}{\frac{2}{11} + \frac{11}{2} + 1} = \frac{\frac{4 + 121 - 22}{22}}{\frac{4 + 121 + 22}{22}} = \frac{103}{147}$$

8 - RESPOSTA: "A".

$$1 \ real: 120 \cdot \frac{1}{4} = 30 \ moedas$$

$$50 \ centavos: \frac{1}{3} \cdot 120 = 40 \ moedas$$

10 centavos: 120 - 118 moedas = 2 moedas

$$30 + 40 \cdot 0.5 + 48 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.10 = 62.20$$

Mariana totalizou R\$ 62.20.

9 - RESPOSTA: "A".

$$800 \cdot \frac{3}{4} = 600 \ homens$$

$$600 \cdot \frac{1}{5} = 120 \text{ homens detidos}$$

Como 3/4 eram homens, 1/4 eram mulheres

$$800 \cdot \frac{1}{4} = 200 \text{ mulheres}$$
 ou 800-600=200 mulheres

$$200 \cdot \frac{1}{8} = 25 \text{ mulhers detidas}$$

Total de pessoas detidas: 120+25=145

10 - RESPOSTA: "C".

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{75}{3} = \frac{675}{15} = 45 \ anos$$

NÚMEROS REAIS

O conjunto dos **números reais** R é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, como 3,141592(...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Denomina-se corpo dos números reais a coleção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de frações associado aos inteiros (números racionais) e a norma associada ao infinito.

Existem também outras conclusões dos racionais, uma para cada número primo p, chamadas números p-ádicos. O corpo dos números p-ádicos é formado pelos racionais e a norma associada a p!

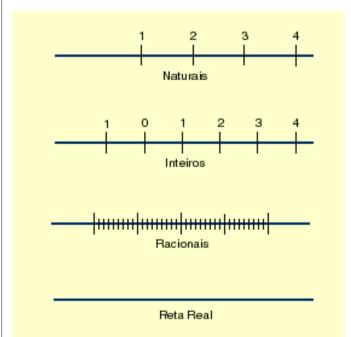
Propriedade

O conjunto dos números reais com as operações binárias de soma e produto e com a relação natural de ordem formam um corpo ordenado. Além das propriedades de um corpo ordenado, R tem a seguinte propriedade: Se R for dividido em dois conjuntos (uma partição) A e B, de modo que todo elemento de A é menor que todo elemento de B, então existe um elemento X que X0 que X1 separa os dois conjuntos, ou seja, X2 é maior ou igual a todo elemento de X3.

$$\forall A, B, (\mathbb{R} = A \cup B \land (\forall a \in A, b \in B, (a < b))$$

 $\Longrightarrow (\exists x, (\forall a \in A, b \in B \implies a \le x \le b))$

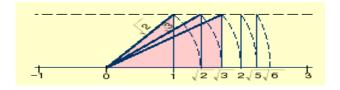
Ao conjunto formado pelos números Irracionais e pelos números Racionais chamamos de conjunto dos números Reais. Ao unirmos o conjunto dos números Irracionais com o conjunto dos números Racionais, formando o conjunto dos números Reais, todas as distâncias representadas por eles sobre uma reta preenchem-na por completo; isto é, ocupam todos os seus pontos. Por isso, essa reta é denominada reta Real.



Cada novo conjunto numérico ocupa mais pontos da reta. O conjunto dos números reais a preenche por completo.

Podemos concluir que na representação dos números Reais sobre uma reta, dados uma origem e uma unidade, a cada ponto da reta corresponde um número Real e a cada número Real corresponde um ponto na reta.





Ordenação dos números Reais

A representação dos números Reais permite definir uma relação de ordem entre eles. Os números Reais positivos são maiores que zero e os negativos, menores. Expressamos a relação de ordem da seguinte maneira: Dados dois números Reais **a** e **b**,

$$a \le b \leftrightarrow b - a \ge 0$$

Exemplo: $-15 \le \leftrightarrow 5 - (-15) \ge 0$ $5 + 15 \ge 0$

Propriedades da relação de ordem

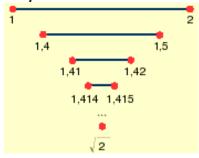
- Reflexiva: a ≤ a

- Transitiva: $a \le b \in b \le c \rightarrow a \le c$

- Anti-simétrica: $a \le b e b \le a \rightarrow a = b$

- Ordem total: a < b ou b < a ou a = b

Expressão aproximada dos números Reais



Os números Irracionais possuem infinitos algarismos decimais não-periódicos. As operações com esta classe de números sempre produzem erros quando não se utilizam todos os algarismos decimais. Por outro lado, é impossível utilizar todos eles nos cálculos. Por isso, somos obrigados a usar aproximações, isto é, cortamos o decimal em algum lugar e desprezamos os algarismos restantes. Os algarismos escolhidos serão uma aproximação do número Real. Observe como tomamos a aproximação de e do número nas tabelas.

	Aproximação por			
	Fa	alta	Excesso	
Erro menor que	√ 2 π		√2	π
1 unidade	1 3		2	4
1 décimo	1,4 3,1		1,5	3,2
1 centésimo	1,41	3,14	1,42	3,15
1 milésimo	1,414	3,141	1,415	3,142
1 décimo de milésimo	1,4142	3,1415	1,4134	3,1416

Operações com números Reais

Operando com as aproximações, obtemos uma sucessão de intervalos fixos que determinam um número Real. É assim que vamos trabalhar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão. Relacionamos, em seguida, uma série de recomendações úteis para operar com números Reais:

- Vamos tomar a aproximação por falta.
- Se quisermos ter uma ideia do erro cometido, escolhemos o mesmo número de casas decimais em ambos os números.
- Se utilizamos uma calculadora, devemos usar a aproximação máxima admitida pela máquina (o maior número de casas decimais).
- Quando operamos com números Reais, devemos fazer constar o erro de aproximação ou o número de casas decimais.
- É importante adquirirmos a idéia de aproximação em função da necessidade. Por exemplo, para desenhar o projeto de uma casa, basta tomar medidas com um erro de centésimo.
- Em geral, para obter uma aproximação de ${\bf n}$ casas decimais, devemos trabalhar com números Reais aproximados, isto é, com ${\bf n}$ + 1 casas decimais.

Para colocar em prática o que foi exposto, vamos fazer as quatro operações indicadas: adição, subtração, multiplicação e divisão com dois números Irracionais.

$$\sqrt{2} = 1,41421...$$
 $\sqrt{3} = 1,73205...$

Valor Absoluto

Como vimos, o **erro** pode ser:

- Por excesso: neste caso, consideramos o erro positivo.
- Por falta: neste caso, consideramos o erro negativo.

Quando o erro é dado sem sinal, diz-se que está dado em valor absoluto. O valor absoluto de um número **a** é designado por **|a|** e coincide com o número positivo, se for positivo, e com seu oposto, se for negativo.

Exemplo: Um livro nos custou 8,50 reais. Pagamos com uma nota de 10 reais. Se nos devolve 1,60 real de troco, o vendedor cometeu um erro de +10 centavos. Ao contrário, se nos devolve 1,40 real, o erro cometido é de 10 centavos.



Figura 8	Aproximação	POR EXCESSO	POR FALTA
Soma de números reais:	√2 1,4143		1,4142
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	√3	1,7321	1,7320
	√3 + √2	3,1464	3,1462
	erro máximo	0,0002	0,0002
Subtração de números reais:	√2	1,4143	1,4142
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	√3	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	- √2 0,3178	
	erro máximo	0,0000	0,0000
Multiplicação de números	√2	1,4143	1,4142
reais: $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	√3	1,7321	1,7320
	√3 × √2	2,4497	2,4493
	erro máximo	0,0004	0,0004
Divisão de números reais:	√2	1,4143	1,4142
$\sqrt{3} \div \sqrt{2}$	√3	1,7321	1,7320
	√3 ÷ √2	1,2247	1,2247
	erro máximo	0,0000	0,0000

Questões

1 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um comerciante tem 8 prateleiras em seu empório para organizar os produtos de limpeza. Adquiriu 100 caixas desses produtos com 20 unidades cada uma, sendo que a quantidade total de unidades compradas será distribuída igualmente entre essas prateleiras. Desse modo, cada prateleira receberá um número de unidades, desses produtos, igual a

A) 40

B) 50

C) 100

D) 160

E) 250

2 - (CÂMARA DE CANITAR/SP - RECEPCIONISTA - INDEC/2013) Em uma banca de revistas existem um total de 870 exemplares dos mais variados temas. Metade das revistas é da editora A, dentre as demais, um terço são publicações antigas. Qual o número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas?

A) 320

B) 290

C) 435

D) 145

3 - (TRT 6ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO- ADMINISTRA-TIVA - FCC/2012) Em uma praia chamava a atenção um catador de cocos (a água do coco já havia sido retirada). Ele só pegava cocos inteiros e agia da seguinte maneira: o primeiro coco ele coloca inteiro de um lado; o segundo ele dividia ao meio e colocava as metades em outro lado; o terceiro coco ele dividia em três partes iguais e colocava os terços de coco em um terceiro lugar, diferente dos outros lugares; o quarto coco ele dividia em quatro partes iguais e colocava os guartos de coco em um guarto lugar diferente dos outros lugares. No quinto coco agia como se fosse o primeiro coco e colocava inteiro de um lado, o seguinte dividia ao meio, o seguinte em três partes iguais, o seguinte em quatro partes iguais e seguia na seguência: inteiro, meios, três partes iguais, quatro partes iguais. Fez isso com exatamente 59 cocos quando alguém disse ao catador: eu quero três quintos dos seus terços de coco e metade dos seus quartos de coco. O catador consentiu e deu para a pessoa

A) 52 pedaços de coco.

B) 55 pedaços de coco.

C) 59 pedaços de coco.

D) 98 pedaços de coco.

E) 101 pedaços de coco.

4 - (UEM/PR - AUXILIAR OPERACIONAL - UEM/2014)

A mãe do Vitor fez um bolo e repartiu em 24 pedaços, todos de mesmo tamanho. A mãe e o pai comeram juntos, ¼ do bolo. O Vitor e a sua irmã comeram, cada um deles, ¼ do bolo. Quantos pedaços de bolo sobraram?

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10 E) 12

5 - (UEM/PR - AUXILIAR OPERACIONAL - UEM/2014)

Paulo recebeu R\$1.000,00 de salário. Ele gastou ¼ do salário com aluguel da casa e 3/5 do salário com outras despesas. Do salário que Paulo recebeu, quantos reais ainda restam?

A) R\$ 120,00

B) R\$ 150,00

C) R\$ 180,00

D) R\$ 210,00

E) R\$ 240,00

6 - (UFABC/SP - TECNÓLOGO-TECNOLOGIA DA IN-FORMAÇÃO - VUNESP/2013) Um jardineiro preencheu parcialmente, com água, 3 baldes com capacidade de 15 litros cada um. O primeiro balde foi preenchido com 2/3 de sua capacidade, o segundo com 3/5 da capacidade, e o terceiro, com um volume correspondente à média dos volumes dos outros dois baldes. A soma dos volumes de água nos três baldes, em litros, é

A) 27.

B) 27,5.

C) 28.

D) 28,5.

E) 29.



7 - (UFOP/MG – ADMINISTRADOR DE EDIFICIOS – UFOP/2013) Uma pessoa caminha 5 minutos em ritmo normal e, em seguida, 2 minutos em ritmo acelerado e, assim, sucessivamente, sempre intercalando os ritmos da caminhada (5 minutos normais e 2 minutos acelerados). A caminhada foi iniciada em ritmo normal, e foi interrompida após 55 minutos do início.

O tempo que essa pessoa caminhou aceleradamente foi:

- A) 6 minutos
- B) 10 minutos
- C) 15 minutos
- D) 20 minutos

8 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Sobre o conjunto dos números reais é CORRETO dizer:

- A) O conjunto dos números reais reúne somente os números racionais.
 - B) R* é o conjunto dos números reais não negativos.
- C) Sendo A = {-1,0}, os elementos do conjunto A não são números reais.
 - D) As dízimas não periódicas são números reais.

9 - (TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL - VUNESP/2013) Para numerar as páginas de um livro, uma impressora gasta 0,001 mL por cada algarismo impresso. Por exemplo, para numerar as páginas 7, 58 e 290 gasta-se, respectivamente, 0,001 mL, 0,002 mL e 0,003 mL de tinta. O total de tinta que será gasto para numerar da página 1 até a página 1 000 de um livro, em mL, será

- A) 1,111.
- B) 2,003.
- C) 2,893.
- D) 1.003.
- E) 2,561.

10 - (BNDES - TÉCNICO ADMINISTRATIVO - CES-GRANRIO/2013) Gilberto levava no bolso três moedas de R\$ 0,50, cinco de R\$ 0,10 e quatro de R\$ 0,25. Gilberto retirou do bolso oito dessas moedas, dando quatro para cada filho.

A diferença entre as quantias recebidas pelos dois filhos de Gilberto é de, no máximo,

- A) R\$ 0,45
- B) R\$ 0,90
- C) R\$ 1,10
- D) R\$ 1,15
- E) R\$ 1,35

Respostas

1 - RESPOSTA: "E".

Total de unidades: 100 · 20 = 2000 unidades

$$\frac{2000}{8} = 250$$
 unidades em cada prateleira.

2 - RESPOSTA: "B".

editora A: 870/2=435 revistas publicações antigas: 435/3=145 revistas

$$435 + 145 = 580$$

$$870 - 580 = 290$$

O número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas são 290.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{59}{4} = 14 \, resto \, 3$$

14 vezes iguais

Coco inteiro: 14

Metades:14.2=28

Terça parte:14.3=42

Quarta parte:14.4=56

3 cocos: 1 coco inteiro, metade dos cocos, terça parte

Quantidade total

Coco inteiro: 14+1=15

Metades: 28+2=30

Terça parte:42+3=45

Quarta parte:56

$$\frac{3}{5} \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 56 = 27 + 28 = 55$$

4 - RESPOSTA "B".

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Sobrou 1/4 do bolo.

$$24 \cdot \frac{1}{4} = 6 \ pedaços$$

5 - RESPOSTA: "B".

Aluguel:
$$1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$$

Outras despesas:
$$1000 \cdot \frac{3}{5} = 600$$

$$250 + 600 = 850$$

Restam:1000-850=R\$150,00

6 - RESPOSTA: "D".

Primeiro balde:

$$\frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \ litros$$

Segundo balde:

$$\frac{3}{5} \cdot 15 = 9 \ litros$$

Terceiro balde:

$$\frac{10+9}{2} = 9,5 \ litros$$

A soma dos volumes é: 10+9+9,5=28,5 litros

7 - RESPOSTA: "C".

A caminhada sempre vai ser 5 minutos e depois 2 minutos, então 7 minutos ao total. Dividindo o total da caminhada pelo tempo, temos:

$$\frac{55}{7} = 7 e resta 6$$

Assim, sabemos que a pessoa caminhou 7. (5 minutos +2 minutos) +6 minutos (5 minutos +1 minuto) Aceleradamente caminhou: $(7.2)+1 \rightarrow 14+1=15$ minutos

8 - RESPOSTA: "D".

A) errada - O conjunto dos números reais tem os conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais.

B) errada – R* são os reais sem o zero.

C) errada - -1 e 0 são números reais.

9 - RESPOSTA: "C".

1 a 9 = 9 algarismos = 0,001 · 9 = 0,009 ml

De 10 a 99, temos que saber quantos números tem.

99-10+1=90.

OBS: soma 1, pois quanto subtraímos exclui-se o primeiro número.

90 números de 2 algarismos: 0,002 · 90=0,18ml

De 100 a 999

999-100+1=900 números

900 · 0,003 = 2,7ml

1000=0,004ml

Somando: 0,009+0,18+2,7+0,004=2,893

10 - RESPOSTA: "E".

Supondo que as quatro primeiras moedas sejam as 3 de R\$ 0,50 e 1 de R\$ 0,25(maiores valores).

Um filho receberia: 1,50+0,25=R\$1,75

E as ouras quatro moedas sejam de menor valor: 4 de R\$ 0,10=R\$ 0,40.

A maior diferença seria de 1,75-0,40=1,35

Dica: sempre que fala a maior diferença tem que o maior valor possível – o menor valor.



3. PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO

Raciocínio Lógico Matemático

Os estudos matemáticos ligados aos fundamentos lógicos contribuem no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, induzindo a organização do pensamento e das ideias, na formação de conceitos básicos, assimilação de regras matemáticas, construção de fórmulas e expressões aritméticas e algébricas. É de extrema importância que em matemática utilize-se atividades envolvendo lógica, no intuito de despertar o raciocínio, fazendo com que se utilize do potencial na busca por soluções dos problemas matemáticos desenvolvidos e baseados nos conceitos lógicos.

A lógica está presente em diversos ramos da matemática, como a probabilidade, os problemas de contagem, as progressões aritméticas e geométricas, as sequências numéricas, equações, funções, análise de gráficos entre outros. Os fundamentos lógicos contribuem na resolução ordenada de equações, na percepção do valor da razão de uma sequência, na elucidação de problemas aritméticos e algébricos e na fixação de conteúdos complexos.

A utilização das atividades lógicas contribui na formação de indivíduos capazes de criar ferramentas e mecanismos responsáveis pela obtenção de resultados em Matemática. O sucesso na Matemática está diretamente conectado à curiosidade, pesquisa, deduções, experimentos, visão detalhada, senso crítico e organizacional e todas essas características estão ligadas ao desenvolvimento lógico.

Raciocínio Lógico Dedutivo

A dedução é uma inferência que parte do universal para o mais particular. Assim considera-se que um raciocínio lógico é dedutivo quando, de uma ou mais premissas, se conclui uma proposição que é conclusão lógica da(s) premissa(s). A dedução é um raciocínio de tipo mediato, sendo o silogismo uma das suas formas clássicas. Iniciaremos com a compreensão das sequências lógicas, onde devemos deduzir, ou até induzir, qual a lei de formação das figuras, letras, símbolos ou números, a partir da observação dos termos dados.

Humor Lógico











Orientações Espacial e Temporal

Orientação espacial e temporal verifica a capacidade de abstração no espaço e no tempo. Costuma ser cobrado em questões sobre a disposições de dominós, dados, baralhos, amontoados de cubos com símbolos especificados em suas faces, montagem de figuras com subfiguras, figuras fractais, dentre outras. Inclui também as famosas sequências de figuras nas quais se pede a próxima. Serve para verificar a capacidade do candidato em resolver problemas com base em estímulos visuais.

Raciocínio Verbal

O raciocínio é o conjunto de atividades mentais que consiste na associação de ideias de acordo com determinadas regras. No caso do raciocínio verbal, trata-se da capacidade de raciocinar com conteúdos verbais, estabelecendo entre eles princípios de classificação, ordenação, relação e significados. Ao contrário daquilo que se possa pensar, o raciocínio verbal é uma capacidade intelectual que tende a ser pouco desenvolvida pela maioria das pessoas. No nível escolar, por exemplo, disciplinas como as línguas centram-se em objetivos como a ortografia ou a gramática, mas não estimulam/incentivam à aprendizagem dos métodos de expressão necessários para que os alunos possam fazer um uso mais completo da linguagem.



Por outro lado, o auge dos computadores e das consolas de jogos de vídeo faz com que as crianças costumem jogar de forma individual, isto é, sozinhas (ou com outras crianças que não se encontrem fisicamente com elas), pelo que não é feito um uso intensivo da linguagem. Uma terceira causa que se pode aqui mencionar para explicar o fraco raciocínio verbal é o fato de jantar em frente à televisão. Desta forma, perde-se o diálogo no seio da família e a arte de conversar.

Entre os exercícios recomendados pelos especialistas para desenvolver o raciocínio verbal, encontram-se as analogias verbais, os exercícios para completar orações, a ordem de frases e os jogos onde se devem excluir certos conceitos de um grupo. Outras propostas implicam que sigam/respeitem certas instruções, corrijam a palavra inadequada (o intruso) de uma frase ou procurem/descubram antônimos e sinônimos de uma mesma palavra.

Lógica Sequencial Lógica Sequencial

O Raciocínio é uma operação lógica, discursiva e mental. Neste, o intelecto humano utiliza uma ou mais proposições, para concluir através de mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis. Foi pelo processo do raciocínio que ocorreu o desenvolvimento do método matemático, este considerado instrumento puramente teórico e dedutivo, que prescinde de dados empíricos. Logo, resumidamente o raciocínio pode ser considerado também um dos integrantes dos mecanismos dos processos cognitivos superiores da formação de conceitos e da solução de problemas, sendo parte do pensamento.

Sequências Lógicas

As sequências podem ser formadas por números, letras, pessoas, figuras, etc. Existem várias formas de se estabelecer uma sequência, o importante é que existam pelo menos três elementos que caracterize a lógica de sua formação, entretanto algumas séries necessitam de mais elementos para definir sua lógica. Algumas sequências são bastante conhecidas e todo aluno que estuda lógica deve conhecê-las, tais como as progressões aritméticas e geométricas, a série de Fibonacci, os números primos e os quadrados perfeitos.

Sequência de Números

Progressão Aritmética: Soma-se constantemente um mesmo número.



Progressão Geométrica: Multiplica-se constantemente um mesmo número.



Incremento em Progressão: O valor somado é que está em progressão.



Série de Fibonacci: Cada termo é igual a soma dos dois anteriores.

11235813

Números Primos: Naturais que possuem apenas dois divisores naturais.

2 3 5 7 11 13 17

Quadrados Perfeitos: Números naturais cujas raízes são naturais.

1 4 9 16 25 36 49

Sequência de Letras

As sequências de letras podem estar associadas a uma série de números ou não. Em geral, devemos escrever todo o alfabeto (observando se deve, ou não, contar com k, y e w) e circular as letras dadas para entender a lógica proposta.

ACFJOU

Observe que foram saltadas 1, 2, 3, 4 e 5 letras e esses números estão em progressão.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U

B1 2F H4 8L N16 32R T64

Nesse caso, associou-se letras e números (potências de 2), alternando a ordem. As letras saltam 1, 3, 1, 3, 1, 3 e 1 posições.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T

Sequência de Pessoas

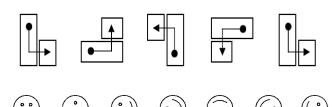
Na série a seguir, temos sempre um homem seguido de duas mulheres, ou seja, aqueles que estão em uma posição múltipla de três (3°, 6°, 9°, 12°,...) serão mulheres e a posição dos braços sempre alterna, ficando para cima em uma posição múltipla de dois (2°, 4°, 6°, 8°,...). Sendo assim, a sequência se repete a cada seis termos, tornando possível determinar quem estará em qualquer posição.





Sequência de Figuras

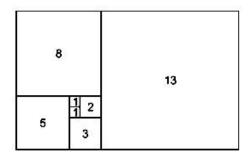
Esse tipo de sequência pode seguir o mesmo padrão visto na sequência de pessoas ou simplesmente sofrer rotações, como nos exemplos a seguir.



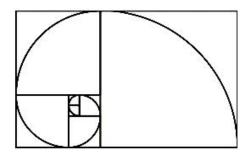
Sequência de Fibonacci

O matemático Leonardo Pisa, conhecido como Fibonacci, propôs no século XIII, a sequência numérica: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Essa sequência tem uma lei de formação simples: cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois anteriores. Veja: 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5 e assim por diante. Desde o século XIII, muitos matemáticos, além do próprio Fibonacci, dedicaram-se ao estudo da sequência que foi proposta, e foram encontradas inúmeras aplicações para ela no desenvolvimento de modelos explicativos de fenômenos naturais.

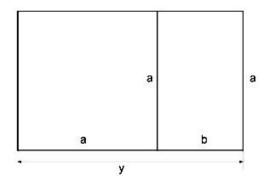
Veja alguns exemplos das aplicações da sequência de Fibonacci e entenda porque ela é conhecida como uma das maravilhas da Matemática. A partir de dois quadrados de lado 1, podemos obter um retângulo de lados 2 e 1. Se adicionarmos a esse retângulo um quadrado de lado 2, obtemos um novo retângulo 3 x 2. Se adicionarmos agora um quadrado de lado 3, obtemos um retângulo 5 x 3. Observe a figura a seguir e veja que os lados dos quadrados que adicionamos para determinar os retângulos formam a sequência de Fibonacci.



Se utilizarmos um compasso e traçarmos o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado, encontraremos uma espiral formada pela concordância de arcos cujos raios são os elementos da sequência de Fibonacci.



O Partenon que foi construído em Atenas pelo célebre arquiteto grego Fidias. A fachada principal do edifício, hoje em ruínas, era um retângulo que continha um quadrado de lado igual à altura. Essa forma sempre foi considerada satisfatória do ponto de vista estético por suas proporções sendo chamada retângulo áureo ou retângulo de ouro.



Como os dois retângulos indicados na figura são semelhantes temos: $\frac{y}{a} = \frac{a}{b}$ (1).

Como:
$$b = y - a$$
 (2).
Substituindo (2) em (1) temos: $y^2 - ay - a^2 = 0$.

Resolvendo a equação:

$$y = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$
 em que $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0\right)$ não convém.

Logo:
$$\frac{y}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1,61803398875$$

Esse número é conhecido como número de ouro e pode ser representado por:

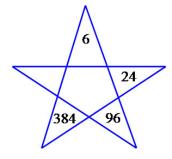
$$\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Todo retângulo e que a razão entre o maior e o menor lado for igual a é chamado retângulo áureo como o caso da fachada do Partenon.

As figuras a seguir possuem números que representam uma sequência lógica. Veja os exemplos:



Exemplo 1



A sequência numérica proposta envolve multiplicações por 4.

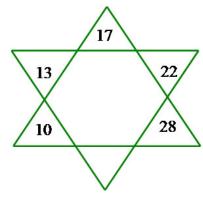
 $6 \times 4 = 24$

 $24 \times 4 = 96$

 $96 \times 4 = 384$

 $384 \times 4 = 1536$

Exemplo 2



A diferença entre os números vai aumentando 1 unidade.

13 - 10 = 3

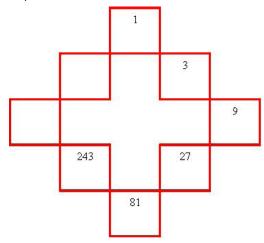
17 - 13 = 4

22 - 17 = 5

28 - 22 = 6

35 - 28 = 7

Exemplo 3



Multiplicar os números sempre por 3.

 $1 \times 3 = 3$

 $3 \times 3 = 9$

 $9 \times 3 = 27$

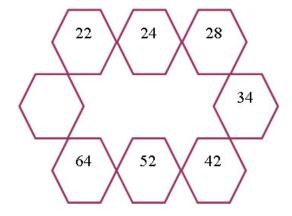
 $27 \times 3 = 81$

 $81 \times 3 = 243$

243 x 3 = 729

 $729 \times 3 = 2187$

Exemplo 4



A diferença entre os números vai aumentando 2 unidades.

24 - 22 = 2

28 - 24 = 4

34 - 28 = 6

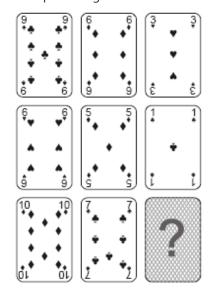
42 - 34 = 8

52 - 42 = 10

64 - 52 = 1278 - 64 = 14

QUESTÕES

01. Observe atentamente a disposição das cartas em cada linha do esquema seguinte:





A carta que está oculta é:

(A)









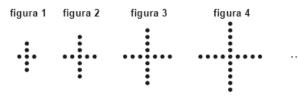








02. Considere que a sequência de figuras foi construída segundo um certo critério.



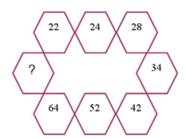
Se tal critério for mantido, para obter as figuras subsequentes, o total de pontos da figura de número 15 deverá ser:

- (A) 69
- (B) 67
- (C)65
- (D) 63
- (E) 61

03. O próximo número dessa sequência lógica é: 1000, 990, 970, 940, 900, 850, ...

- (A) 800
- (B) 790
- (C)780
- (D) 770

04. Na sequência lógica de números representados nos hexágonos, da figura abaixo, observa-se a ausência de um deles que pode ser:



- (A)76
- (B) 10
- (C) 20
- (D) 78

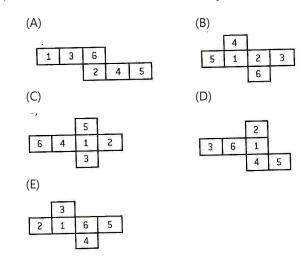
05. Uma criança brincando com uma caixa de palitos de fósforo constrói uma sequência de quadrados conforme indicado abaixo:



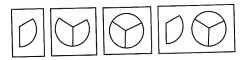
Quantos palitos ele utilizou para construir a 7ª figura?

- (A) 20 palitos
- (B) 25 palitos
- (C) 28 palitos
- (D) 22 palitos

06. Ana fez diversas planificações de um cubo e escreveu em cada um, números de 1 a 6. Ao montar o cubo, ela deseja que a soma dos números marcados nas faces opostas seja 7. A única alternativa cuja figura representa a planificação desse cubo tal como deseja Ana é:



07. As figuras da sequência dada são formadas por partes iguais de um círculo.



Continuando essa sequência, obtém-se exatamente 16 círculos completos na:

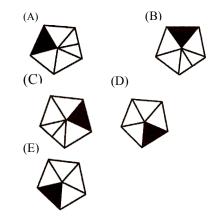
- (A) 36ª figura
- (B) 48^a figura
- (C) 72ª figura (D) 80ª figura (E) 96ª figura

08. Analise a sequência a seguir:



Admitindo-se que a regra de formação das figuras seguintes permaneça a mesma, pode-se afirmar que a figura que ocuparia a 277ª posição dessa sequência é:





- 09. Observe a sequência: 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ... Qual é o próximo número?
 - (A) 20
 - (B) 21
 - (C) 100
 - (D) 200
- 10. Observe a sequência: 3,13, 30, ... Qual é o próximo número?
 - (A) 4
 - (B) 20
 - (C) 31
 - (D) 21
- 11. Os dois pares de palavras abaixo foram formados segundo determinado critério.

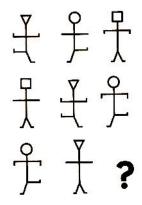
LACRAÇÃO → cal

AMOSTRA → soma

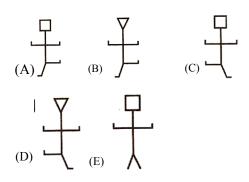
LAVRAR → ?

Segundo o mesmo critério, a palavra que deverá ocupar o lugar do ponto de interrogação é:

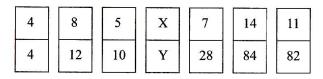
- (A) alar
- (B) rala
- (C) ralar
- (D) larva
- (E) arval
- 12. Observe que as figuras abaixo foram dispostas, linha a linha, segundo determinado padrão.



Segundo o padrão estabelecido, a figura que substitui corretamente o ponto de interrogação é:

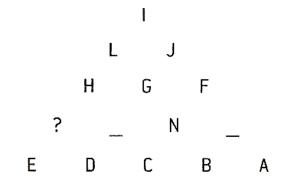


13. Observe que na sucessão seguinte os números foram colocados obedecendo a uma lei de formação.



Os números X e Y, obtidos segundo essa lei, são tais que X + Y é igual a:

- (A) 40
- (B) 42
- (C) 44
- (D) 46
- (E)48
- 14. A figura abaixo representa algumas letras dispostas em forma de triângulo, segundo determinado critério.



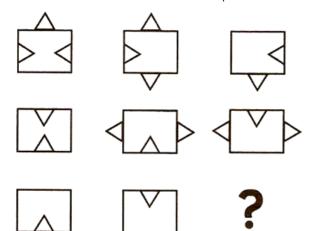
Considerando que na ordem alfabética usada são excluídas as letra "K", "W" e "Y", a letra que substitui corretamente o ponto de interrogação é:

- (A) P
- (B) O
- (C) N
- (D) M
- (E) L

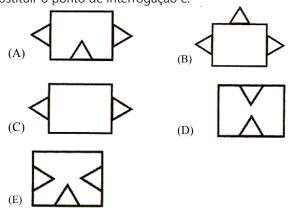
15. Considere que a sequência seguinte é formada pela sucessão natural dos números inteiros e positivos, sem que os algarismos sejam separados.

1234567891011121314151617181920...

- O algarismo que deve aparecer na 276ª posição dessa sequência é:
 - (A) 9
 - (B) 8
 - (C) 6
 - (D) 3
 - (E) 1
- 16. Em cada linha abaixo, as três figuras foram desenhadas de acordo com determinado padrão.



Segundo esse mesmo padrão, a figura que deve substituir o ponto de interrogação é:



17. Observe que, na sucessão de figuras abaixo, os números que foram colocados nos dois primeiros triângulos obedecem a um mesmo critério







Para que o mesmo critério seja mantido no triângulo da direita, o número que deverá substituir o ponto de interrogação é:

- (A) 32
- (B) 36
- (C)38
- (D) 42
- (E) 46
- 18. Considere a seguinte sequência infinita de números: 3, 12, 27, __, 75, 108,... O número que preenche adequadamente a quarta posição dessa sequência é:
 - (A) 36,
 - (B) 40,
 - (C) 42,
 - (D) 44,
 - (E) 48
- 19. Observando a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots)_0$ próximo numero será:
 - (A) $\frac{1}{24}$
 - (B) $\frac{1}{30}$
 - (C) $\frac{1}{36}$
 - (D) $\frac{1}{40}$
 - 20. Considere a sequência abaixo:

BBB BXB XXB XBX XBX XBX BBB BXB BXX

O padrão que completa a sequência é:

- (A) (B) (C) XXX XXB XXX XXX XBX XXX XXX BXX XXB
- (D) (E) XXX XXX XBX XBX XXX BXX
- 21. Na série de Fibonacci, cada termo a partir do terceiro é igual à soma de seus dois termos precedentes. Sabendo-se que os dois primeiros termos, por definição, são 0 e 1, o sexto termo da série é:
 - (A) 2
 - (B) 3
 - (C) 4
 - (D) 5
 - (E) 6

22. Nosso código secreto usa o alfabeto A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z. Do seguinte modo: cada letra é substituída pela letra que ocupa a quarta posição depois dela. Então, o "A" vira "E", o "B" vira "F", o "C" vira "G" e assim por diante. O código é "circular", de modo que o "U" vira "A" e assim por diante. Recebi uma mensagem em código que dizia: BSA HI EDAP. Decifrei o código e li:

- (A) FAZ AS DUAS;
- (B) DIA DO LOBO;
- (C) RIO ME QUER;
- (D) VIM DA LOJA;
- (E) VOU DE AZUL.

23. A sentença "Social está para laicos assim como 231678 está para..." é melhor completada por:

- (A) 326187;
- (B) 876132;
- (C) 286731;
- (D) 827361;
- (E) 218763.

24. A sentença "Salta está para Atlas assim como 25435 está para..." é melhor completada pelo seguinte número:

- . (A) 53452;
- (B) 23455;
- (C) 34552;
- (D) 43525;
- (E) 53542.

25. Repare que com um número de 5 algarismos, respeitada a ordem dada, podem-se criar 4 números de dois algarismos. Por exemplo: de 34.712, podem-se criar o 34, o 47, o 71 e o 12. Procura-se um número de 5 algarismos formado pelos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8, sem repetição. Veja abaixo alguns números desse tipo e, ao lado de cada um deles, a quantidade de números de dois algarismos que esse número tem em comum com o número procurado.

Número dado	Quantidade de números de 2 algarismos em comum
48.765	1
86.547	0
87.465	2
48.675	1

O número procurado é:

- (A) 87456
- (B) 68745
- (C) 56874
- (D) 58746
- (E) 46875

26. Considere que os símbolos ♦ e ♣ que aparecem no quadro seguinte, substituem as operações que devem ser efetuadas em cada linha, a fim de se obter o resultado correspondente, que se encontra na coluna da extrema direita.

36	•	4	•	5	=	14
48	•	6	•	9	=	17
54	•	9	•	7	=	?

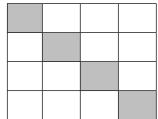
Para que o resultado da terceira linha seja o correto, o ponto de interrogação deverá ser substituído pelo número:

- (A) 16
- (B) 15
- (C) 14
- (D) 13
- (E) 12

27. Segundo determinado critério, foi construída a sucessão seguinte, em que cada termo é composto de um número seguido de uma letra: A1 – E2 – B3 – F4 – C5 – G6 – Considerando que no alfabeto usado são excluídas as letras K, Y e W, então, de acordo com o critério estabelecido, a letra que deverá anteceder o número 12 é:

- (A) J
- (B) L
- (C) M
- (D) N
- (E) O

28. Os nomes de quatro animais – MARÁ, PERU, TATU e URSO – devem ser escritos nas linhas da tabela abaixo, de modo que cada uma das suas respectivas letras ocupe um quadrinho e, na diagonal sombreada, possa ser lido o nome de um novo animal.



Excluídas do alfabeto as letras K, W e Y e fazendo cada letra restante corresponder ordenadamente aos números inteiros de 1 a 23 (ou seja, A = 1, B = 2, C = 3,..., Z = 23), a soma dos números que correspondem às letras que compõem o nome do animal é:

- (A) 37
- (B) 39
- (C)45
- (D) 49

(E) 51

Nas questões 29 e 30, observe que há uma relação entre o primeiro e o segundo grupos de letras. A mesma relação deverá existir entre o terceiro grupo e um dos cinco grupos que aparecem nas alternativas, ou seja, aquele que substitui corretamente o ponto de interrogação. Considere que a ordem alfabética adotada é a oficial e exclui as letras K, W e Y.



29. CASA: LATA: LOBO: ?

(A) SOCO

(B) TOCO

(C) TOMO

(D) VOLO

(D) VOLC

(E) VOTO

30. ABCA: DEFD: HIJH: ?

(A) IJLI

(B) JLMJ

(C) LMNL

(D) FGHF

(E) EFGE

31. Os termos da sucessão seguinte foram obtidos considerando uma lei de formação (0, 1, 3, 4, 12, 123,...). Segundo essa lei, o décimo terceiro termo dessa sequência é um número:

(A) Menor que 200.

(B) Compreendido entre 200 e 400.

(C) Compreendido entre 500 e 700.

(D) Compreendido entre 700 e 1.000.

(E) Maior que 1.000.

Para responder às questões de números 32 e 33, você deve observar que, em cada um dos dois primeiros pares de palavras dadas, a palavra da direita foi obtida da palavra da esquerda segundo determinado critério. Você deve descobrir esse critério e usá-lo para encontrar a palavra que deve ser colocada no lugar do ponto de interrogação.

32. Ardoroso → rodo

Dinamizar → mina

Maratona →?

(A) mana

(B) toma

(C) tona

(D) tora

(E) rato

33. Arborizado → azar

Asteroide → dias

Articular → ?

(A) luar

(B) arar

(C) lira

(D) luta

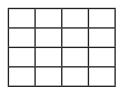
(E) rara

34. Preste atenção nesta sequência lógica e identifique quais os números que estão faltando: 1, 1, 2, __, 5, 8, __,21, 34, 55, __, 144, __...

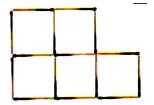
35. Uma lesma encontra-se no fundo de um poço seco de 10 metros de profundidade e quer sair de lá. Durante o dia, ela consegue subir 2 metros pela parede; mas à noite, enquanto dorme, escorrega 1 metro. Depois de quantos dias ela consegue chegar à saída do poço?

36. Quantas vezes você usa o algarismo 9 para numerar as páginas de um livro de 100 páginas?

37. Quantos quadrados existem na figura abaixo?



38. Retire três palitos e obtenha apenas três quadrados.



39. Qual será o próximo símbolo da sequência abaixo?



40. Reposicione dois palitos e obtenha uma figura com cinco quadrados iguais.



41. Observe as multiplicações a seguir:

 $12.345.679 \times 18 = 222.222.222$

 $12.345.679 \times 27 = 333.333.333$

... ... 12.345.679 × 54 = 666.666.666

Para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por quanto?

42. Esta casinha está de frente para a estrada de terra. Mova dois palitos e faça com que fique de frente para a estrada asfaltada.

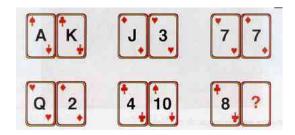




43. Remova dois palitos e deixe a figura com dois quadrados.



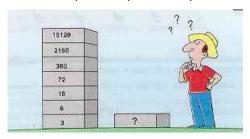
44. As cartas de um baralho foram agrupadas em pares, segundo uma relação lógica. Qual é a carta que está faltando, sabendo que K vale 13, Q vale 12, J vale 11 e A vale 1?



45. Mova um palito e obtenha um quadrado perfeito.



46. Qual o valor da pedra que deve ser colocada em cima de todas estas para completar a sequência abaixo?



47. Mova três palitos nesta figura para obter cinco triângulos.



48. Tente dispor 6 moedas em 3 fileiras de modo que em cada fileira fiquem apenas 3 moedas.



49. Reposicione três palitos e obtenha cinco quadrados.



50. Mude a posição de quatro palitos e obtenha cinco triângulos.



01. Resposta: "A".

A diferença entre os números estampados nas cartas 1 e 2, em cada linha, tem como resultado o valor da 3ª carta e, além disso, o naipe não se repete. Assim, a 3ª carta, dentro das opções dadas só pode ser a da opção (A).

02. Resposta "D".

Observe que, tomando o eixo vertical como eixo de simetria, tem-se:

Na figura 1: 01 ponto de cada lado \rightarrow 02 pontos no total.

Na figura 2: 02 pontos de cada lado \Rightarrow 04 pontos no total.

Na figura 3: 03 pontos de cada lado \Rightarrow 06 pontos no total.

Na figura 4: 04 pontos de cada lado \Rightarrow 08 pontos no total.

Na figura n: n pontos de cada lado \rightarrow 2.n pontos no total.

Em particular:

Na figura 15: 15 pontos de cada lado \rightarrow 30 pontos no total.

Agora, tomando o eixo horizontal como eixo de simetria, tem-se:

Na figura 1: 02 pontos acima e abaixo \rightarrow 04 pontos no total.

Na figura 2: 03 pontos acima e abaixo \rightarrow 06 pontos no total.



Na figura 3: 04 pontos acima e abaixo \rightarrow 08 pontos no total.

Na figura 4: 05 pontos acima e abaixo \rightarrow 10 pontos no total.

Na figura n: (n+1) pontos acima e abaixo \rightarrow 2.(n+1) pontos no total.

Em particular:

Na figura 15: 16 pontos acima e abaixo \rightarrow 32 pontos no total. Incluindo o ponto central, que ainda não foi considerado, temos para total de pontos da figura 15: Total de pontos = 30 + 32 + 1 = 63 pontos.

03. Resposta "B".

Nessa sequência, observamos que a diferença: entre $1000 \, \mathrm{e} \, 990 \, \mathrm{\acute{e}} \, 10$, entre $990 \, \mathrm{e} \, 970 \, \mathrm{\acute{e}} \, 20$, entre o $970 \, \mathrm{e} \, 940 \, \mathrm{\acute{e}} \, 30$, entre $940 \, \mathrm{e} \, 900 \, \mathrm{\acute{e}} \, 40$, entre $900 \, \mathrm{e} \, 850 \, \mathrm{\acute{e}} \, 50$, portanto entre $850 \, \mathrm{e} \, \mathrm{o} \, \mathrm{proximo} \, \mathrm{número} \, \mathrm{\acute{e}} \, 60$, dessa forma concluímos que o próximo número $\mathrm{\acute{e}} \, 790$, pois: 850 - 790 = 60.

04. Resposta "D"

Nessa sequência lógica, observamos que a diferença: entre 24 e 22 é 2, entre 28 e 24 é 4, entre 34 e 28 é 6, entre 42 e 34 é 8, entre 52 e 42 é 10, entre 64 e 52 é 12, portanto entre o próximo número e 64 é 14, dessa forma concluímos que o próximo número é 78, pois: 76 - 64 = 14.

05. Resposta "D". Observe a tabela:

Figuras	1ª	2ª	3ª	4 ^a	5ª	6ª	7 ^a
N° de Palitos	4	7	10	13	16	19	22

Temos de forma direta, pela contagem, a quantidade de palitos das três primeiras figuras. Feito isto, basta perceber que cada figura a partir da segunda tem a quantidade de palitos da figura anterior acrescida de 3 palitos. Desta forma, fica fácil preencher o restante da tabela e determinar a quantidade de palitos da 7ª figura.

06. Resposta "A".

Na figura apresentada na letra "B", não é possível obter a planificação de um lado, pois o 4 estaria do lado oposto ao 6, somando 10 unidades. Na figura apresentada na letra "C", da mesma forma, o 5 estaria em face oposta ao 3, somando 8, não formando um lado. Na figura da letra "D", o 2 estaria em face oposta ao 4, não determinando um lado. Já na figura apresentada na letra "E", o 1 não estaria em face oposta ao número 6, impossibilitando, portanto, a obtenção de um lado. Logo, podemos concluir que a planificação apresentada na letra "A" é a única para representar um lado.

07. Resposta "B".

Como na 3ª figura completou-se um círculo, para completar 16 círculos é suficiente multiplicar 3 por 16 : 3 . 16 = 48. Portanto, na 48ª figura existirão 16 círculos.

08. Resposta "B".

A sequência das figuras completa-se na 5ª figura. Assim, continua-se a sequência de 5 em 5 elementos. A figura de número 277 ocupa, então, a mesma posição das figuras que representam número 5n + 2, com n N. Ou seja, a 277ª figura corresponde à 2ª figura, que é representada pela letra "B".

09. Resposta "D".

A regularidade que obedece a sequência acima não se dá por padrões numéricos e sim pela letra que inicia cada número. "Dois, Dez, Doze, Dezesseis, Dezessete, Dezoito, Dezenove, ... Enfim, o próximo só pode iniciar também com "D": Duzentos.

10. Resposta "C".

Esta sequência é regida pela inicial de cada número. Três, Treze, Trinta,... O próximo só pode ser o número Trinta e um, pois ele inicia com a letra "T".

11. Resposta "E".

Na 1ª İinha, a palavra CAL foi retirada das 3 primeiras letras da palavra LACRAÇÃO, mas na ordem invertida. Da mesma forma, na 2ª linha, a palavra SOMA é retirada da palavra AMOSTRA, pelas 4 primeira letras invertidas. Com isso, da palavra LAVRAR, ao se retirarem as 5 primeiras letras, na ordem invertida, obtém-se ARVAL.

12. Resposta "C".

Em cada linha apresentada, as cabeças são formadas por quadrado, triângulo e círculo. Na 3ª linha já há cabeças com círculo e com triângulo. Portanto, a cabeça da figura que está faltando é um quadrado. As mãos das figuras estão levantadas, em linha reta ou abaixadas. Assim, a figura que falta deve ter as mãos levantadas (é o que ocorre em todas as alternativas). As figuras apresentam as 2 pernas ou abaixadas, ou 1 perna levantada para a esquerda ou 1 levantada para a direita. Nesse caso, a figura que está faltando na 3ª linha deve ter 1 perna levantada para a esquerda. Logo, a figura tem a cabeça quadrada, as mãos levantadas e a perna erguida para a esquerda.

13. Resposta "A".

Existem duas leis distintas para a formação: uma para a parte superior e outra para a parte inferior. Na parte superior, tem-se que: do 1º termo para o 2º termo, ocorreu uma multiplicação por 2; já do 2º termo para o 3º, houve uma subtração de 3 unidades. Com isso, X é igual a 5 multiplicado por 2, ou seja, X = 10. Na parte inferior, tem-se: do 1º termo para o 2º termo ocorreu uma multiplicação por 3; já do 2º termo para o 3º, houve uma subtração de 2 unidades. Assim, Y é igual a 10 multiplicado por 3, isto é, Y = 30. Logo, X + Y = 10 + 30 = 40.

14. Resposta "A".

A sequência do alfabeto inicia-se na extremidade direita do triângulo, pela letra "A"; aumenta a direita para a esquerda; continua pela 3ª e 5ª linhas; e volta para as linhas pares na ordem inversa – pela 4ª linha até a 2ª linha. Na 2ª linha, então, as letras são, da direita para a esquerda, "M", "N", "O", e a letra que substitui corretamente o ponto de interrogação é a letra "P".



15. Resposta "B".

16. Resposta "D".

Na 1ª linha, internamente, a 1ª figura possui 2 "orelhas", a 2ª figura possui 1 "orelha" no lado esquerdo e a 3ª figura possui 1 "orelha" no lado direito. Esse fato acontece, também, na 2ª linha, mas na parte de cima e na parte de baixo, internamente em relação às figuras. Assim, na 3ª linha ocorrerá essa regra, mas em ordem inversa: é a 3ª figura da 3ª linha que terá 2 "orelhas" internas, uma em cima e outra em baixo. Como as 2 primeiras figuras da 3ª linha não possuem "orelhas" externas, a 3ª figura também não terá orelhas externas. Portanto, a figura que deve substituir o ponto de interrogação é a 4ª.

17. Resposta "B".

No 1º triângulo, o número que está no interior do triângulo dividido pelo número que está abaixo é igual à diferença entre o número que está à direita e o número que está à esquerda do triângulo: 40 5 21 13 8.

A mesma regra acontece no 2° triângulo: $42 \div 7 = 23$ - 17 = 6.

Assim, a mesma regra deve existir no 3º triângulo:

 $? \div 3 = 19 - 7$

 $? \div 3 = 12$

 $? = 12 \times 3 = 36.$

18. Resposta "E".

Verifique os intervalos entre os números que foram fornecidos. Dado os números 3, 12, 27, __, 75, 108, obtevese os seguintes 9, 15, __, __, 33 intervalos. Observe que 3x3, 3x5, 3x7, 3x9, 3x11. Logo 3x7 = 21 e 3x 9 = 27. Então: 21 + 27 = 48.

19. Resposta "B".

Observe que o numerador é fixo, mas o denominador é formado pela seguência:

Primeiro	Segundo	Terceiro	Quarto	Quinto	Sexto
1	1 x 2 = 2	2 x 3 = 6	3 x 4 = 12	4 x 5 = 20	5 x 6 = 30

20. Resposta "D".

O que de início devemos observar nesta questão é a quantidade de B e de X em cada figura. Vejamos:

		9
BBB	BXB	XXB
XBX	XBX	XBX
BBB	BXB	BXX
7B e 2X	5B e 4X	3B e 6X

Vê-se, que os "B" estão diminuindo de 2 em 2 e que os "X" estão aumentando de 2 em 2; notem também que os "B" estão sendo retirados um na parte de cima e um na parte de baixo e os "X" da mesma forma, só que não estão sendo retirados, estão, sim, sendo colocados. Logo a 4ª figura é:

XXX

XBX

XXX

1B e 8X

21. Resposta "D".

Montando a série de Fibonacci temos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... A resposta da questão é a alternativa "D", pois como a questão nos diz, cada termo a partir do terceiro é igual à soma de seus dois termos precedentes. 2 + 3 = 5

22. Resposta "E".

A questão nos informa que ao se escrever alguma mensagem, cada letra será substituída pela letra que ocupa a quarta posição, além disso, nos informa que o código é "circular", de modo que a letra "U" vira "A". Para decifrarmos, temos que perceber a posição do emissor e do receptor. O emissor ao escrever a mensagem conta quatro letras à frente para representar a letra que realmente deseja, enquanto que o receptor, deve fazer o contrário, contar quatro letras atrás para decifrar cada letra do código. No caso, nos foi dada a frase para ser decifrada, vê-se, pois, que, na questão, ocupamos a posição de receptores. Vejamos a mensagem: BSA HI EDAP. Cada letra da mensagem representa a quarta letra anterior de modo que:

VxzaB: B na verdade é V; OpgrS: S na verdade é O;

UvxzA: A na verdade é U;

DefaH: H na verdade é D:

EfghI: I na verdade é E;

AbcdE: E na verdade é A;

ZabcD: D na verdade é Z;

UvxaA: A na verdade é U;

LmnoP: P na verdade é L;

23. Resposta "B".

A questão nos traz duas palavras que têm relação uma com a outra e, em seguida, nos traz uma sequência numérica. É perguntado qual sequência numérica tem a mesma ralação com a sequência numérica fornecida, de maneira que, a relação entre as palavras e a sequência numérica é a mesma. Observando as duas palavras dadas, podemos perceber facilmente que têm cada uma 6 letras e que as letras de uma se repete na outra em uma ordem diferente. Tal ordem, nada mais é, do que a primeira palavra de trás para frente, de maneira que SOCIAL vira LAICOS. Fazendo o mesmo com a sequência numérica fornecida, temos: 231678 viram 876132, sendo esta a resposta.



24. Resposta "A".

A questão nos traz duas palavras que têm relação uma com a outra, e em seguida, nos traz uma sequência numérica. Foi perguntado qual a sequência numérica que tem relação com a já dada de maneira que a relação entre as palavras e a sequência numérica é a mesma. Observando as duas palavras dadas podemos perceber facilmente que tem cada uma 6 letras e que as letras de uma se repete na outra em uma ordem diferente. Essa ordem diferente nada mais é, do que a primeira palavra de trás para frente, de maneira que SALTA vira ATLAS. Fazendo o mesmo com a sequência numérica fornecida temos: 25435 vira 53452, sendo esta a resposta.

25. Resposta "E".

Pelo número 86.547, tem-se que 86, 65, 54 e 47 não acontecem no número procurado. Do número 48.675, as opções 48, 86 e 67 não estão em nenhum dos números apresentados nas alternativas. Portanto, nesse número a coincidência se dá no número 75. Como o único número apresentado nas alternativas que possui a sequência 75 é 46.875, tem-se, então, o número procurado.

26. Resposta "D".

O primeiro símbolo representa a divisão e o 2° símbolo representa a soma. Portanto, na 1° linha, tem-se: $36 \div 4 + 5 = 9 + 5 = 14$. Na 2° linha, tem-se: $48 \div 6 + 9 = 8 + 9 = 17$. Com isso, na 3° linha, ter-se-á: $54 \div 9 + 7 = 6 + 7 = 13$. Logo, podemos concluir então que o ponto de interrogação deverá ser substituído pelo número 13.

27. Resposta "A".

As letras que acompanham os números ímpares formam a sequência normal do alfabeto. Já a sequência que acompanha os números pares inicia-se pela letra "E", e continua de acordo com a sequência normal do alfabeto: 2ª letra: E, 4ª letra: F, 6ª letra: G, 8ª letra: H, 10ª letra: I e 12ª letra: J.

28. Resposta "D".

Escrevendo os nomes dos animais apresentados na lista – MARÁ, PERU, TATU e URSO, na seguinte ordem: PERU, MARÁ, TATU e URSO, obtém-se na tabela:

Р	Е	R	U
М	А	R	Α
Т	Α	Т	U
U	R	S	0

O nome do animal é PATO. Considerando a ordem do alfabeto, tem-se: P=15, A=1, T=19 e 0=14. Somando esses valores, obtém-se: 15+1+19+14=49.

29. Resposta "B".

Na 1ª e na 2ª sequências, as vogais são as mesmas: letra "A". Portanto, as vogais da 4ª sequência de letras deverão ser as mesmas da 3ª sequência de letras: "O". A 3ª letra da 2ª sequência é a próxima letra do alfabeto depois da 3ª letra da 1ª sequência de letras. Portanto, na 4ª sequência de letras, a 3ª letra é a próxima letra depois de "B", ou seja, a letra "C". Em relação à primeira letra, tem-se uma diferença de 7 letras entre a 1ª letra da 1ª sequência e a 1ª letra da 2ª sequência. Portanto, entre a 1ª letra da 3ª sequência e a 1ª letra da 4ª sequência, deve ocorrer o mesmo fato. Com isso, a 1ª letra da 4ª sequência é a letra "T". Logo, a 4ª sequência de letras é: T, O, C, O, ou seja, TOCO.

30. Resposta "C".

Na 1ª sequência de letras, ocorrem as 3 primeiras letras do alfabeto e, em seguida, volta-se para a 1ª letra da sequência. Na 2ª sequência, continua-se da 3ª letra da sequência anterior, formando-se DEF, voltando-se novamente, para a 1ª letra desta sequência: D. Com isto, na 3ª sequência, têm-se as letras HIJ, voltando-se para a 1ª letra desta sequência: H. Com isto, a 4ª sequência iniciará pela letra L, continuando por M e N, voltando para a letra L. Logo, a 4ª sequência da letra é: LMNL.

31. Resposta "E".

Do 1º termo para o 2º termo, ocorreu um acréscimo de 1 unidade. Do 2º termo para o 3º termo, ocorreu a multiplicação do termo anterior por 3. E assim por diante, até que para o 7º termo temos 13 . 3 = 39. 8º termo = 39 + 1 = 40. 9º termo = 40 . 3 = 120. 10º termo = 120 + 1 = 121. 11º termo = 121 . 3 = 363. 12º termo = 363 + 1 = 364. 13º termo = 364 . 3 = 1.092. Portanto, podemos concluir que o 13º termo da seguência é um número maior que 1.000.

32. Resposta "D".

Da palavra "ardoroso", retiram-se as sílabas "do" e "ro" e inverteu-se a ordem, definindo-se a palavra "rodo". Da mesma forma, da palavra "dinamizar", retiram-se as sílabas "na" e "mi", definindo-se a palavra "mina". Com isso, podemos concluir que da palavra "maratona". Deve-se retirar as sílabas "ra" e "to", criando-se a palavra "tora".

33. Resposta "A".

Na primeira sequência, a palavra "azar" é obtida pelas letras "a" e "z" em sequência, mas em ordem invertida. Já as letras "a" e "r" são as 2 primeiras letras da palavra "arborizado". A palavra "dias" foi obtida da mesma forma: As letras "d" e "i" são obtidas em sequência, mas em ordem invertida. As letras "a" e "s" são as 2 primeiras letras da palavra "asteroides". Com isso, para a palavras "articular", considerando as letras "i" e "u", que estão na ordem invertida, e as 2 primeiras letras, obtém-se a palavra "luar".

34. O nome da sequência é Sequência de Fibonacci. O número que vem é sempre a soma dos dois números imediatamente atrás dele. A sequência correta é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...



35.

Dia	Subida	Descida
1°	2m	1m
2°	3m	2m
3°	4m	3m
4°	5m	4m
5°	6m	5m
6°	7m	6m
7°	8m	7m
8°	9m	8m
9°	10m	

Portanto, depois de 9 dias ela chegará na saída do poço.

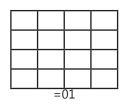
36. 09 - 19 - 29 - 39 - 49 - 59 - 69 - 79 - 89 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99. Portanto, são necessários 20 algarismos.

37.









Portanto, há 16 + 9 + 4 + 1 = 30 quadrados.

38.



39. Os símbolos são como números em frente ao espelho. Assim, o próximo símbolo será 88.

40.



41.

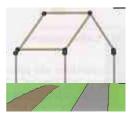
$$12.345.679 \times (2 \times 9) = 222.222.222$$

$$12.345.679 \times (3 \times 9) = 333.333.333$$

$$12.345.679 \times (4 \times 9) = 666.666.666$$

Portanto, para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por (9x9) = 81

42.



43.



- 44. Sendo A = 1, J = 11, Q = 12 e K = 13, a soma de cada par de cartas é igual a 14 e o naipe de paus sempre forma par com o naipe de espadas. Portanto, a carta que está faltando é o 6 de espadas.
- 45. Quadrado perfeito em matemática, sobretudo na aritmética e na teoria dos números, é um número inteiro não negativo que pode ser expresso como o quadrado de um outro número inteiro. Ex: 1, 4, 9...

No exercício 2 elevado a 2 = 4

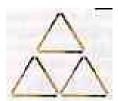


46. Observe que:

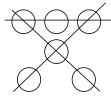
3	6	18	72	360	2160	15120
		x2 x3	3 x4	x5	х6	x7

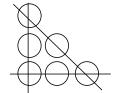
Portanto, a próxima pedra terá que ter o valor: 15.120 x 8 = 120.960

47.



48.

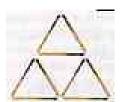




49.



50.



4. REGRA DE TRÊS SIMPLES

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos através de um processo prático, chamado **regra de três simples**.

Exemplo 1: Um carro faz 180 km com 15L de álcool. Quantos litros de álcool esse carro gastaria para percorrer 210 km?

Solução:

O problema envolve duas grandezas: distância e litros de álcool.

Indiquemos por x o número de litros de álcool a ser consumido.

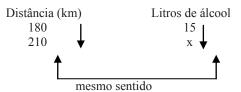
Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha:

Distância (km) Litros de álcool
180 15
210 x

Na coluna em que aparece a variável x ("litros de álcool"), vamos colocar uma flecha:

Distância (km) Litros de álcool
180 15 |
210 x ▼

Observe que, se duplicarmos a distância, o consumo de álcool também duplica. Então, as grandezas **distância** e **litros de álcool** são **diretamente proporcionais**. No esquema que estamos montando, indicamos esse fato colocando uma flecha na coluna "distância" no **mesmo sentido** da flecha da coluna "litros de álcool":



Armando a proporção pela orientação das flechas, temos:

$$\frac{180^{6}}{210^{7}} = \frac{1/5}{x} \implies 6x = 7 \cdot 15 \implies 6x = 105 \implies x = \frac{105}{6} \implies x$$

Resposta: O carro gastaria 17,5 L de álcool.

Exemplo 2: Viajando de automóvel, à velocidade de 60 km/h, eu gastaria 4 h para fazer certo percurso. Aumentando a velocidade para 80 km/h, em quanto tempo farei esse percurso?



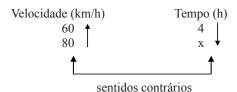
Solução: Indicando por x o número de horas e colocando as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha, temos:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	X

Na coluna em que aparece a variável x ("tempo"), vamos colocar uma flecha:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	41
80	x₩

Observe que, se duplicarmos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade. Isso significa que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**. No nosso esquema, esse fato é indicado colocando-se na coluna "velocidade" uma flecha em **sentido contrário** ao da flecha da coluna "tempo":



Na montagem da proporção devemos seguir o sentido das flechas. Assim, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{80^4}{60^3}$$
 \Rightarrow 4x = 4.3 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = $\frac{12}{4}$ \Rightarrow x = 3

Resposta: Farei esse percurso em 3 h.

Exemplo 3: Ao participar de um treino de Fórmula 1, um competidor, imprimindo velocidade média de 200 km/h, faz o percurso em 18 segundos. Se sua velocidade fosse de 240 km/h, qual o tempo que ele teria gasto no percurso?

Vamos representar pela letra x o tempo procurado.

Estamos relacionando dois valores da grandeza velocidade (200 km/h e 240 km/h) com dois valores da grandeza tempo (18 s e x s).

Queremos determinar um desses valores, conhecidos os outros três.

Velocidade	Tempo gasto para fazer o percurso
200 km/h	18 s
240 km/h	x

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto para fazer o percurso cairá para a metade; logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e x.

Daí temos:

$$200 \cdot 18 = 240 \cdot x$$

 $3600 = 240x$
 $240x = 3600$
 $x = \frac{3600}{240}$
 $x = 15$

Conclui-se, então, que se o competidor tivesse andando em 200 km/h, teria gasto 18 segundos para realizar o percurso.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais, é chamado **regra de três composta**.

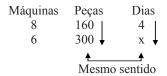
Exemplo 1: Em 4 dias 8 máquinas produziram 160 peças. Em quanto tempo 6 máquinas iguais às primeiras produziriam 300 dessas peças?

Solução: Indiquemos o número de dias por *x*. Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma só coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha. Na coluna em que aparece a variável *x* ("dias"), coloquemos uma flecha:

Máquinas	Peças	Dias
8	160	4
6	300	x♥

Comparemos cada grandeza com aquela em que está o x.

As grandezas **peças** e **dias** são diretamente proporcionais. No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "peças" uma flecha no **mesmo sentido** da flecha da coluna "dias":



As grandezas **máquinas** e **dias** são inversamente proporcionais (duplicando o número de máquinas, o número de dias fica reduzido à metade). No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna (máquinas) uma flecha no sentido contrário ao da flecha da coluna "dias":



Agora vamos monţar a proporção, igualando a razão que contém o x, que é $\frac{1}{2}$, com o produto das outras razões, obtidas segundo a orientação das flechas $\left(\frac{6}{2},\frac{160}{2}\right)$:





$$\frac{4}{x} = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{8}^{7}} \cdot \frac{\cancel{160}^{8^{1}}}{\cancel{300}^{15^{5}}}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{5} \implies 2x = 4.5 \quad \text{a} \quad x = \frac{\cancel{4}^{2}.5}{\cancel{2}^{7}} \implies x = 10$$

Resposta: Em 10 dias.

Exemplo 2: Uma empreiteira contratou 210 pessoas para pavimentar uma estrada de 300 km em 1 ano. Após 4 meses de serviço, apenas 75 km estavam pavimentados. Quantos empregados ainda devem ser contratados para que a obra seja concluída no tempo previsto?

Solução: Em
$$\frac{1}{3}$$
 de ano foi pavimentada $\frac{1}{4}$ de estrada.

Comparemos cada grandeza com aquela em que está o x.

Pessoas	Estrada	Tempo
210	75	4∱
× ↓	225	8
	Sentido con	trário

As grandezas "pessoas" e "tempo" são inversamente proporcionais (duplicando o número de pessoas, o tempo fica reduzido à metade). No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "tempo" uma flecha no sentido contrário ao da flecha da coluna "pessoas":

Pessoas	Estrada	Tempo
210	75	4
× ↓	225	8
†	†	
Mes	mo Sentido	

As grandezas "pessoas" e "estrada" são diretamente proporcionais. No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "estrada" uma flecha no mesmo sentido da flecha da coluna "pessoas":

$$\frac{210}{x} = \frac{75^{1}}{225^{3}} \cdot \frac{8^{2}}{4^{1}}$$
$$\frac{210}{x} = \frac{2}{3}$$

$$210.3 = 2.x \rightarrow 2x = 630 \rightarrow x = 315$$

Como já haviam 210 pessoas trabalhando, logo 315 – 210 = 105 pessoas.

Reposta: Devem ser contratados 105 pessoas.

Questões

- 1 (FUNDAÇÃO CASA AGENTE DE APOIO OPE-RACIONAL – VUNESP/2013) Um atleta está treinando para fazer 1 500 metros em 5 minutos. Como ele pretende manter um ritmo sempre constante, deve fazer cada 100 metros em
 - A) 15 segundos.
 - B) 20 segundos.
 - C) 22 segundos.
 - D) 25 segundos.
 - E) 30 segundos.
- 2 (SAP/SP AGENTE DE SEGURANÇA PENITEN-CIÁRIA DE CLASSE I – VUNESP/2013) Uma máquina demora 1 hora para fabricar 4 500 peças. Essa mesma máquina, mantendo o mesmo funcionamento, para fabricar 3 375 dessas mesmas peças, irá levar
 - A) 55 min.
 - B) 15 min.
 - C) 35 min.
 - D) 1h 15min.
 - E) 45 min.
- 3 (PREF. IMARUÍ AGENTE EDUCADOR PREF. IMARUÍ/2014) Manoel vendeu seu carro por R\$27.000,00(-vinte e sete mil reais) e teve um prejuízo de 10%(dez por cento) sobre o valor de custo do tal veículo, por quanto Manoel adquiriu o carro em questão?
 - A) R\$24.300,00
 - B) R\$29.700,00
 - C) R\$30.000,00
 - D)R\$33.000,00
 - E) R\$36.000,00
- 4 (DNOCS -2010) Das 96 pessoas que participaram de uma festa de Confraternização dos funcionários do Departamento Nacional de Obras Contra as Secas, sabe-se que 75% eram do sexo masculino. Se, num dado momento antes do término da festa, foi constatado que a porcentagem dos homens havia se reduzido a 60% do total das pessoas presentes, enquanto que o número de mulheres permaneceu inalterado, até o final da festa, então a quantidade de homens que haviam se retirado era?
 - A) 36.
 - B) 38.
 - C) 40.
 - D) 42.
 - E) 44.
- **5 (SABESP APRENDIZ FCC/2012)** Em uma maquete, uma janela de formato retangular mede 2,0 cm de largura por 3,5 cm de comprimento. No edifício, a largura real dessa janela será de 1,2 m. O comprimento real correspondente será de:
 - A) 1,8 m
 - B) 1,35 m
 - C) 1,5 m
 - D) 2,1 m
 - E) 2,45 m



- 6 (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP TÉCNICO ADMI-NISTRATIVO - FCC/2014) O trabalho de varrição de 6.000 m² de calçada é feita em um dia de trabalho por 18 varredores trabalhando 5 horas por dia. Mantendo-se as mesmas proporções, 15 varredores varrerão 7.500 m² de calçadas, em um dia, trabalhando por dia, o tempo de
 - A) 8 horas e 15 minutos.
 - B) 9 horas.
 - C) 7 horas e 45 minutos.
 - D) 7 horas e 30 minutos.
 - E) 5 horas e 30 minutos.
 - 7 (PREF. CORBÉLIA/PR CONTADOR FAUEL/2014)

Uma equipe constituída por 20 operários, trabalhando 8 horas por dia durante 60 dias, realiza o calçamento de uma área igual a 4800 m². Se essa equipe fosse constituída por 15 operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 80 dias, faria o calçamento de uma área igual a:

- A) 4500 m²
- B) 5000 m²
- C) 5200 m²
- D) 6000 m²
- E) 6200 m²
- 8 (PC/SP OFICIAL ADMINISTRATIVO VU-

NESP/2014) Dez funcionários de uma repartição trabalham 8 horas por dia, durante 27 dias, para atender certo número de pessoas. Se um funcionário doente foi afastado por tempo indeterminado e outro se aposentou, o total de dias que os funcionários restantes levarão para atender o mesmo número de pessoas, trabalhando uma hora a mais por dia, no mesmo ritmo de trabalho, será:

- A) 29.
- B) 30.
- C) 33.
- D) 28.
- E) 31.
- 9 (TRF 3ª TÉCNICO JUDICIÁRIO FCC/2014) Sa-

be-se que uma máquina copiadora imprime 80 cópias em 1 minuto e 15 segundos. O tempo necessário para que 7 máquinas copiadoras, de mesma capacidade que a primeira citada, possam imprimir 3360 cópias é de

- A) 15 minutos.
- B) 3 minutos e 45 segundos.
- C) 7 minutos e 30 segundos.
- D) 4 minutos e 50 segundos.
- E) 7 minutos.
- 10 (PREF. JUNDIAI/SP ELETRICISTA MAKIYA-

MA/2013) Os 5 funcionários de uma padaria produzem, utilizando três fornos, um total de 2500 pães ao longo das 10 horas de sua jornada de trabalho. No entanto, o dono de tal padaria pretende contratar mais um funcionário, comprar mais um forno e reduzir a jornada de trabalho de seus funcionários para 8 horas diárias. Considerando que todos os fornos e funcionários produzem em igual quantidade e ritmo, qual será, após as mudanças, o número de pães produzidos por dia?

- A) 2300 pães.
- B) 3000 pães.
- C) 2600 pães.
- D) 3200 pães.
- E) 3600 pães.

Respostas

1- RESPOSTA: "B"

Como as alternativas estão em segundo, devemos trabalhar com o tempo em segundo.

1 minuto = 60 segundos ; logo 5minutos = 60.5 = 300 segundos

Metro Segundos 1500 ---- 300 100 ---- x

Como estamos trabalhando com duas grandezas diretamente proporcionais temos:

$$\frac{1500^{15}}{100^1} = \frac{300}{x}$$

 $15.x = 300.1 \rightarrow 15x = 300 \rightarrow x = 20$ segundos

2- RESPOSTA: "E".

Peças Tempo 4500 ---- 1 h 3375 ---- x

Como estamos trabalhando com duas grandezas diretamente proporcionais temos:

$$\frac{4500}{3375} = \frac{1}{x}$$

 $4500.x = 3375.1 \Rightarrow x = 0.75 \text{ h}$

Como a resposta esta em minutos devemos achar o correspondente em minutos

Hora Minutos 1 ----- 60 0,75 ---- x $1.x = 0,75.60 \Rightarrow x = 45 \text{ minutos}.$

3. RESPOSTA: "C"

Como ele teve um prejuízo de 10%, quer dizer 27000 é 90% do valor total.

Valor % 27000 ----- 90 X ----- 100

$$\frac{27000}{x} = \cancel{90^9}_{\cancel{100}} \Rightarrow \frac{27000}{x} = \frac{9}{10} = 27000.10 \Rightarrow 9x = 270000$$

 \rightarrow x = 30000.

4. RESPOSTA: "A"



Antes

40% ----- 24
60% ----- x

$$40x = 60 \cdot 24 \implies x = \frac{1440}{40} \implies x = 36.$$

Portanto: 72 - 36 = 36 Homens se retiraram.

5. RESPOTA: "D"

Transformando de cm para metro temos : 1 metro = 100cm

$$x = 1.2 \cdot \frac{0.035}{0.02} = 2.1m$$

6. - RESPOSTA: "D".

Comparando- se cada grandeza com aquela onde esta o x.

Quanto mais a área, mais horas(diretamente proporcionais)

Quanto menos trabalhadores, mais horas(inversamente proporcionais)

$$\frac{5}{x} = \frac{6000}{7500} \cdot \frac{15}{18}$$

$$6000 \cdot 15 \cdot x = 5 \cdot 7500 \cdot 18$$

 $90000x = 675000$
 $x = 7.5 \ horas$

Como 0,5 h equivale a 30 minutos , logo o tempo será de 7 horas e 30 minutos.

Todas as grandezas são diretamente proporcionais, logo:

$$\frac{4800}{x} = \frac{20}{15} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{60}{80}$$
$$20 \cdot 8 \cdot 60 \cdot x = 4800 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 80$$
$$9600x = 57600000$$
$$x = 6000m^{2}$$

8- RESPOSTA: "B"

Temos 10 funcionários inicialmente, com os afastamento esse número passou para 8. Se eles trabalham 8 horas por dia , passarão a trabalhar uma hora a mais perfazendo um total de 9 horas, nesta condições temos:

Quanto menos funcionários, mais dias devem ser trabalhados (inversamente proporcionais).

Quanto mais horas por dia, menos dias devem ser trabalhados (inversamente proporcionais).

9 - RESPOSTA: "C".

Transformando o tempo para segundos: 1 min e 15 segundos = 75 segundos

Quanto mais máquinas menor o tempo (flecha contrária) e quanto mais cópias, mais tempo (flecha mesma posição)

Devemos deixar as 3 grandezas da mesma forma, invertendo os valores de" máquina".

$$\frac{75}{x} = \frac{7}{1} \cdot \frac{80}{3360} \rightarrow x.7.80 = 75.1.3360 \rightarrow 560x = 252000$$

$$\Rightarrow x = 450 \text{ segundos}$$

Transformando 1minuto-----60segundos x------450 x=7,5 minutos=7 minutos e 30segundos.



10 - RESPOSTA: "D".

As flecham indicam se as grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais.

Quanto mais funcionários mais pães são feitos(diretamente)

$$\frac{2500}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{8}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 10x = 2500 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8$$

 $150x = 480000$
 $x = 3200 \ p\tilde{a}es$.

5. FRAÇÕES E OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

"O TÓPICO ACIMA, FOI ABORDADO NO DECOR-RER DA MATÉRIA"

6. RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão

Sejam dois números reais a e b, com $b \neq 0$. Chama-se razão entre a e b (nessa ordem) o quociente a b, ou .

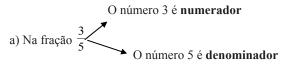
A razão é representada por um número racional, mas é lida de modo diferente.

Exemplos

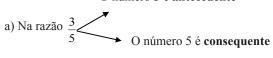
a) A fração
$$\frac{3}{5}$$
 lê-se: "três quintos".

b) A razão
$$\frac{3}{5}$$
 lê-se: "3 para 5".

Os termos da razão recebem nomes especiais.



O número 3 é antecedente



Exemplo 1

A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$; já a razão entre 50 e $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$.

Exemplo 2

Numa classe de 42 alunos há 18 rapazes e 24 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, o que significa que para "cada 3 rapazes há 4 moças". Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$, o que equivale a dizer que "de cada 7 alunos na classe, 3 são rapazes".

Razão entre grandezas de mesma espécie

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

Uma sala tem 18 m². Um tapete que ocupar o centro dessa sala mede 384 dm². Vamos calcular a razão entre a área do tapete e a área da sala.

Primeiro, devemos transformar as duas grandezas em uma mesma unidade:

Área da sala: $18 \text{ m}^2 = 1 800 \text{ dm}^2$

Área do tapete: 384 dm²

Estando as duas áreas na mesma unidade, podemos escrever a razão:

$$\frac{384dm^2}{1800dm^2} = \frac{384}{1800} = \frac{16}{75}$$

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Exemplo 1

Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170.

Distância percorrida: 170 km - 30 km = 140 kmTempo gasto: 11h - 9h = 2h



Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$\frac{140km}{2h} = 70km/h$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de velocidade média.

Observe que:

- as grandezas "quilômetro e hora" são de naturezas diferentes;
- a notação km/h (lê-se: "quilômetros por hora") deve acompanhar a razão.

Exemplo 2

A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km² e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995.

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km² (hab./km²):

$$\frac{6628000}{927286} \cong 71,5 hab./km^2$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **densidade de-mográfica**.

A notação hab./km² (lê-se: "habitantes por quilômetro quadrado") deve acompanhar a razão.

Exemplo 3

Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$\frac{83,76km}{8l} \cong 10,47km/l$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **consumo médio**.

A notação km/l (lê-se: "quilômetro por litro") deve acompanhar a razão.

Exemplo 4

Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

$$Escala = \frac{comprimento \bullet no \bullet desenho}{comprimento \bullet real} = \frac{20cm}{8m} = \frac{20cm}{800cm} = \frac{1}{40}ou1:40$$

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se **Escala.**

Proporção

A igualdade entre duas razões recebe o nome de **pro- porção**.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 está para 5 assim como 6 está para 10"), os números 3 e 10 são chamados extremos, e os números 5 e 6 são chamados meios.

Observemos que o produto $3 \times 10 = 30$ é igual ao produto $5 \times 6 = 30$, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exemplo 1

Na proporção
$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$
, temos 2 x 9 = 3 x 6 = 18;
e em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, temos 4 x 4 = 1 x 16 = 16.

Exemplo 2

Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.

Se uma criança tem 12 kg, a dosagem correta x é dada por:

$$\frac{5gotas}{2kg} = \frac{x}{12kg} \rightarrow x = 30gotas$$

Por outro lado, se soubermos que foram corretamente ministradas 20 gotas a uma criança, podemos concluir que seu "peso" é 8 kg, pois:

$$\frac{5gotas}{2kg} = 20gotas / p \rightarrow p = 8kg$$

(nota: o procedimento utilizado nesse exemplo é comumente chamado de regra de três simples.)

Propriedades da Proporção

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios: essa propriedade possibilita reconhecer quando duas razões formam ou não uma proporção.

$$\frac{4}{3}e^{\frac{12}{9}}$$
 formam uma proporção, pois

Produtos dos extremos $\leftarrow \underbrace{4.9}_{36} = \underbrace{3.12}_{36} \rightarrow$ Produtos dos meios.

A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).



$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{5+2}{5} = \frac{10+4}{10} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{14}{10} \right\}$$

ou

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Longrightarrow \left\{ \frac{5+2}{2} = \frac{10+4}{4} \Longrightarrow \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \right\}$$

A diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{4} = \frac{8-6}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \right\}$$

Oι

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \right\}$$

A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{12}{8} \right\}$$

ou

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \right\}$$

A diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-1}{15-5} = \frac{3}{15} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{3}{15} \end{cases}$$

ΛIJ

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \Longrightarrow \left\{ \frac{3-1}{15-5} = \frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \right\}$$

Questões

- **1 -** (VUNESP AgSegPenClasseI-V1 2012) Em um concurso participaram 3000 pessoas e foram aprovadas 1800. A razão do número de candidatos aprovados para o total de candidatos participantes do concurso é:
 - A) 2/3
 - B) 3/5
 - C) 5/10
 - D) 2/7
 - E) 6/7

- **2 –** (VNSP1214/001-AssistenteAdministrativo-I 2012) Em uma padaria, a razão entre o número de pessoas que tomam café puro e o número de pessoas que tomam café com leite, de manhã, é 2/3. Se durante uma semana, 180 pessoas tomarem café de manhã nessa padaria, e supondo que essa razão permaneça a mesma, pode-se concluir que o número de pessoas que tomarão café puro será:
 - A) 72
 - B) 86
 - C) 94
 - D) 105
 - E) 112
- 3 (PREF. NEPOMUCENO/MG TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO CONSULPLAN/2013) Num zoológico, a razão entre o número de aves e mamíferos é igual à razão entre o número de anfíbios e répteis. Considerando que o número de aves, mamíferos e anfíbios são, respectivamente, iguais a 39, 57 e 26, quantos répteis existem neste zoológico?
 - A) 31
 - B) 34
 - c) 36
 - D) 38
 - E) 43
- **4** (TRT Técnico Judiciário) Na figura abaixo, os pontos E e F dividem o lado AB do retângulo ABCD em segmentos de mesma medida.



- A razão entre a área do triângulo (CEF) e a área do retângulo é:
 - a) 1/8
 - b) 1/6
 - c) 1/2
 - d) 2/3
 - e) 3/4
- 5 (CREFITO/SP ALMOXARIFE VUNESP/2012) Na biblioteca de uma faculdade, a relação entre a quantidade de livros e de revistas era de 1 para 4. Com a compra de novos exemplares, essa relação passou a ser de 2 para 3.

Assinale a única tabela que está associada corretamente a essa situação.



A)

	Nº de livros	N o de revistas	
Antes da compra	50	200	
Após a compra	200	300	

B)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	50	200
Após a compra	300	200

C)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	200	300

D)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	300	200

E)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	200
Após a compra	50	300

- 6 (CREFITO/SP ALMOXARIFE VUNESP/2012) Uma rede varejista teve um faturamento anual de 4,2 bilhões de reais com 240 lojas em um estado. Considerando que esse faturamento é proporcional ao número de lojas, em outro estado em que há 180 lojas, o faturamento anual, em bilhões de reais, foi de
 - A) 2,75
 - B) 2,95
 - c) 3,15
 - D) 3,35
 - E) 3.55
- 7 (PREF. IMARUÍ AGENTE EDUCADOR PREF. IMARUÍ/2014) De cada dez alunos de uma sala de aula, seis são do sexo feminino. Sabendo que nesta sala de aula há dezoito alunos do sexo feminino, quantos são do sexo masculino?
 - A) Doze alunos.
 - B) Quatorze alunos.
 - C) Dezesseis alunos.
 - D) Vinte alunos.
- 8 (TJ/SP ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO VUNESP/2013) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, 2/5 dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que 1/4 dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, nessa escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de
 - A) 2:3
 - B) 1:3
 - c) 1:6
 - D) 3:4
 - E) 2:5
- 9 (PMPP1101/001-Escriturário-I-manhã 2012) A razão entre as idades de um pai e de seu filho é hoje de 5/2. Quando o filho nasceu, o pai tinha 21 anos. A idade do filho hoje é de



- A) 10 anos
- B) 12 anos
- C) 14 anos
- D) 16 anos
- E) 18 anos
- 10 (FAPESP ANALISTA ADMINISTRATIVO VUNESP/2012) Em uma fundação, verificou-se que a razão entre o número de atendimentos a usuários internos e o número de atendimento total aos usuários (internos e externos), em um determinado dia, nessa ordem, foi de 3/5. Sabendo que o número de usuários externos atendidos foi 140, pode-se concluir que, no total, o número de usuários atendidos foi
 - A) 84
 - B) 100
 - c) 217
 - D) 280
 - E) 350

Respostas

1 - Resposta "B"

$$\frac{\textit{n\'umero de candidatos aprovados}}{\textit{n\'umero total de candidatos}} = \frac{1800}{3000} = \frac{18^3}{30^5} = \frac{3}{5}$$

2 - Resposta "A"

Sejam CP e CL o número de pessoas que consumiram café puro e café com leite respectivamente. Como na semana o número total de pessoas que consumiram café foi de 180, temos que:

$$CP + CL = 180$$

A relação encontrada entre eles é de $\frac{2}{3}$; $\frac{CP}{CL} = \frac{2}{3}$ assim aplicando a propriedade da proporção teremos:

$$\frac{CP + CL}{CP} = \frac{2+3}{2} \Rightarrow \frac{180}{CP} = \frac{5}{2} \Rightarrow 180.2 = \text{CP.5} \Rightarrow \text{CP} = \frac{360}{5} \Rightarrow \text{CP} = 72$$

3 - RESPOSTA: "D"

$$\frac{Aves}{mamíferos} = \frac{anfíbios}{répteis}$$

 $\frac{39}{57} = \frac{26}{répteis}$: Aplicando-se o produto dos meios pelos extremos temos:

$$r\'epteis = 57 \cdot \frac{26}{39} = 38$$

4 - Resposta "B"

04)
$$A = x \cdot y \wedge \Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot y = \frac{xy}{6}$$

$$\frac{x}{3} \frac{x}{3} \frac{x}{3} \frac{A\Delta}{A} = \frac{6}{xy} = \frac{1}{6}$$

Letra B



5 - RESPOSTA: "A"

Para cada 1 livro temos 4 revistas

Significa que o número de revistas é 4x o número de livros.

50 livros: 200 revistas

Depois da compra 2 livros :3 revistas 200 livros: 300 revistas

6 - RESPOSTA: "C"

$$\frac{4,2}{240} = \frac{x}{180}$$

 $240.x = 4,2.180 \rightarrow 240x = 756 \rightarrow x = 3,15 \text{ bilhões}$

7 - RESPOSTA: "A"

Como 6 são do sexo feminino, 4 são do sexo masculino(10-6 = 4) . Então temos a seguinte razão: $\bf 6$

$$\frac{6}{4} = \frac{18}{x} \implies 6x = 72 \implies x = 12$$

8- RESPOSTA: "C"

Se 2/5 chegaram atrasados

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$
 chegaram no horário

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$
 tiveram mais de 30 minutos de atraso

$$raz\~ao = rac{tiveram\ mais\ de\ 30\ min\ de\ atraso}{chegaram\ no\ hor\'ario} = rac{rac{1}{10}}{rac{3}{5}}$$

$$raz\tilde{a}o = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{6} ou \ 1:6$$

9 - RESPOSTA: "C"

A razão entre a idade do pai e do filho é respectivamente $\overline{F} = \overline{2}$, se quando o filho nasceu o pai tinha 21, significa que hoje o pai tem x + 21, onde x é a idade do filho. Montando a proporção teremos:

$$\frac{x+21}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2.(x+21) = 5x \Rightarrow 2x+42$$
$$= 5x \Rightarrow 5x - 2x = 42 \Rightarrow 3x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{3}$$

$$x = 14 anos$$

10 - RESPOSTA: "E"

Usuários internos: I Usuários externos : E

$$\frac{I}{I+E} = \frac{3}{5} = \frac{I}{I+140} \rightarrow 5I = 3I+420 \rightarrow 2I = 420 \rightarrow I = 210$$

$$I+E = 210+140 = 350$$

7. INEQUAÇÕES 8. DIVISIBILIDADE 9. FATORAÇÃO

Inequação do 1º Grau

Inequação é toda sentença aberta expressa por uma desigualdade.

As inequações x + 5 > 12 e $2x - 4 \le x + 2$ são do 1° grau, isto é, aquelas em que a variável x aparece com expoente 1.

A expressão à esquerda do sinal de desigualdade chama-se primeiro membro da inequação. A expressão à direita do sinal de desigualdade chama-se segundo membro da inequação.

Na inequação x + 5 > 12, por exemplo, observamos que:

A variável é x;

O primeiro membro é x + 5;

O segundo membro é 12.

Na inequação $2x - 4 \le x + 2$:

A variável é x;

O primeiro membro é 2x - 4;

O segundo membro é x + 2.

Propriedades da desigualdade

Propriedade Aditiva:

Mesmo sentido \checkmark **Exemplo:** Se 8 > 3, então 8 + 2 > 3 + 2, isto é: 10 > 5.

Somamos +2 aos dois membros da desigualdade

Uma desigualdade não muda de sentido quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número aos seus dois membros.



Propriedade Multiplicativa:

Mesmo sentido \checkmark **Exemplo**: Se 8 > 3, então 8 . 2 > 3 . 2, isto é: 16 > 6.

Multiplicamos os dois membros por 2 Uma desigualdade não muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número positivo.



Uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número negativo.

Resolver uma inequação é determinar o seu conjunto verdade a partir de um conjunto universo dado.

Vejamos, através do exemplo, a resolução de inequações do $1^{\rm o}$ grau.

a)
$$x < 5$$
, sendo $U = N$



Os números naturais que tornam a desigualdade verdadeira são: 0, 1, 2, 3 ou 4. Então $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b)
$$x < 5$$
, sendo $U = Z$



Todo número inteiro menor que 5 satisfaz a desigualdade. Logo, $V = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

c)
$$x < 5$$
, sendo $U = Q$

Todo número racional menor que 5 é solução da inequação dada. Como não é possível representar os infinitos números racionais menores que 5 nomeando seus elementos, nós o faremos por meio da propriedade que caracteriza seus elementos. Assim:

$$V = \{x \in Q / x < 5\}$$

Resolução prática de inequações do 1º grau:

A resolução de inequações do 1º grau é feita procedendo de maneira semelhante à resolução de equações, ou seja, transformando cada inequação em outra inequação equivalente mais simples, até se obter o conjunto verdade.

Exemplo

Resolver a inequação $4(x-2) \le 2(3x+1) + 5$, sendo U = Q.

$$4(x-2) \le 2(3x+1) + 5$$

 $4x - 8 \le 6x + 2 + 5$ aplicamos a propriedade distributiva

$$4x - 6x \le 2 + 5 + 8$$
 aplicamos a propriedade aditiva $-2x \le 15$ reduzimos os termos semelhantes

Multiplicando os dois membros por –1, devemos mudar o sentido da desigualdade.

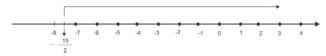
$$2x \ge -15$$

Dividindo os dois membros por 2, obtemos: $\frac{2x}{2} \ge -\frac{15}{2} \Rightarrow x \ge -\frac{15}{2}$

$$Logo, V = \left\{ x \in Q \mid x \ge -\frac{15}{2} \right\}$$

Vamos determinar o conjunto verdade caso tivéssemos U = Z.

Sendo $-\frac{15}{2} = -7.5$, vamos indicá-lo na reta numerada:



Logo,
$$V = \{-7, -6, -5, -4, ...\}$$
 ou $V = \{x \square Z | x \ge -7\}$.

Questões

1 – (**OBM)** Quantos são os números inteiros x que satisfazem à inequação $3 < \sqrt{x} < 7$?

- A) 13;
- B) 26;
- C) 38;
- D) 39;
- E) 40.

2 - (ASSISTENTE ADMINISTRATIVO) A pontuação numa prova de 25 questões é a seguinte: + 4 por questão respondida corretamente e –1 por questão respondida de forma errada. Para que um aluno receba nota correspondente a um número positivo, deverá acertar no mínimo:

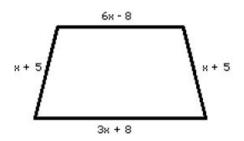
- A) 3 auestões
- B) 4 questões
- C) 5 questões
- D) 6 questões
- E) 7 questões

3 – (Tec.enfermagem/PM) O menor número inteiro que satisfaz a inequação 4x + 2(x-1) > x - 12 é:

- A) -2.
- B) -3.
- C) -1.
- D) 4.
- E) 5.



- 4 (AUX. TRT 6ª/FCC) Uma pessoa, brincando com uma calculadora, digitou o número 525. A seguir, foi subtraindo 6, sucessivamente, só parando quando obteve um número negativo. Quantas vezes ela apertou a tecla correspondente ao 6?
 - A) 88.
 - B) 87.
 - C) 54.
 - D) 53.
 - E) 42.
- 5 (CFSD/PM/2012) Baseado na figura abaixo, o menor valor inteiro par que o número x pode assumir para que o perímetro dessa figura seja maior que 80 unidades de comprimento é:



- A) 06.
- B) 08.
- C) 10.
- D) 12.
- E) 14.
- 6 (MACK) Em N, o produto das soluções da inequação 2x 3
 - A) maior que 8.
 - B) 6.
 - C) 2.
 - D) 1.
 - E) 0.

Respostas

1 - RESPOSTA "D".

Como só estamos trabalhando com valores positivos, podemos elevar ao quadrado todo mundo e ter 9 < x < 49, sendo então que x será 10, 11, 12, 13, 14,..., 48.

Ou seja, poderá ser 39 valores diferentes.

2 - RESPOSTA "D".

Se a cada x questões certas ele ganha 4x pontos então quando erra (25-x) questões ele perde (25-x)(-1) pontos, a soma desses valores será positiva quando:

$$4X + (25 - 1)(-1) > 0 \rightarrow 4X - 25 + x > 0 \rightarrow 5x > 25 \rightarrow x > 5$$

O aluno deverá acertar no mínimo 5 questões.

3 - RESPOSTA "C".

$$4x + 2 - 2 > x - 12$$

$$4x + 2x - x > -12 + 2$$

$$5x > -10$$

$$x > -2$$

Se enumerarmos nosso conjunto verdade teremos: V={-1,0,1,2,...}, logo nosso menor número inteiro é -1.

4 - RESPOSTA "A".

Vamos chamar de x o número de vezes que ele apertou a calculadora

525 - 6x < 0 (pois o resultado é negativo)

-6x < -525. (-1) $\rightarrow 6x > 525 \rightarrow x > 87,5$; logo a resposta seria 88(maior do que 87,5).

5 - **RESPOSTA "B".**

Perímetro soma de todos os lados de uma figura:

$$6x - 8 + 2.(x+5) + 3x + 8 > 80$$

$$6x - 8 + 2x + 10 + 3x + 8 > 80$$

$$11x + 10 > 80$$

Como tem que ser o menor número inteiro e par, logo teremos 8.

6 - RESPOSTA "E"

 $2x \le 3+3$

2x ≤6

x ≤ 3

Como ele pede o produto das soluções, teremos: 3.2.1.0,...= 0; pois todo número multiplicado por zero será ele mesmo.

Inequações do 2° Grau

Chamamos inequação do 2º grau às sentenças:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \ge 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \le 0$$

Onde a, b, c são números reais conhecidos, $a \ne 0$, e x é a incógnita.

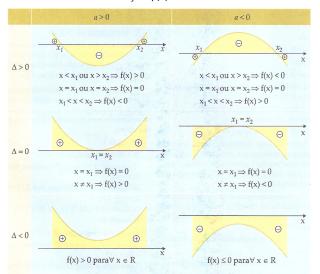
Estudo da variação de sinal da função do 2º grau:

- Não é necessário que tenhamos a posição exata do vértice, basta que ele esteja do lado certo do eixo x;
- Não é preciso estabelecer o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo y e, considerando que a imagens acima do eixo x são positivas e abaixo do eixo negativas, podemos dispensar a colocação do eixo y.

Para estabelecermos a variação de sinal de uma função do 2º grau, basta conhecer a posição da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e a existência e quantidade de raízes que ela apresenta.



Consideremos a função $f(x) = ax^2 + bx + c com a \neq 0$.



Finalmente, tomamos como solução para inequação as regiões do eixo x que atenderem às exigências da desigualdade.

Exemplo

Resolver a inequação $x^2 - 6x + 8 \ge 0$.

- Fazemos y = $x^2 6x + 8$.
- Estudamos a variação de sinal da função v.



- Tomamos, como solução da inequação, os valores de x para os quais y > 0:

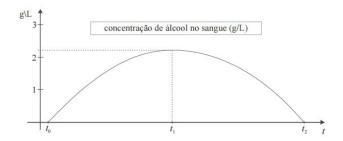
$$S = \{x \in R | x < 2 \text{ ou } x > 4\}$$

Observação: Quando o universo para as soluções não é fornecido, fazemos com que ele seja o conjunto R dos reais.

Questões

- 1- Foram colocados em uma reserva 35 animais ameaçados de extinção. Decorridos t anos, com $0 ext{ t } 10$, a população N desses animais passou a ser estimada por N(t) = $35 + 4t 0.4 ext{ t}^2$. Nessas condições, o número máximo que essa população de animais poderá atingir é:
 - A) 38
 - B) 45
 - C) 52
 - D) 59
 - E) 63
- **2 (SABESP ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABI-LIDADE – FCC/2012)** No conjunto dos números reais, a inequação $(x-1)(x+5)+x \le (2x-1)^2$ apresenta como conjunto solução:

- A) R
- B) $\{x \in R / x \le -2 \text{ ou } x \ge -1\}$
- C) $\{x \in R / -2 \le x \le -1\}$
- D) $\{x \in R / x \le 1 \text{ ou } x \ge 2\}$
- E) $\{x \in R / 1 \le x \le 2\}$
- **3 (PRF 2013 Cespe)** Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0.008(t^2 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de t = t0 (N(t0) = 0), partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t1, voltando a ficar sóbria em t = t2. Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para $t \in [t0, t2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de √589, julque os itens que se seguem.



O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

- () Certa () Errada
- 4-A proposição funcional "Para todo e qualquer valor de n, tem-se $6n < n^2 + 8$ " será verdadeira, se n for um número real
 - A) menor que 8.
 - B) menor que 4.
 - C) menor que 2.
 - D) maior que 2.
 - E) maior que 3.

Respostas

1 - RESPOSTA "B".

Como o intervalo de tempo corresponde de 0 a 10 anos e o maior tempo é 10 anos , logo teremos:

$$\begin{array}{lll} N(t) = 35 + 4t - 0.4t^2 & (0 \le t \le 10) \\ N(0) = 35 & N(10) = 35 & N(5) = 35 + 4.5 - 0.4.5^2 = 45 \end{array}$$



2 - RESPOSTA: "D".

$$x^{2} + 5x - x - 5 + x \le 4x^{2} - 4x + 1$$

 $-3x^{2} + 9x - 6 \le 0$: (3)
 $-x^{2} + 3x - 2 \le 0$.(-1)
 $x^{2} - 3x + 2 \ge 0$ $\rightarrow \Delta = (-3)^{2} - 4.1.2$



$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$



 $S=\{x \in R / x \le 1 \text{ ou } x \ge 2\}$

3 - RESPOSTA: CERTA

$$-0.008(t^2 - 35t + 34) > 1$$

 $-8(t^2 - 35t + 34) > 1000$
 $t^2 - 35t + 34 > -125$
 $t^2 - 35t + 159 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 35^2 - 4.1.159 = 589$$

$$t = \frac{-(-35) \pm \sqrt{589}}{2.1} = \frac{35 \pm 24,3}{2} \Rightarrow t1 = \frac{35 + 24,3}{2} = 29,65$$

$$= 5,35$$

$$\therefore t2 = \frac{35 - 24,3}{2}$$

 $S = \{5,35 < t < 29,65\}$, diferença entre eles = 24,3

4 - RESPOSTA: "C"

 $n^2 - 6n + 8 > 0$, resolvendo pelo método da Soma e Produto, temos:

Soma =
$$-\frac{b}{a} = \frac{-(-6)}{1} = 6$$

Produto =
$$\frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

Precisamos descobrir dois números cuja soma é 6 e o produto é 8 só podem ser 2 e 4.

Como a>0 a parábola tem concavidade para cima:



$$S = n < 2 \text{ ou } n > 4$$

10. POTENCIAÇÃO, RADICIAÇÃO E PORCENTAGEM

PORCENTAGEM

É uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{50}{100}$ é uma porcentagem que podemos representar por 50%.

Forma Decimal: É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo, 35% na forma decimal seriam representados por 0,35.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0.75$$

Cálculo de uma Porcentagem: Para calcularmos uma porcentagem p% de V, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por V.

P% de V =
$$\frac{p}{100}$$
. V

Exemplo 1

23% de 240 =
$$\frac{23}{100}$$
. 240 = 55,2

Exemplo 2

Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução: 67% de 56 000 =
$$\frac{67}{100}$$
.56000 = 37520

Resposta: 37 520 pessoas.

Porcentagem que o lucro representa em relação ao preço de custo e em relação ao preço de venda

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.

Lucro = preço de venda – preço de custo

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de **prejuízo**.

Assim, podemos escrever:

Preço de custo + lucro = preço de venda

Preço de custo – prejuízos = preço de venda

Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:

Lucro sobre o custo = lucro/preço de custo. 100%

Lucro sobre a venda = lucro/preço de venda. 100%

Observação: A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.



Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R\$ 500,00 e vendida por R\$ 800,00.

Pede-se:

- o lucro obtido na transação;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

Lucro =
$$800 - 500 = R$ 300,00$$

 $L_c = \frac{300}{500} = 0,60 = 60\%$
 $L_v = \frac{300}{800} = 0,375 = 37,5\%$

Aumento

Aumento Percentual: Consideremos um valor inicial V que deve sofrer um aumento de p% de seu valor. Chamemos de A o valor do aumento e V_A o valor após o aumento. Então, A = p% de $V = \frac{p}{100}$. V

$$V_A = V + A = V + \frac{p}{100}. V$$

$$V_A = (1 + \frac{p}{100}).V$$

Em que $(1 + \frac{p}{100})$ é o fator de aumento.

Desconto

Desconto Percentual: Consideremos um valor inicial V que deve sofrer um desconto de p% de seu valor. Chamemos de D o valor do desconto e V_D o valor após o desconto. Então, D = p% de $V = \frac{p}{100}$. V

$$V_{D} = V - D = V - \frac{p}{100}. V$$

$$V_D = (1 - \frac{p}{100}) \cdot V$$

Em que $(1 - \frac{p}{100})$ é o fator de desconto.

Exemplo

Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R\$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

$$V = \frac{3500}{1.4} = 2500$$

Resposta: R\$ 2 500,00

Aumentos e Descontos Sucessivos: Consideremos um valor inicial V, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de p_1 % e p_3 %. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$$V_1 = V \cdot (1 + \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, temos: $V_2 = V_1 \cdot (1 + \frac{p_2}{100})$

$$V_2 = V_1 \cdot (1 + \frac{p_2}{100})$$

$$V_2 = V \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 + \frac{p_2}{100})$$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de p₁% e p₂%.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$$V_1 = V. (1 - \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot (1 - \frac{p_2}{100})$$

$$V_2 = V \cdot (1 - \frac{p_1}{100}) \cdot (1 - \frac{p_2}{100})$$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de p₁% e, sucessivamente, um desconto de p_2 %.

Šendo V_1 o valor após o aumento, temos: $V_1 = V \cdot (1 + \frac{p_1}{100})$

$$V_1 = V \cdot (1 + \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot (1 - \frac{p_2}{100})$$

$$V_2 = V \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 - \frac{p_2}{100})$$

Exemplo

(VUNESP-SP) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1 000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, são:

Resolução:
$$V^A = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . v$$

$$V^A = \left(1.\frac{15}{100}\right)^n . 1000$$

 $V^A = 1000 \cdot (1,15)n$

 $V^A = 1000.1,15n$

 $V^{A} = 1.150,00n$

QUESTÕES

1 - (PREF. AMPARO/SP - AGENTE ESCOLAR - CON-

RIO/2014) Se em um tanque de um carro for misturado 45 litros de etanol em 28 litros de gasolina, qual será o percentual aproximado de gasolina nesse tanque?

A) 38,357%

B) 38,356%

C) 38,358%

D) 38,359%



2 - (CEF / Escriturário) Uma pessoa x pode realizar uma certa tarefa em 12 horas. Outra pessoa, y, é 50% mais e	ficiente
que x. Nessas condições, o número de horas necessárias para que y realize essa tarefa é :	

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7 E) 8

3 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Observe a tabela que indica o consumo mensal de uma mesma torneira da pia de uma cozinha, aberta meia volta por um minuto, uma vez ao dia.

	Torneira alimentada Torne por água de rua por á	
Consumo mensal por 1 minuto de uso, 1 vez ao dia	28,026 m ³	7,2 m ³

(http://www.sabesp.com.br/CalandraWeb/animacoes/index.html. Acessado em 15/03/2012)

Em relação ao cosumo mensal da torneira alimentada pela água da rua, o da torneira alimentada pela água da caixa representa, aproximadamente,

A) 20%

B) 26%

C) 30%

D) 35%

E) 40%

4 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP - TÉCNICO ADMINISTRATIVO - FCC/2014) O preço de uma mercadoria, na loja J, é de R\$ 50,00. O dono da loja J resolve reajustar o preço dessa mercadoria em 20%. A mesma mercadoria, na loja K, é vendida por R\$ 40,00. O dono da loja K resolve reajustar o preço dessa mercadoria de maneira a igualar o preço praticado na loja J após o reajuste de 20%. Dessa maneira o dono da loja K deve reajustar o preço em

A) 20%.

B) 50%.

C) 10%.

D) 15%. E) 60%.

5 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O preço de venda de um produto, descontado um imposto de 16% que incide sobre esse mesmo preço, supera o preço de compra em 40%, os quais constituem o lucro líquido do vendedor. Em quantos por cento, aproximadamente, o preço de venda é superior ao de compra?

A) 67%.

B) 61%.

C) 65%.

D) 63%.

E) 69%.

6 - (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 350,00. Para estabelecer o preço de venda desse produto em sua loja, o comerciante decidiu que o valor deveria ser suficiente para dar 30% de desconto sobre o preço de venda e ainda assim garantir lucro de 20% sobre o preço de compra. Nessas condições, o preço que o comerciante deve vender essa mercadoria é igual a

A) R\$ 620,00.

B) R\$ 580,00.

C) R\$ 600,00.

D) R\$ 590,00.

E) R\$ 610,00.

7 - (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Uma bolsa contém apenas 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. Sorteando ao acaso uma bola dessa bolsa, a probabilidade de que ela seja preta é

A) maior do que 55% e menor do que 60%.

B) menor do que 50%.

C) maior do que 65%.

D) maior do que 50% e menor do que 55%.

E) maior do que 60% e menor do que 65%.



8 - PREF. JUNDIAI/SP - ELETRICISTA - MAKIYA-

MA/2013) Das 80 crianças que responderam a uma enquete referente a sua fruta favorita, 70% eram meninos. Dentre as meninas, 25% responderam que sua fruta favorita era a maçã. Sendo assim, qual porcentagem representa, em relação a todas as crianças entrevistadas, as meninas que têm a maçã como fruta preferida?

A) 10%

B) 1,5%

C) 25%

D) 7,5%

E) 5%

9 - (PM/SE - SOLDADO 3°CLASSE - FUNCAB/2014)

Numa liquidação de bebidas, um atacadista fez a seguinte promoção:

Cerveja em lata: R\$ 2,40 a unidade.

Na compra de duas embalagens com 12 unidades cada, ganhe 25% de desconto no valor da segunda embalagem.

Alexandre comprou duas embalagens nessa promoção e revendeu cada unidade por R\$3,50. O lucro obtido por ele com a revenda das latas de cerveja das duas embalagens completas foi:

A) R\$33,60

B) R\$28,60

C) R\$26,40

D) R\$40,80

E) R\$43,20

10 - (PM/SE - SOLDADO 3°CLASSE - FUNCAB/2014)

Leilão de veículos apreendidos do Detran aconteceu no dia 7 de dezembro.

O Departamento Estadual de Trânsito de Sergipe – Detran/SE – realizou, no dia 7 de dezembro, sábado, às 9 horas, no Espaço Emes, um leilão de veículos apreendidos em fiscalizações de trânsito. Ao todo foram leiloados 195 veículos, sendo que 183 foram comercializados como sucatas e 12 foram vendidos como aptos para circulação.

Quem arrematou algum dos lotes disponíveis no leilão pagou 20% do lance mais 5% de comissão do leiloeiro no ato da arrematação. Os 80% restantes foram pagos impreterivelmente até o dia 11 de dezembro.

Fonte: http://www.ssp.se.gov.br05/12/13 (modificada).

Vitor arrematou um lote, pagou o combinado no ato da arrematação e os R\$28.800,00 restantes no dia 10 de dezembro. Com base nas informações contidas no texto, calcule o valor total gasto por Vitor nesse leilão.

A) R\$34.600,00

B) R\$36.000,00

C) R\$35.400,00

D) R\$32.000,00

E) R\$37.800,00

RESPOSTAS

1 - RESPOSTA: "B".

Mistura:28+45=73

73-----100%

28----x

X=38,356%

2 - RESPOSTA "C".

12 horas
$$\rightarrow$$
 100 %
50 % de 12 horas = $\frac{12}{2}$ = 6 horas

X = 12 horas \rightarrow 100 % = total de horas trabalhado Y = 50 % mais rápido que X.

Então, se 50% de 12 horas equivalem a 6 horas, logo Y faz o mesmo trabalho em 6 horas.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{7,2}{28,026} = 0,256 \approx 26\%$$

4 - RESPOSTA: "B".

Loja J:50 + 0.2.50 = 60

Loja K:40 + x. 40 = 60

40x = 20

x = 0.5

O reajuste deve ser de 50%.

5 - RESPOSTA: "A".

Preco de venda: PV

Preço de compra: PC

Note que: 1,4=100%+40% ou 1+0,4.Como ele superou o preço de venda (100%) em 40% , isso significa soma aos 100% mais 40%, logo 140%=1,4.

PV - 0,16PV = 1,4PC 0,84PV=1,4PC

$$\frac{PV}{PC} = \frac{1.4}{0.84} = 1.67$$

O preço de venda é 67% superior ao preço de compra.

6 - RESPOSTA: "C".

Preço de venda: PV

Preço de compra: 350

30% de desconto, deixa o produto com 70% do seu valor.

Como ele queria ter um lucro de 20% sobre o preço de compra, devemos multiplicar por 1,2(350+0,2.350) \rightarrow 0,7PV = 1,2 . 350

$$PV = 1.2 \cdot \frac{350}{0.7} = 600$$

O preço de venda deve ser R\$600,00.



7 - **RESPOSTA: "A".**

Ao todo tem 12 bolas, portanto a probabilidade de se tirar uma preta é:

$$P = \frac{7}{12} = 0,583 = 58,3\%$$

8 - RESPOSTA: "D".

Tem que ser menina E gostar de maçã. Meninas:100-70=30%

$$P = \frac{30}{100} \cdot \frac{25}{100}$$
 , simplificando temos $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$ \Rightarrow P = 0,075 . 100% = 7,5%.

9 - RESPOSTA: "A".

$$2.40 \cdot 12 = 28.80$$

segunda embalagem: $28,80 \cdot 0,75 = 21,60$

as duas embalagens: 28,80 + 21,60 = 50,40

 $revenda: 3,5 \cdot 24 = 84,00$

lucro: R\$84,00 - R\$50,40 = R\$33,60

O lucro de Alexandre foi de R\$33,60.

10 - RESPOSTA: "E".

$$x = \frac{28\,800 \cdot 100}{80} = 36\,000$$

valor da comissão: $\frac{36.000 \cdot 5}{100} = 1800$

Valor total: R\$36.000,00+R\$1.800,00=R\$37.800,00

11. EQUAÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU

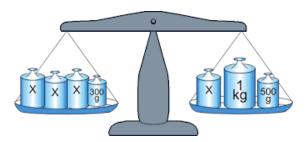
Equação 1º grau

Equação é toda sentença matemática aberta representada por uma igualdade, em que exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos.

Equação do 1° grau, na incógnita x, é toda equação redutível à forma ax+b=0, em que a e b são números reais, chamados coeficientes, com a \neq 0.

Uma raiz da equação $ax+b = 0(a \neq 0)$ é um valor numérico de x que, substituindo no 1º membro da equação, torna-se igual ao 2º membro.

Nada mais é que pensarmos em uma balança.



A balança deixa os dois lados iguais para equilibrar, a equação também.

No exemplo temos:

3x + 300

Outro lado: x+1000+500

E o equilíbrio? 3x+300=x+1500

Quando passamos de um lado para o outro invertemos o sinal

3x-x=1500-300

2x = 1200

X=600

Exemplo

(PREF. DE NITERÓI/RJ – Fiscal de Posturas – FGV/2015) A idade de Pedro hoje, em anos, é igual ao dobro da soma das idades de seus dois filhos, Paulo e Pierre. Pierre é três anos mais velho do que Paulo. Daqui a dez anos, a idade de Pierre será a metade da idade que Pedro tem hoje.

A soma das idades que Pedro, Paulo e Pierre têm hoje é:

- (A) 72;
- (B) 69;
- (C) 66;
- (D) 63;
- (E) 60.

Resolução

A ideia de resolver as equações é literalmente colocar na linguagem matemática o que está no texto.

"Pierre é três anos mais velho do que Paulo"

Pi=Pa+3

"Daqui a dez anos, a idade de Pierre será a metade da idade que Pedro tem hoje."

$$Pi + 10 = \frac{1}{2}Pe$$

A idade de Pedro hoje, em anos, é igual ao dobro da soma das idades de seus dois filhos,

Pe=2(Pi+Pa)

Pe=2Pi+2Pa

Lembrando que:

Pi=Pa+3



Substituindo em Pe

Pe=2(Pa+3)+2Pa

Pe=2Pa+6+2Pa

Pe=4Pa+6

$$Pi + 10 = \frac{1}{2}Pe$$

Pa=10

Pi=Pa+3

Pi=10+3=13

Pe=40+6=46

Soma das idades: 10+13+46=69

Resposta: B.

Equação 2º grau

A equação do segundo grau é representada pela fórmula geral:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Onde a, b e c são números reais, $a \neq 0$

Discussão das Raízes

$$ax^2 + c = 0$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Se a for negativo, não há solução no conjunto dos

Se a for positivo, a equação tem duas soluções:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$$
 $e x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Exemplo

$$2x^2 + 4 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{4}{2}}$$

 $x = \pm \sqrt{-2}$, portanto não há solução real.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax+b)=0$$

$$x = 0$$
 ou $x = -\frac{b}{a}$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\Delta < 0$ não há solução, pois não existe raiz quadrada real de um número negativo.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
 as soluções iguais:

Se∆> 0, há soluções reais diferentes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
 $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Relações entre Coeficientes e Raízes

Dada as duas raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 $e_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Soma das Raízes

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Produto das Raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Composição de uma equação do 2º grau, conhecidas as raízes

Podemos escrever a equação da seguinte maneira:

$$x^2$$
-Sx+P=0

Exemplo

Dada as raízes -2 e 7. Componha a equação do 2º grau.

Solução

 $S=x_1+x_2=-2+7=5$ $P=x_1.x_2=-2.7=-14$

Então a equação é: x2-5x-14=0



Exemplo

(IMA – Analista Administrativo Jr – SHDIAS/2015) A soma das idades de Ana e Júlia é igual a 44 anos, e, quando somamos os quadrados dessas idades, obtemos 1000. A mais velha das duas tem:

- (A) 24 anos
- (B) 26 anos
- (C) 31 anos
- (D) 33 anos

Resolução

A+J=44

 $A^2+J^2=1000$

A = 44 - J

 $(44-J)^2+J^2=1000$

 $1936-88J+J^2+J^2=1000$

 $2J^{2}-88J+936=0$

Dividindo por2:

 $J^2-44J+468=0$

 $\Delta = (-44)^2 - 4.1.468$

Δ=1936-1872=64

$$J = \frac{44 \pm 8}{2}$$

$$J_1 = \frac{44+8}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$$J_2 = \frac{44 - 8}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

12. PROBLEMAS ENVOLVENDO MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

MMC

O mmc de dois ou mais números naturais é o menor número, excluindo o zero, que é múltiplo desses números.

Cálculo do m.m.c.

Vamos estudar dois métodos para encontrar o mmc de dois ou mais números:

- 1) Podemos calcular o m.m.c. de dois ou mais números utilizando a fatoração. Acompanhe o cálculo do m.m.c. de 12 e 30:
 - 1°) decompomos os números em fatores primos
- 2º) o m.m.c. é o produto dos fatores primos comuns e não comuns:

Escrevendo a fatoração dos números na forma de potência, temos:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

m.m.c (12,30) =
$$2^2$$
 x 3 x 5

O mmc de dois ou mais números, quando fatorados, é o produto dos fatores comuns e não comuns , cada um com seu maior expoente

2) Método da decomposição simultânea Vamos encontrar o mmc (15, 24, 60)

Neste processo decompomos todos os números ao mesmo tempo, num dispositivo como mostra a figura acima. O produto dos fatores primos que obtemos nessa decomposição é o m.m.c. desses números.

Portanto, m.m.c.(15,24,60) = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 120 OBS:

- 1. Dados dois ou mais números, se um deles é múltiplo de todos os outros, então ele é o m.m.c. dos números dados.
- 2. Dados dois números primos entre si, o mmc deles é o produto desses números.

MDC

Máximo divisor comum (mdc)

É o maior divisor comum entre dois ou mais números naturais. Usamos a abreviação MDC Cálculo do m.d.c

Vamos estudar dois métodos para encontrar o mdc de dois ou mais números

- 1) Um modo de calcular o m.d.c. de dois ou mais números é utilizar a decomposição desses números em fatores primos:
 - Decompomos os números em fatores primos;
 - O m.d.c. é o produto dos fatores primos comuns.

Acompanhe o cálculo do m.d.c. entre 36 e 90:

 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

 $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

O m.d.c. é o produto dos fatores primos comuns => m.d.c.(36,90) = 2 x 3 x 3

Portanto m.d.c.(36,90) = 18.

Escrevendo a fatoração do número na forma de potência temos:

 $36 = 2^2 \times 3^2$

 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Portanto m.d.c. $(36,90) = 2 \times 3^2 = 18$.



2) Processo das divisões sucessivas : Nesse processo efetuamos várias divisões até chegar a uma divisão exata. O divisor desta divisão é o m.d.c. Acompanhe o cálculo do m.d.c.(48,30).

Regra prática:

1°) dividimos o número maior pelo número menor; 48 / 30 = 1 (com resto 18)

2º) dividimos o divisor 30, que é divisor da divisão anterior, por 18, que é o resto da divisão anterior, e assim sucessivamente;

30 / 18 = 1 (com resto 12)

18 / 12 = 1 (com resto 6)

12 / 6 = 2 (com resto zero - divisão exata)

3°) O divisor da divisão exata é 6. Então m.d.c.(48,30) = 6. OBS:

1.Dois ou mais números são primos entre si quando o máximo divisor comum entre eles é o número.

2.Dados dois ou mais números, se um deles é divisor de todos os outros, então ele é o mdc dos números dados.

Problemas

- 1. Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que duas peças restantes tinham as seguintes medidas: 156 centímetros e 234 centímetros. O gerente de produção ao ser informado das medidas, deu a ordem para que o funcionário cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível. Como ele poderá resolver essa situação?
- 2. Uma empresa de logística é composta de três áreas: administrativa, operacional e vendedores. A área administrativa é composta de 30 funcionários, a operacional de 48 e a de vendedores com 36 pessoas. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as três áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. As equipes devem conter o mesmo número de funcionários com o maior número possível. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.
- 3. (PUC-SP) Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feita na máquina A a cada 3 dias, na máquina B, a cada 4 dias, e na máquina C, a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção nas três máquinas, após quantos dias as máquinas receberão manutenção no mesmo dia.
- 4. Um médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 2 em 2 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 8 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão dos mesmos?
- 5. João tinha 20 bolinhas de gude e queria distribuí-las entre ele e 3 amigos de modo que cada um ficasse com um número par de bolinhas e nenhum deles ficasse com o mesmo número que o outro. Com quantas bolinhas ficou cada menino?

Resposta

- 1. Calculamos o MDC entre 156 e 234 e o resultado é : os retalhos devem ter 78 cm de comprimento.
- 2. Calculamos o MDC entre 30, 48 e 36. O número de equipes será igual a 19, com 6 participantes cada uma.
- 3. Calculamos o MMC entre 3, 4 e 6. Concluímos que após 12 dias, a manutenção será feita nas três máquinas. Portanto, dia 14 de dezembro.
- 4. Calculamos o MMC entre 2, 3 e 6. De 6 em 6 horas os três remédios serão ingeridos juntos. Portanto, o próximo horário será às 14 horas. 5. Se o primeiro menino ficar com 2 bolinhas, sobrarão 18 bolinhas para os outros 3 meninos. Se o segundo receber 4, sobrarão 14 bolinhas para os outros dois meninos. O terceiro menino receberá 6 bolinhas e o quarto receberá 8 bolinhas.

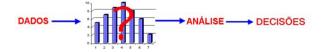
13. FUNÇÕES, INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS
14. NOÇÕES DE PROBABILIDADE
15. UNIDADES DE MEDIDA E ESCALAS

A estatística é, hoje em dia, um instrumento útil e, em alguns casos, indispensável para tomadas de decisão em diversos campos: científico, econômico, social, político...

Todavia, antes de chegarmos à parte de interpretação para tomadas de decisão, há que proceder a um indispensável trabalho de recolha e organização de dados, sendo a recolha feita através de recenseamentos (ou censos ou levantamentos estatísticos) ou sondagens.

Existem indícios que há 300 mil anos a.C. já se faziam censos na China, Babilônia e no Egito. Censos estes que se destinavam à taxação de impostos.

Estatística pode ser pensada como a ciência de aprendizagem a partir de dados. No nosso quotidiano, precisamos tomar decisões, muitas vezes decisões rápidas.



Em linhas gerais a Estatística fornece métodos que auxiliam o processo de tomada de decisão através da análise dos dados que possuímos.

Em Estatística, um resultado é significante, portanto, tem significância estatística, se for improvável que tenha ocorrido por acaso (que em estatística e probabilidade é tratado pelo conceito de chance), caso uma determinada hipótese nula seja verdadeira, mas não sendo improvável caso a hipótese base seja falsa. A expressão teste de significância foi cunhada por Ronald Fisher.



Mais concretamente, no teste de hipóteses com base em frequência estatística, a significância de um teste é a probabilidade máxima de rejeitar acidentalmente uma hipótese nula verdadeira (uma decisão conhecida como erro de tipo I). O nível de significância de um resultado é também chamado de α e não deve ser confundido com o valor p (p-value).

Por exemplo, podemos escolher um nível de significância de, digamos, 5%, e calcular um valor crítico de um parâmetro (por exemplo a média) de modo que a probabilidade de ela exceder esse valor, dada a verdade da hipótese nulo, ser 5%. Se o valor estatístico calculado (ou seja, o nível de 5% de significância anteriormente escolhido) exceder o valor crítico, então é significante "ao nível de 5%".

Se o nível de significância (ex: 5% anteriormente dado) é menor, o valor é menos provavelmente um extremo em relação ao valor crítico. Deste modo, um resultado que é "significante ao nível de 1%" é mais significante do que um resultado que é significante "ao nível de 5%". No entanto, um teste ao nível de 1% é mais susceptível de padecer do erro de tipo II do que um teste de 5% e por isso terá menos poder estatístico.

Ao divisar um teste de hipóteses, o técnico deverá tentar maximizar o poder de uma dada significância, mas ultimamente tem de reconhecer que o melhor resultado que se pode obter é um compromisso entre significância e poder, em outras palavras, entre os erros de tipo I e tipo II.

É importante ressaltar que os valores *p* Fisherianos são filosoficamente diferentes dos erros de tipo I de Neyman -Pearson. Esta confusão é infelizmente propagada por muitos livros de estatística.

Divisão da Estatística:

- *Estatística Descritiva:* Média (Aritmética, Geométrica, Harmônica, Ponderada) Mediana Moda Variância Desvio padrão Coeficiente de variação.
- *Inferência Estatística:* Testes de hipóteses **Significância** Potência Hipótese nula/Hipótese alternativa Erro de tipo I Erro de tipo II Teste T Teste Z Distribuição t de Student Normalização Valor p Análise de variância.
- *Estatística Não-Paramétrica:* Teste Binomial Teste Qui-quadrado (uma amostra, duas amostras independentes, k amostras independentes) Teste Kolmogorov-Smirnov (uma amostra, duas amostras independentes) Teste de McNemar Teste dos Sinais Teste de Wilcoxon Teste de Walsh Teste Exata de Fisher Teste Q de Cochran Teste de Kruskal-Wallis Teste de Friedman.
- **Análise da Sobrevivência:** Função de sobrevivência Kaplan-Meier Teste log-rank Taxa de falha Proportional hazards models.
- **Amostragem:** Amostragem aleatória simples (com reposição, sem reposição) Amostragem estratificada Amostragem por conglomerados Amostragem sistemática estimador razão estimador regressão.
- *Distribuição de Probabilidade:* Normal De Pareto De Poisson De Bernoulli Hipergeométrica Binomial Binomial negativa Gama Beta t de Student F-Snedecor.

 - Correlação: Variável de confusão - Coeficiente de correlação de Pearson - Coeficiente de correlação de postos de Spearman - Coeficiente de correlação tau de Kendall).

Regressão: Regressão linear - Regressão não-linear - Regressão logística - Método dos mínimos quadrados - Modelos Lineares Generalizados - Modelos para Dados Longitudinais.

- **Análise Multivariada:** Distribuição normal multivariada Componentes principais Análise fatorial Análise discriminante Análise de "Cluster" (Análise de agrupamento) Análise de Correspondência.
- **Séries Temporais:** Modelos para séries temporais Tendência e sazonalidade Modelos de suavização exponencial ARIMA Modelos sazonais.

Panorama Geral:

Variáveis: São características que são medidas, controladas ou manipuladas em uma pesquisa. Diferem em muitos aspectos, principalmente no papel que a elas é dado em uma pesquisa e na forma como podem ser medidas.

Pesquisa "Correlacional" X Pesquisa "Experimental": A maioria das pesquisas empíricas pertencem claramente a uma dessas duas categorias gerais: em uma pesquisa correlacional (Levantamento) o pesquisador não influencia (ou tenta não influenciar) nenhuma variável, mas apenas as mede e procura por relações (correlações) entre elas, como pressão sangüínea e nível de colesterol. Em uma pesquisa experimental (Experimento) o pesquisador manipula algumas variáveis e então mede os efeitos desta manipulação em outras variáveis; por exemplo, aumentar artificialmente a pressão sangüínea e registrar o nível de colesterol. A análise dos dados em uma pesquisa experimental também calcula "correlações" entre variáveis, especificamente entre aquelas manipuladas e as que foram afetadas pela manipulação. Entretanto, os dados experimentais podem demonstrar conclusivamente relações causais (causa e efeito) entre variáveis. Por exemplo, se o pesquisador descobrir que sempre que muda a variável A então a variável B também muda, então ele poderá concluir que A "influencia" B. Dados de uma pesquisa correlacional podem ser apenas "interpretados" em termos causais com base em outras teorias (não estatísticas) que o pesquisador conheça, mas não podem ser conclusivamente provar causalidade.

Variáveis dependentes e variáveis independentes:

Variáveis independentes são aquelas que são manipuladas enquanto que variáveis dependentes são apenas medidas ou registradas. Esta distinção confunde muitas pessoas que dizem que "todas variáveis dependem de alguma coisa". Entretanto, uma vez que se esteja acostumado a esta distinção ela se torna indispensável. Os termos variável dependente e independente aplicam-se principalmente à pesquisa experimental, onde algumas variáveis são manipuladas, e, neste sentido, são "independentes" dos padrões de reação inicial, intenções e características dos sujeitos da pesquisa (unidades experimentais). Espera-se que ou-



tras variáveis sejam "dependentes" da manipulação ou das condições experimentais. Ou seja, elas dependem "do que os sujeitos farão" em resposta. Contrariando um pouco a natureza da distinção, esses termos também são usados em estudos em que não se manipulam variáveis independentes, literalmente falando, mas apenas se designam sujeitos a "grupos experimentais" baseados em propriedades pré-existentes dos próprios sujeitos. Por exemplo, se em uma pesquisa compara-se a contagem de células brancas (White Cell Count em inglês, WCC) de homens e mulheres, sexo pode ser chamada de variável independente e WCC de variável dependente.

Níveis de Mensuração: As variáveis diferem em "quão bem" elas podem ser medidas, isto é, em quanta informação seu nível de mensuração pode prover. Há obviamente algum erro em cada medida, o que determina o "montante de informação" que se pode obter, mas basicamente o fator que determina a quantidade de informação que uma variável pode prover é o seu tipo de nível de mensuração. Sob este prisma as variáveis são classificadas como nominais, ordinais e intervalares.

- Variáveis nominais permitem apenas classificação qualitativa. Ou seja, elas podem ser medidas apenas em termos de quais itens pertencem a diferentes categorias, mas não se pode quantificar nem mesmo ordenar tais categorias. Por exemplo, pode-se dizer que 2 indivíduos são diferentes em termos da variável A (sexo, por exemplo), mas não se pode dizer qual deles "tem mais" da qualidade representada pela variável. Exemplos típicos de variáveis nominais são sexo, raça, cidade, etc.
- Variáveis ordinais permitem ordenar os itens medidos em termos de qual tem menos e qual tem mais da qualidade representada pela variável, mas ainda não permitem que se diga "o quanto mais". Um exemplo típico de uma variável ordinal é o status sócio-econômico das famílias residentes em uma localidade: sabe-se que média-alta é mais "alta" do que média, mas não se pode dizer, por exemplo, que é 18% mais alta. A própria distinção entre mensuração nominal, ordinal e intervalar representa um bom exemplo de uma variável ordinal: pode-se dizer que uma medida nominal provê menos informação do que uma medida ordinal, mas não se pode dizer "quanto menos" ou como esta diferença se compara à diferença entre mensuração ordinal e intervalar.
- Variáveis intervalares permitem não apenas ordenar em postos os itens que estão sendo medidos, mas também quantificar e comparar o tamanho das diferenças entre eles. Por exemplo, temperatura, medida em graus Celsius constitui uma variável intervalar. Pode-se dizer que a temperatura de 40C é maior do que 30C e que um aumento de 20C para 40C é duas vezes maior do que um aumento de 30C para 40C.

Relações entre variáveis: Duas ou mais variáveis quaisquer estão relacionadas se em uma amostra de observações os valores dessas variáveis são distribuídos de forma consistente. Em outras palavras, as variáveis estão relacionadas se seus valores correspondem sistematicamente uns aos outros para aquela amostra de observações. Por exemplo, sexo e WCC seriam relacionados se a maioria

dos homens tivesse alta WCC e a maioria das mulheres baixa WCC, ou vice-versa; altura é relacionada ao peso porque tipicamente indivíduos altos são mais pesados do que indivíduos baixos; Q.I. está relacionado ao número de erros em um teste se pessoas com Q.I.'s mais altos cometem menos erros.

Importância das relações entre variáveis: Geralmente o objetivo principal de toda pesquisa ou análise científica é encontrar relações entre variáveis. A filosofia da ciência ensina que não há outro meio de representar "significado" exceto em termos de relações entre quantidades ou qualidades, e ambos os casos envolvem relações entre variáveis. Assim, o avanço da ciência sempre tem que envolver a descoberta de novas relações entre variáveis. Em pesquisas correlacionais a medida destas relações é feita de forma bastante direta, bem como nas pesquisas experimentais. Por exemplo, o experimento já mencionado de comparar WCC em homens e mulheres pode ser descrito como procura de uma correlação entre 2 variáveis: sexo e WCC. A Estatística nada mais faz do que auxiliar na avaliação de relações entre variáveis.

Aspectos básicos da relação entre variáveis: As duas propriedades formais mais elementares de qualquer relação entre variáveis são a magnitude ("tamanho") e a confiabilidade da relação.

- Magnitude é muito mais fácil de entender e medir do que a confiabilidade. Por exemplo, se cada homem em nossa amostra tem um WCC maior do que o de qualquer mulher da amostra, poderia-se dizer que a magnitude da relação entre as duas variáveis (sexo e WCC) é muito alta em nossa amostra. Em outras palavras, poderia-se prever uma baseada na outra (ao menos na amostra em questão).
- Confiabilidade é um conceito muito menos intuitivo, mas extremamente importante. Relaciona-se à "representatividade" do resultado encontrado em uma amostra específica de toda a população. Em outras palavras, diz quão provável será encontrar uma relação similar se o experimento fosse feito com outras amostras retiradas da mesma população, lembrando que o maior interesse está na população. O interesse na amostra reside na informação que ela pode prover sobre a população. Se o estudo atender certos critérios específicos (que serão mencionados posteriormente) então a confiabilidade de uma relação observada entre variáveis na amostra pode ser estimada quantitativamente e representada usando uma medida padrão (chamada tecnicamente de nível-p ou nível de significância estatística).

Significância Estatística (nível-p): A significância estatística de um resultado é uma medida estimada do grau em que este resultado é "verdadeiro" (no sentido de que seja realmente o que ocorre na população, ou seja no sentido de "representatividade da população"). Mais tecnicamente, o valor do nível-p representa um índice decrescente da confiabilidade de um resultado. Quanto mais alto o nível-p, menos se pode acreditar que a relação observada entre as variáveis na amostra é um indicador confiável da



relação entre as respectivas variáveis na população. Especificamente, o nível-p representa a probabilidade de erro envolvida em aceitar o resultado observado como válido, isto é, como "representativo da população". Por exemplo, um nível-p de 0,05 (1/20) indica que há 5% de probabilidade de que a relação entre as variáveis, encontrada na amostra, seja um "acaso feliz". Em outras palavras, assumindo que não haja relação entre aquelas variáveis na população, e o experimento de interesse seja repetido várias vezes, poderia-se esperar que em aproximadamente 20 realizações do experimento haveria apenas uma em que a relação entre as variáveis em questão seria igual ou mais forte do que a que foi observada naquela amostra anterior. Em muitas áreas de pesquisa, o nível-p de 0,05 é costumeiramente tratado como um "limite aceitável" de erro.

Como determinar que um resultado é "realmente" significante: Não há meio de evitar arbitrariedade na decisão final de qual nível de significância será tratado como realmente "significante". Ou seja, a seleção de um nível de significância acima do qual os resultados serão rejeitados como inválidos é arbitrária. Na prática, a decisão final depende usualmente de: se o resultado foi previsto a priori ou apenas a posteriori no curso de muitas análises e comparações efetuadas no conjunto de dados; no total de evidências consistentes do conjunto de dados; e nas "tradições" existentes na área particular de pesquisa. Tipicamente, em muitas ciências resultados que atingem nível-p 0,05 são considerados estatisticamente significantes, mas este nível ainda envolve uma probabilidade de erro razoável (5%). Resultados com um nível-p 0,01 são comumente considerados estatisticamente significantes, e com nível-p 0,005 ou nível-p 0,001 são freqüentemente chamados "altamente" significantes. Estas classificações, porém, são convenções arbitrárias e apenas informalmente baseadas em experiência geral de pesquisa. Uma conseqüência óbvia é que um resultado considerado significante a 0,05, por exemplo, pode não sê-lo a 0,01.

Significância estatística e o número de análises realizadas: Desnecessário dizer quanto mais análises sejam realizadas em um conjunto de dados, mais os resultados atingirão "por acaso" o nível de significância convencionado. Por exemplo, ao calcular correlações entre dez variáveis (45 diferentes coeficientes de correlação), seria razoável esperar encontrar por acaso que cerca de dois (um em cada 20) coeficientes de correlação são significantes ao nível-p 0,05, mesmo que os valores das variáveis sejam totalmente aleatórios, e aquelas variáveis não se correlacionem na população. Alguns métodos estatísticos que envolvem muitas comparações, e portanto uma boa chance para tais erros, incluem alguma "correção" ou ajuste para o número total de comparações. Entretanto, muitos métodos estatísticos (especialmente análises exploratórias simples de dados) não oferecem nenhum remédio direto para este problema. Cabe então ao pesquisador avaliar cuidadosamente a confiabilidade de descobertas não esperadas.

Força X Confiabilidade de uma relação entre variáveis: Foi dito anteriormente que força (magnitude) e confiabilidade são dois aspectos diferentes dos relacionamentos entre variáveis. Contudo, eles não são totalmente independentes. Em geral, em uma amostra de um certo tamanho quanto maior a magnitude da relação entre variáveis, mais confiável a relação.

Assumindo que não há relação entre as variáveis na população, o resultado mais provável deveria ser também não encontrar relação entre as mesmas variáveis na amostra da pesquisa. Assim, quanto mais forte a relação encontrada na amostra menos provável é a não existência da relação correspondente na população. Então a magnitude e a significância de uma relação aparentam estar fortemente relacionadas, e seria possível calcular a significância a partir da magnitude e vice-versa. Entretanto, isso é válido apenas se o tamanho da amostra é mantido constante, porque uma relação de certa força poderia ser tanto altamente significante ou não significante de todo dependendo do tamanho da amostra.

Por que a significância de uma relação entre variáveis depende do tamanho da amostra: Se há muito poucas observações então há também poucas possibilidades de combinação dos valores das variáveis, e então a probabilidade de obter por acaso uma combinação desses valores que indique uma forte relação é relativamente alta. Considere-se o seguinte exemplo:

Há interesse em duas variáveis (sexo: homem, mulher; WCC: alta, baixa) e há apenas quatro sujeitos na amostra (2 homens e 2 mulheres). A probabilidade de se encontrar, puramente por acaso, uma relação de 100% entre as duas variáveis pode ser tão alta quanto 1/8. Explicando, há uma chance em oito de que os dois homens tenham alta WCC e que as duas mulheres tenham baixa WCC, ou vice-versa, mesmo que tal relação não exista na população. Agora considere-se a probabilidade de obter tal resultado por acaso se a amostra consistisse de 100 sujeitos: a probabilidade de obter aquele resultado por acaso seria praticamente zero.

Observando um exemplo mais geral. Imagine-se uma população teórica em que a média de WCC em homens e mulheres é exatamente a mesma. Supondo um experimento em que se retiram pares de amostras (homens e mulheres) de um certo tamanho da população e calcula-se a diferença entre a média de WCC em cada par de amostras (supor ainda que o experimento será repetido várias vezes). Na maioria dos experimento os resultados das diferenças serão próximos de zero. Contudo, de vez em quando, um par de amostra apresentará uma diferença entre homens e mulheres consideravelmente diferente de zero. Com que freqüência isso acontece? Quanto menor a amostra em cada experimento maior a probabilidade de obter esses resultados errôneos, que, neste caso, indicariam a existência de uma relação entre sexo e WCC obtida de uma população em que tal relação não existe. Observe-se mais um exemplo ("razão meninos para meninas", Nisbett et al., 1987):



Há dois hospitais: no primeiro nascem 120 bebês a cada dia e no outro apenas 12. Em média a razão de meninos para meninas nascidos a cada dia em cada hospital é de 50/50. Contudo, certo dia, em um dos hospitais nasceram duas vezes mais meninas do que meninos. Em que hospital isso provavelmente aconteceu? A resposta é óbvia para um estatístico, mas não tão óbvia para os leigos: é muito mais provável que tal fato tenha ocorrido no hospital menor. A razão para isso é que a probabilidade de um desvio aleatório da média da população aumenta com a diminuição do tamanho da amostra (e diminui com o aumento do tamanho da amostra).

Por que pequenas relações podem ser provadas como significantes apenas por grandes amostras: Os exemplos dos parágrafos anteriores indicam que se um relacionamento entre as variáveis em questão (na população) é pequeno, então não há meio de identificar tal relação em um estudo a não ser que a amostra seja correspondentemente grande. Mesmo que a amostra seja de fato "perfeitamente representativa" da população o efeito não será estatisticamente significante se a amostra for pequena. Analogamente, se a relação em questão é muito grande na população então poderá ser constatada como altamente significante mesmo em um estudo baseado em uma pequena amostra. Mais um exemplo:

Se uma moeda é ligeiramente viciada, de tal forma que quando lançada é ligeiramente mais provável que ocorram caras do que coroas (por exemplo uma proporção 60% para 40%). Então dez lançamentos não seriam suficientes para convencer alguém de que a moeda é viciada, mesmo que o resultado obtido (6 caras e 4 coroas) seja perfeitamente representativo do viesamento da moeda. Entretanto, dez lançamentos não são suficientes para provar nada? Não, se o efeito em questão for grande o bastante, os dez lançamentos serão suficientes. Por exemplo, imagine-se que a moeda seja tão viciada que não importe como venha a ser lançada o resultado será cara. Se tal moeda fosse lançada dez vezes, e cada lançamento produzisse caras, muitas pessoas considerariam isso prova suficiente de que há "algo errado" com a moeda. Em outras palavras, seria considerada prova convincente de que a população teórica de um número infinito de lançamentos desta moeda teria mais caras do que coroas. Assim, se a relação é grande, então poderá ser considerada significante mesmo em uma pequena amostra.

Pode uma "relação inexistente" ser um resultado significante: Quanto menor a relação entre as variáveis maior o tamanho de amostra necessário para prová-la significante. Por exemplo, imagine-se quantos lançamentos seriam necessários para provar que uma moeda é viciada se seu viesamento for de apenas 0,000001 %! Então, o tamanho mínimo de amostra necessário cresce na mesma proporção em que a magnitude do efeito a ser demonstrado decresce. Quando a magnitude do efeito aproxima-se de zero, o tamanho de amostra necessário para prová-lo aproxima-se do infinito. Isso quer dizer que, se quase não

há relação entre duas variáveis o tamanho da amostra precisa quase ser igual ao tamanho da população, que teoricamente é considerado infinitamente grande. A significância estatística representa a probabilidade de que um resultado similar seja obtido se toda a população fosse testada. Assim, qualquer coisa que fosse encontrada após testar toda a população seria, por definição, significante ao mais alto nível possível, e isso também inclui todos os resultados de "relação inexistente".

Como medir a magnitude (força) das relações entre variáveis: Há muitas medidas da magnitude do relacionamento entre variáveis que foram desenvolvidas por estatísticos: a escolha de uma medida específica em dadas circunstâncias depende do número de variáveis envolvidas, níveis de mensuração usados, natureza das relações, etc. Quase todas, porém, seguem um princípio geral: elas procuram avaliar a relação comparando-a de alguma forma com a "máxima relação imaginável" entre aquelas variáveis específicas. Tecnicamente, um modo comum de realizar tais avaliações é observar quão diferenciados são os valores das variáveis, e então calcular qual parte desta "diferença global disponível" seria detectada na ocasião se aquela diferença fosse "comum" (fosse apenas devida à relação entre as variáveis) nas duas (ou mais) variáveis em questão. Falando menos tecnicamente, compara-se "o que é comum naquelas variáveis" com "o que potencialmente poderia haver em comum se as variáveis fossem perfeitamente relacionadas". Outro exemplo:

Em uma amostra o índice médio de WCC é igual a 100 em homens e 102 em mulheres. Assim, poderia-se dizer que, em média, o desvio de cada valor da média de ambos (101) contém uma componente devida ao sexo do sujeito, e o tamanho desta componente é 1. Este valor, em certo sentido, representa uma medida da relação entre sexo e WCC. Contudo, este valor é uma medida muito pobre, porque não diz quão relativamente grande é aquela componente em relação à "diferença global" dos valores de WCC. Há duas possibilidades extremas: S

- Se todos os valore de WCC de homens são exatamente iguais a 100 e os das mulheres iguais a 102 então todos os desvios da média conjunta na amostra seriam inteiramente causados pelo sexo. Poderia-se dizer que nesta amostra sexo é perfeitamente correlacionado a WCC, ou seja, 100% das diferenças observadas entre os sujeitos relativas a suas WCC's devem-se a seu sexo.
- Se todos os valores de WCC estão em um intervalo de 0 a 1000, a mesma diferença (de 2) entre a WCC média de homens e mulheres encontrada no estudo seria uma parte tão pequena na diferença global dos valores que muito provavelmente seria considerada desprezível. Por exemplo, um sujeito a mais que fosse considerado poderia mudar, ou mesmo reverter, a direção da diferença. Portanto, toda boa medida das relações entre variáveis tem que levar em conta a diferenciação global dos valores individuais na amostra e avaliar a relação em termos (relativos) de quanto desta diferenciação se deve à relação em questão.



"Formato geral" de muitos testes estatísticos: Como o objetivo principal de muitos testes estatísticos é avaliar relações entre variáveis, muitos desses testes seguem o princípio exposto no item anterior. Tecnicamente, eles representam uma razão de alguma medida da diferenciação comum nas variáveis em análise (devido à sua relação) pela diferenciação global daquelas variáveis. Por exemplo, teria-se uma razão da parte da diferenciação global dos valores de WCC que podem se dever ao sexo pela diferenciação global dos valores de WCC. Esta razão é usualmente chamada de razão da variação explicada pela variação total. Em estatística o termo variação explicada não implica necessariamente que tal variação é "compreendida" conceitualmente". O termo é usado apenas para denotar a variação comum às variáveis em questão, ou seja, a parte da variação de uma variável que é "explicada" pelos valores específicos da outra variável e vice-versa.

Como é calculado o nível de significância estatístico: Assuma-se que já tenha sido calculada uma medida da relação entre duas variáveis (como explicado acima). A próxima questão é "quão significante é esta relação"? Por exemplo, 40% da variação global ser explicada pela relação entre duas variáveis é suficiente para considerar a relação significante? "Depende". Especificamente, a significância depende principalmente do tamanho da amostra. Como já foi explicado, em amostras muito grandes mesmo relações muito pequenas entre variáveis serão significantes, enquanto que em amostras muito pequenas mesmo relações muito grandes não poderão ser consideradas confiáveis (significantes). Assim, para determinar o nível de significância estatística torna-se necessária uma função que represente o relacionamento entre "magnitude" e "significância" das relações entre duas variáveis, dependendo do tamanho da amostra. Tal função diria exatamente "quão provável é obter uma relação de dada magnitude (ou maior) de uma amostra de dado tamanho, assumindo que não há tal relação entre aquelas variáveis na população". Em outras palavras, aquela função forneceria o nível de significância (nível-p), e isso permitiria conhecer a probabilidade de erro envolvida em rejeitar a idéia de que a relação em questão não existe na população. Esta hipótese "alternativa" (de que não há relação na população) é usualmente chamada de hipótese nula. Seria ideal se a função de probabilidade fosse linear, e por exemplo, apenas tivesse diferentes inclinações para diferentes tamanhos de amostra. Infelizmente, a função é mais complexa, e não é sempre exatamente a mesma. Entretanto, em muitos casos, sua forma é conhecida e isso pode ser usado para determinar os níveis de significância para os resultados obtidos em amostras de certo tamanho. Muitas daquelas funções são relacionadas a um tipo geral de função que é chamada de normal (ou gaussiana).

Por que a distribuição normal é importante: A "distribuição normal" é importante porque em muitos casos ela se aproxima bem da função introduzida no item anterior. A distribuição de muitas estatísticas de teste é normal ou segue alguma forma que pode ser derivada da distribuição normal. Neste sentido, filosoficamente, a distribuição

normal representa uma das elementares "verdades acerca da natureza geral da realidade", verificada empiricamente, e seu status pode ser comparado a uma das leis fundamentais das ciências naturais. A forma exata da distribuição normal (a característica "curva do sino") é definida por uma função que tem apenas dois parâmetros: média e desvio padrão.

Uma propriedade característica da distribuição normal é que 68% de todas as suas observações caem dentro de um intervalo de 1 desvio padrão da média, um intervalo de 2 desvios padrões inclui 95% dos valores, e 99% das observações caem dentro de um intervalo de 3 desvios padrões da média. Em outras palavras, em uma distribuição normal as observações que tem um valor padronizado de menos do que -2 ou mais do que +2 tem uma freqüência relativa de 5% ou menos (valor padronizado significa que um valor é expresso em termos de sua diferença em relação à média, dividida pelo desvio padrão).

Ilustração de como a distribuição normal é usada em raciocínio estatístico (indução): Retomando o exemplo já discutido, onde pares de amostras de homens e mulheres foram retirados de uma população em que o valor médio de WCC em homens e mulheres era exatamente o mesmo. Embora o resultado mais provável para tais experimentos (um par de amostras por experimento) é que a diferença entre a WCC média em homens e mulheres em cada par seja próxima de zero, de vez em quando um par de amostras apresentará uma diferença substancialmente diferente de zero. Quão freqüentemente isso ocorre? Se o tamanho da amostra é grande o bastante, os resultados de tais repetições são "normalmente distribuídos", e assim, conhecendo a forma da curva normal pode-se calcular precisamente a probabilidade de obter "por acaso" resultados representando vários níveis de desvio da hipotética média populacional 0 (zero). Se tal probabilidade calculada é tão pequena que satisfaz ao critério previamente aceito de significância estatística, então pode-se concluir que o resultado obtido produz uma melhor aproximação do que está acontecendo na população do que a "hipótese nula". Lembrando ainda que a hipótese nula foi considerada apenas por "razões técnicas" como uma referência contra a qual o resultado empírico (dos experimentos) foi avaliado.

Todos os testes estatísticos são normalmente distribuídos: Não todos, mas muitos são ou baseados na distribuição normal diretamente ou em distribuições a ela relacionadas, e que podem ser derivadas da normal, como as distribuições t, F ou Chi-quadrado (Qui-quadrado). Tipicamente, estes testes requerem que as variáveis analisadas sejam normalmente distribuídas na população, ou seja, que elas atendam à "suposição de normalidade". Muitas variáveis observadas realmente são normalmente distribuídas, o que é outra razão por que a distribuição normal representa uma "característica geral" da realidade empírica. O problema pode surgir quando se tenta usar um teste baseado na distribuição normal para analisar dados de variáveis que não são normalmente distribuídas. Em tais casos há duas opções. Primeiramente, pode-se usar algum teste "não paramétrico" alternativo (ou teste "livre de distribui-



ção"); mas isso é freqüentemente inconveniente porque tais testes são tipicamente menos poderosos e menos flexíveis em termos dos tipos de conclusões que eles podem proporcionar. Alternativamente, em muitos casos ainda se pode usar um teste baseado na distribuição normal se apenas houver certeza de que o tamanho das amostras é suficientemente grande. Esta última opção é baseada em um princípio extremamente importante que é largamente responsável pela popularidade dos testes baseados na distribuição normal. Nominalmente, quanto mais o tamanho da amostra aumente, mais a forma da distribuição amostral (a distribuição de uma estatística da amostra) da média aproxima-se da forma da normal, mesmo que a distribuição da variável em questão não seja normal. Este princípio é chamado de *Teorema Central do Limite*.

Como se conhece as consequências de violar a suposição de normalidade: Embora muitas das declarações feitas anteriormente possam ser provadas matematicamente, algumas não têm provas teóricas e podem demonstradas apenas empiricamente via experimentos Monte Carlo (simulações usando geração aleatória de números). Nestes experimentos grandes números de amostras são geradas por um computador seguindo especificações pré-designadas e os resultados de tais amostras são analisados usando uma grande variedade de testes. Este é o modo empírico de avaliar o tipo e magnitude dos erros ou viesamentos a que se expõe o pesquisador quando certas suposições teóricas dos testes usados não são verificadas nos dados sob análise. Especificamente, os estudos de Monte Carlo foram usados extensivamente com testes baseados na distribuição normal para determinar quão sensíveis eles eram à violações da suposição de que as variáveis analisadas tinham distribuição normal na população. A conclusão geral destes estudos é que as conseqüências de tais violações são menos severas do que se tinha pensado a princípio. Embora estas conclusões não devam desencorajar ninguém de se preocupar com a suposição de normalidade, elas aumentaram a popularidade geral dos testes estatísticos dependentes da distribuição normal em todas as áreas de pesquisa.

Objeto da Estatística: Estatística é uma ciência exata que visa fornecer subsídios ao analista para coletar, organizar, resumir, analisar e apresentar dados. Trata de parâmetros extraídos da população, tais como média ou desvio padrão. A estatística fornece-nos as técnicas para extrair informação de dados, os quais são muitas vezes incompletos, na medida em que nos dão informação útil sobre o problema em estudo, sendo assim, é objetivo da Estatística extrair informação dos dados para obter uma melhor compreensão das situações que representam. Quando se aborda uma problemática envolvendo métodos estatísticos, estes devem ser utilizados mesmo antes de se recolher a amostra, isto é, deve-se planejar a experiência que nos vai permitir recolher os dados, de modo que, posteriormente, se possa extrair o máximo de informação relevante para o problema em estudo, ou seja, para a população de onde os dados provêm. Quando de posse dos dados, procura-se agrupá-los e reduzi-los, sob forma de amostra, deixando de

lado a aleatoriedade presente. Seguidamente o objetivo do estudo estatístico pode ser o de estimar uma quantidade ou testar uma hipótese, utilizando-se técnicas estatísticas convenientes, as quais realçam toda a potencialidade da Estatística, na medida em que vão permitir tirar conclusões acerca de uma população, baseando-se numa pequena amostra, dando-nos ainda uma medida do erro cometido.

Exemplo: Ao chegarmos a uma churrascaria, não precisamos comer todos os tipos de saladas, de sobremesas e de carnes disponíveis, para conseguirmos chegar a conclusão de que a comida é de boa qualidade. Basta que seja provado um tipo de cada opção para concluirmos que estamos sendo bem servidos e que a comida está dentro dos padrões.

Noção Geral de Média

Considere um conjunto numérico $A = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ e efetue uma certa operação com todos os elementos de A.

Se for possível substituir cada um dos elementos do conjunto A por um número x de modo que o resultado da operação citada seja o mesmo diz-se, por definição, que x será a média dos elementos de A relativa a essa operação.

Média Aritmética

Definição

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição é chamada média aritmética.

Cálculo da média aritmética

Se x for a média aritmética dos elementos do conjunto numérico A = $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$, então, por definição:

$$x + x + x + ... + x = x_1; x_2; x_3; ...; \underline{x_n} \leftrightarrow n \cdot x = x_1; x_2; x_3; ...; \underline{x_n}$$

n parcelas

e, portanto,

$$x = \frac{x_1; x_2; x_3; ...; x_n}{n}$$

Conclusão

A média aritmética dos n elementos do conjunto numérico A é a soma de todos os seus elementos, dividida por n.

Exemplo

Calcular a média aritmética entre os números 3, 4, 6, 9, e 13.

Resolução

Se x for a média aritmética dos elementos do conjunto (3, 4, 6, 9, 13), então x será a soma dos 5 elementos, dividida por 5. Assim:

$$x = \frac{3+4+6+9+13}{15} \leftrightarrow x = \frac{35}{5} \leftrightarrow x = 7$$

A média aritmética é 7.



Média Aritmética Ponderada

Definição

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição e na qual cada elemento tem um "determinado peso" é chamada média aritmética ponderada.

Cálculo da média aritmética ponderada

Se x for a média aritmética ponderada dos elementos do conjunto numérico A = $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ com "pesos" P_1 ; P₂; P₃; ...; P_n, respectivamente, então, por definição:

$$\begin{array}{l} P_1 \cdot x + P_2 \cdot x + P_3 \cdot x + ... + P_n \cdot x = \\ = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + ... + P_n \cdot x_n \\ (P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n) \cdot x = \\ = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + ... + P_n \cdot x_n \end{array} \text{ e, portanto,}$$

$$x = \frac{P_1 x_1; P_2 x_2; P_3 x_3; ... P_n x_n}{P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n}$$

Observe que se $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = 1$, então: $x = \frac{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n}{n}$ que é a média aritmética simples.

A média aritmética ponderada dos n elementos do conjunto numérico A é a soma dos produtos de cada elemento multiplicado pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos.

Exemplo

Calcular a média aritmética ponderada dos números 35, 20 e 10 com pesos 2, 3, e 5, respectivamente.

Resolução

Se x for a média aritmética ponderada, então:

$$x = \frac{2.35 + 3.20 + 5.10}{2 + 3 + 5} \iff x = \frac{70 + 60 + 50}{10} \iff x = \frac{180}{10} \iff x = 18$$

A média aritmética ponderada é 18.

Observação: A palavra média, sem especificar se é aritmética, deve ser entendida como média aritmética.

Exercícios

- 1. Determine a média aritmética entre 2 e 8.
- 2. Determine a média aritmética entre 3, 5 e 10.
- 3. Qual é a média aritmética simples dos números 11, 7, 13 e 9?
- 4. A média aritmética simples de 4 números pares distintos, pertences ao conjunto dos números inteiros não nulos é igual a 44. Qual é o maior valor que um desses números pode ter?

- 5. Calcule a média aritmética simples em cada um dos seguintes casos:
 - a) 15; 48; 36
 - b) 80; 71; 95; 100
 - c) 59; 84; 37; 62; 10
 - d) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
- 6. Qual é a média aritmética ponderada dos números 10, 14, 18 e 30 sabendo-se que os seus pesos são respectivamente 1, 2, 3 e 5?
- 7. Calcular a média ponderada entre 3, 6 e 8 para os respectivos pesos 5, 3 e 2.
- 8. Numa turma de 8ª série 10 alunos possuem 14 anos, 12 alunos possuem 15 anos e oito deles 16 anos de idade. Qual será a idade média dessa turma?
- 9. Determine a média salarial de uma empresa, cuja folha de pagamento é assim discriminada:

Profissionais	\rightarrow	Quantidade	\rightarrow	Salário	
Serventes	\rightarrow	20 profissionais	\rightarrow	R\$ 320,00	
Técnicos	\rightarrow	10 profissionais	\rightarrow	R\$ 840,00	
Engenheiros	\rightarrow	5 profissionais	\rightarrow	R\$ 1.600,00	

10. Calcule a média ponderada entre 5, 10 e 15 para os respectivos pesos 10, 5 e 20.

Respostas

1) Resposta "5". Solução:

M.A.
$$(2 e 8) = 2 + 8 / 2 = 10 / 2 = 5 \rightarrow M.A. (2 e 8)$$

= 5.

2) Resposta "6".

Solução:

M.A.
$$(3, 5 e 10) = 3 + 5 + 10 / 3 = 18 / 3 = 6 \rightarrow M.A. (3, 5 e 10) = 6.$$

3) Resposta "10".

Solução: Para resolver esse exercício basta fazer a soma dos números e dividi-los por quatro, que é a quantidade de números, portanto:

$$MA = \frac{11+7+13+9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Logo, a média aritmética é 10.

4) Resposta "164".

Solução: Quando falamos de média aritmética simples, ao diminuirmos um dos valores que a compõe, precisamos aumentar a mesma quantidade em outro valor, ou distribuí -la entre vários outros valores, de sorte que a soma total não se altere, se quisermos obter a mesma média.



Neste exercício, três dos elementos devem ter o menor valor possível, de sorte que o quarto elemento tenha o maior valor dentre eles, tal que a média aritmética seja igual a 44. Este será o maior valor que o quarto elemento poderá assumir.

Em função do enunciado, os três menores valores inteiros, pares, distintos e não nulos são:2, 4 e 6. Identificando como x este quarto valor, vamos montar a seguinte equação:

$$\frac{2+4+6+x}{4} = 44$$

Solucionando-a temos:

Logo, o maior valor que um desses números pode ter é 164.

6) Resposta "22".

45/9 = = 5

Solução: Neste caso a solução consiste em multiplicarmos cada número pelo seu respectivo peso e somarmos todos estes produtos. Este total deve ser então dividido pela soma total dos pesos:

$$\frac{10.1 + 14.2 + 18.3 + 30.5}{1 + 2 + 3 + 5} = \frac{10 + 28 + 54 + 150}{11} = \frac{242}{11} = 22$$

Logo, a média aritmética ponderada é 22.

7) Resposta "4,9". Solução:

$$MP = \frac{3.5 + 6.3 + 8.2}{5 + 3 + 2} = \frac{15 + 18 + 16}{10} = \frac{49}{10} = 4,9$$

8) Resposta "±14,93 " Solução:

$$MP = \frac{14.10 + 15.12 + 16.8}{10 + 12 + 8} = \frac{140 + 180 + 128}{30} = \frac{448}{30} = \pm 14,93$$

9) Resposta "≅ *R*\$651,43 "

Solução: Estamos diante de um problema de média aritmética ponderada, onde as quantidades de profissionais serão os pesos. E com isso calcularemos a média ponderada entre R\$ 320,00 , R\$ 840,00 e R\$ 1 600,00 e seus respectivos pesos 20 , 10 e 5. Portanto:

$$MP = \frac{320.20 + 840.10 + 1600.5}{20 + 10 + 5} = \frac{22.800}{35} \cong R\$651,43$$

10) Resposta "11,42". Solução:

$$MP = \frac{5.10 + 10.5 + 15.20}{10 + 5 + 20} = \frac{50 + 50 + 300}{35} = \frac{400}{35} = 11,42$$

Média Geométrica

Este tipo de média é calculado multiplicando-se todos os valores e extraindo-se a raiz de índice n deste produto.

Digamos que tenhamos os números 4, 6 e 9, para obtermos o valor médio geométrico deste conjunto, multiplicamos os elementos e obtemos o produto 216.

Pegamos então este produto e extraímos a sua raiz cúbica, chegando ao valor médio 6.

Extraímos a raiz cúbica, pois o conjunto é composto de 3 elementos. Se fossem n elementos, extrairíamos a raiz de índice n.

Neste exemplo teríamos a seguinte solução:

$$\sqrt[3]{4.6.9} \Rightarrow \sqrt[3]{216} \Rightarrow 6$$

Utilidades da Média Geométrica

Progressão Geométrica

Uma das utilizações deste tipo de média é na definição de uma progressão geométrica que diz que em toda PG., qualquer termo é média geométrica entre o seu antecedente e o seu consequente:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$$

Tomemos como exemplo três termos consecutivos de uma PG.: 7, 21 e 63.

Temos então que o termo 21 é média geométrica dos termos 7 e 63.

Vejamos:

$$\sqrt{7.63} \Rightarrow \sqrt{441} \Rightarrow 21$$

Variações Percentuais em Sequência

Outra utilização para este tipo de média é quando estamos trabalhando com variações percentuais em sequência.

Exemplo

Digamos que uma categoria de operários tenha um aumento salarial de 20% após um mês, 12% após dois meses e 7% após três meses. Qual o percentual médio mensal de aumento desta categoria?

Sabemos que para acumularmos um aumento de 20%, 12% e 7% sobre o valor de um salário, devemos multiplicá-lo sucessivamente por **1**,2, 1,12 e 1,07 que são os fatores correspondentes a tais percentuais.



A partir dai podemos calcular a média geométrica destes fatores:

$$\sqrt[3]{1,2.1,12.1,07} \Rightarrow \sqrt[3]{1,43808} \Rightarrow 1,128741$$

Como sabemos, um fator de 1, 128741 corresponde a 12, 8741% de aumento.

Este é o valor percentual médio mensal do aumento salarial, ou seja, se aplicarmos três vezes consecutivas o percentual 12, 8741%, no final teremos o mesmo resultado que se tivéssemos aplicado os percentuais 20%, 12% e 7%.

Digamos que o salário desta categoria de operários seja de R\$ 1.000,00, aplicando-se os sucessivos aumentos temos:

Salário Inicial	+ % Informado	Salário final	Salário inicial	+ % médio	Salário final
R\$ 1.000,00	20%	R\$ 1.200,00	R\$ 1.000,00	12, 8417	R\$ 1.128,74
R\$ 1.200,00	12%	R\$ 1.334,00	R\$ 1.287,74	12, 8417	R\$ 1.274,06
R\$ 1.334,00	7%	R\$ 1.438,00	R\$ 1.274,06	12, 8417	R\$ 1.438,08

Observe que o resultado final de R\$ 1.438,08 é o mesmo nos dois casos. Se tivéssemos utilizado a média aritmética no lugar da média geométrica, os valores finais seriam distintos, pois a média aritmética de 13% resultaria em um salário final de R\$ 1.442,90, ligeiramente maior como já era esperado, já que o percentual de 13% utilizado é ligeiramente maior que os 12, 8417% da média geométrica.

Cálculo da Média Geométrica

Em uma fórmula: a média geométrica de
$$a_1$$
, a_2 , ..., a_n é
$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} = (a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

A média geométrica de um conjunto de números é sempre menor ou igual à média aritmética dos membros desse conjunto (as duas médias são iguais se e somente se todos os membros do conjunto são iguais). Isso permite a definição da média aritmética geométrica, uma mistura das duas que sempre tem um valor intermediário às duas.

A média geométrica é também a média aritmética harmônica no sentido que, se duas sequências (a_n) e (h_n) são

$$a_{n+1} = \frac{a_n + h_n}{2}, a1 = \frac{x + y}{2}$$

$$h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{h_n}}, h_1 = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

então a_n e h_n convergem para a média geométrica de x e y.

Cálculo da Media Geométrica Triangular

Bom primeiro observamos o mapa e somamos as áreas dos quadrados catetos e dividimos pela hipotenusa e no final pegamos a soma dos ângulos subtraindo o que esta entre os catetos e dividimos por PI(3,1415...) assim descobrimos a media geométrica dos triângulos.

Exemplo

A média geométrica entre os números 12, 64, 126 e 345, é dada por:

$$G = R^{4}[12 \times 64 \times 126 \times 345] = 76,013$$

Aplicação Prática

Dentre todos os retângulos com a área igual a 64 cm², qual é o retângulo cujo perímetro é o menor possível, isto é, o mais econômico? A resposta a este tipo de questão é dada pela média geométrica entre as medidas do comprimento a e da largura b, uma vez que a.b = 64.

A média geométrica G entre a e b fornece a medida desejada.

$$G = R[a \times b] = R[64] = 8$$

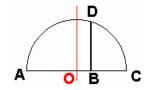
Resposta

É o retângulo cujo comprimento mede 8 cm e é lógico que a altura também mede 8 cm, logo só pode ser um quadrado! O perímetro neste caso é p = 32 cm. Em qualquer outra situação em que as medidas dos comprimentos forem diferentes das alturas, teremos perímetros maiores do que 32 cm.

Interpretação gráfica

A média geométrica entre dois segmentos de reta pode ser obtida geometricamente de uma forma bastante simples.

Sejam AB e BC segmentos de reta. Trace um segmento de reta que contenha a junção dos segmentos AB e BC, de forma que eles formem segmentos consecutivos sobre a mesma reta.



Dessa junção aparecerá um novo segmento AC. Obtenha o ponto médio O deste segmento e com um compasso centrado em O e raio OA, trace uma semicircunferência começando em A e terminando em C. O segmento vertical traçado para cima a partir de B encontrará o ponto D na semi-circunferência. A medida do segmento BD corresponde à média geométrica das medidas dos segmentos AB e BC.



Exercícios

- 1. Determine a média proporcional ou geométrica entre 2 e 8.
 - 2. Determine a média geométrica entre 1, 2 e 4.
- 3. Determine a média geométrica entre dois números sabendo que a média aritmética e a média harmônica entre eles são, respectivamente, iguais a 4 e 9.
- 4. A média geométrica entre 3 números é 4. Quanto devo multiplicar um desses números para que a média aumente 2 unidades ?
- 5. Qual é a média geométrica dos números 2, 4, 8, 16 e 32?
- 6. Dados dois números quaisquer, a média aritmética simples e a média geométrica deles são respectivamente 20 e 20,5. Quais são estes dois números?
- 7. A média geométrica entre dois números é igual a 6. Se a eles juntarmos o número 48, qual será a média geométrica entre estes três números?
 - 8. Calcule a média geométrica entre 4 e 9.
 - 9. Calcule a média geométrica entre 3, 3, 9 e 81
 - 10. Calcule a média geométrica entre 1, 1, 1, 32 e 234.

Respostas

1) Resposta "4". Solução:

$$M.G.(2e8) = \sqrt[2]{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow M.G.(2e8) = 4$$

2) Resposta "2". Solução:

$$M.G.(1,2e4) = \sqrt[3]{1 \times 2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow M.G.(1,2e4) = 2$$

Observação: O termo média proporcional deve ser, apenas, utilizado para a média geométrica entre dois números.

3) Resposta "6".

Solução: Aplicando a relação: $g^2 = a.h$, teremos:

$$g^2 = 4.9 \rightarrow g^2 = 36 \rightarrow g = 6 \rightarrow MG. (4, 9) = 6.$$

4) Resposta "
$$\frac{27}{8}$$
"

Solução: Se a média geométrica entre 3 números é 4, podemos escrever:

$$M.G. = \sqrt[3]{x.y.z} \Rightarrow 4 = \sqrt[3]{x.y.z} \Rightarrow x.y.z = 64$$

Se multiplicarmos um deles por *m*, a nova média será:

$$4 + 2 = \sqrt[3]{x.y.z.m} \Rightarrow 6 = \sqrt[3]{x.y.z.m} \Rightarrow x.y.z.m = 216$$

e como x . y . z = 64 \to 64 . m = 216 \to m = $\frac{216}{64} = \frac{27}{8}$

5) Resposta "8".

Solução: Se dispusermos de uma calculadora científica, este exercício pode ser solucionado multiplicando-se todos os números e extraindo-se do produto final, a raiz de índice cinco, pois se tratam de cinco números:

$$\sqrt[5]{2.4.8.16.32} \Rightarrow \sqrt[5]{32768} \Rightarrow 8$$

Se não dispusermos de uma calculadora científica esta solução ficaria meio inviável, pois como iríamos extrair tal raiz, isto sem contar na dificuldade em realizarmos as multiplicações?

Repare que todos os números são potência de 2, podemos então escrever:

$$\sqrt[5]{2.4.8.16.32} \Rightarrow \sqrt[5]{2.2^2.2^3.2^4.2^5}$$

Como dentro do radical temos um produto de potências de mesma base, somando-se os expoentes temos:

$$\sqrt[5]{2.2^2.2^3.2^4.2^5} \Rightarrow \sqrt[5]{2^{15}}$$

Finalmente dividindo-se o índice e o expoente por 5 e resolvendo a potência resultante:

$$\sqrt[5]{2^{15}} \Rightarrow \sqrt[1]{2^3} \Rightarrow 2^3 \Rightarrow 8$$

Logo, a média geométrica deste conjunto é 8.

6) Resposta "16, 25".

Solução: Chamemos de *a* e *b* estes dois números. A média aritmética deles pode ser expressa como:

$$\frac{a+b}{2} = 20,5$$

Já média geométrica pode ser expressa como:

$$\sqrt{ah} = 20$$

Vamos isolar a na primeira equação:

$$\frac{a+b}{2} = 20,5 \Rightarrow a+b = 20,5.2 \Rightarrow a = 41-b$$

Agora para que possamos solucionar a segunda equação, é necessário que fiquemos com apenas uma variável na mesma. Para conseguirmos isto iremos substituir *a* por 41 - b:

$$\sqrt{ab} = 20 \Rightarrow \sqrt{(41-b)b} = 20 \Rightarrow (\sqrt{41b-b^2})^2 = 20^2$$

 $\Rightarrow 41b-b^2 = 400 \Rightarrow -b^2 + 41b - 400 = 0$

Note que acabamos obtendo uma equação do segundo grau:



$$-b^2 + 41b - 400 = 0$$

Solucionando a mesma temos:

$$-b^{2} + 41b - 400 = 0 \Rightarrow b = \frac{-41 \pm \sqrt{41^{2} - 4.(-1).(-400)}}{2.(-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{-41 + \sqrt{81}}{-2} \Rightarrow b_1 = \frac{-41 + 9}{-2} \Rightarrow b_1 = \frac{-32}{-2} \Rightarrow b_1 = 16 \\ b_2 = \frac{-41 - \sqrt{81}}{-2} \Rightarrow b_2 = \frac{-41 + 9}{-2} \Rightarrow b_2 = \frac{-50}{-2} \Rightarrow b_2 = 25 \end{cases}$$

O número b pode assumir, portanto os valores 16 e 25. É de se esperar, portanto que quando b for igual a 16, que a seja igual a 25 e quando b for igual a 25, que a seja igual a 16. Vamos conferir.

Sabemos que a = 41 - b, portanto atribuindo a b um de seus possíveis valores, iremos encontrar o valor de a.

Para b = 16 temos:

$$a = 41 - b \Rightarrow 41 - 16 \Rightarrow a = 25$$

Para b = 25 temos:

$$a = 41 - b \Rightarrow a = 41 - 25 \Rightarrow a = 16$$

Logo, os dois números são 16, 25.

7) Resposta "12".

Solução: Se chamarmos de *P* o produto destes dois números, a partir do que foi dito no enunciado podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt{P} = 6$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, iremos obter o valor numérico do produto destes dois números:

$$\sqrt{P} = 6 \Rightarrow (\sqrt{P})^2 = 6^2 \Rightarrow P = 36$$

Agora que sabemos que o produto de um número pelo outro é igual 36, resta-nos multiplicá-lo por 48 e extraímos a raiz cúbica deste novo produto para encontrarmos a média desejada:

$$M = \sqrt[3]{36.48} \Rightarrow M = \sqrt[3]{(2^2.3^2).(2^4.3)} \Rightarrow M = \sqrt[3]{2^6.3^3}$$

 $\Rightarrow M = 2^2.3 \Rightarrow M = 4.3 \Rightarrow M = 12$

Note que para facilitar a extração da raiz cúbica, realizamos a decomposição dos números 36 e 48 em fatores primos. Acesse a página decomposição de um número natural em fatores primos para maiores informações sobre este assunto.

Logo, ao juntarmos o número 48 aos dois números iniciais, a média geométrica passará a ser 12.

8) Resposta "6". Solução:
$$G = \sqrt[2]{4.9} = 6$$

9) Resposta "9". Solução:
$$G = \sqrt[4]{3.3.9.81} = 9$$

Mediana: é o valor que tem tantos dados antes dele, como depois dele. Para se medir a mediana, os valores devem estar por ordem crescente ou decrescente. No caso do número de dados ser ímpar, existe um e só um valor central que é a mediana. Se o número de dados é par, toma-se a média aritmética dos dois valores centrais para a mediana.

É uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, definida do seguinte modo: Ordenados os elementos da amostra, a mediana é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Para a sua determinação utiliza-se a seguinte regra, depois de ordenada a amostra de n elementos: Se n é ímpar, a mediana é o elemento médio. Se n é par, a mediana é a semi-soma dos dois elementos médios.

A mediana, **m**, é uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, definida do seguinte modo:

Ordenados os elementos da amostra, a mediana é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Para a sua determinação utiliza-se a seguinte regra, depois de ordenada a amostra de n elementos:

- Se n é ímpar, a mediana é o elemento médio.
- Se n é par, a mediana é a semi-soma dos dois elementos médios.

Se se representarem os elementos da amostra ordenada com a seguinte notação: $\mathbf{X}_{1:n}$, $\mathbf{X}_{2:n}$, ..., $\mathbf{X}_{n:n}$, então uma expressão para o cálculo da mediana será:

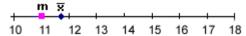
$$\mathbf{m} = \begin{cases} \mathbf{x}_{\frac{\mathbf{n}+\mathbf{l}}{2}:\mathbf{n}} & \text{se n \'e impar} \\ \\ \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{\frac{\mathbf{n}}{2}:\mathbf{n}} + \mathbf{x}_{\frac{\mathbf{n}}{2}+\mathbf{l}:\mathbf{n}} \right) & \text{se n \'e par} \end{cases}$$

Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados. Consideremos o seguinte exemplo: um aluno do 10° ano obteve as seguintes notas: 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12. A média e a mediana da amostra anterior são respectivamente.





Admitamos que uma das notas de 10 foi substituída por uma de 18. Neste caso a mediana continuaria a ser igual a 11, enquanto que a média subiria para 11.75.



Média e Mediana: Se se representarmos os elementos da amostra ordenada com a seguinte notação: X1:n, X2:n, ..., Xn: "n" então uma expressão para o cálculo da mediana será:

Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados.

- Quando a distribuição é simétrica, a média e a mediana coincidem.
- A mediana não é tão sensível, como a média, às observações que são muito maiores ou muito menores do que as restantes (outliers). Por outro lado a média reflete o valor de todas as observações.

A média ao contrário da mediana, é uma medida muito influenciada por valores "muito grandes" ou "muito pequenos", mesmo que estes valores surjam em pequeno número na amostra. Estes valores são os responsáveis pela má utilização da média em muitas situações em que teria mais significado utilizar a mediana.

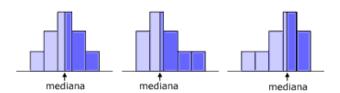
A partir do exposto, deduzimos que se a distribuição dos dados:

- for aproximadamente simétrica, a média aproxima-se da mediana.
- for enviesada para a direita (alguns valores grandes como "outliers"), a média tende a ser maior que a mediana.
- for enviesada para a esquerda (alguns valores pequenos como "outliers"), a média tende a ser inferior à mediana.



a mediana do peso destes atletas é 75kg, mas o peso médio é de 105kg!

Dado um histograma é fácil obter a posição da mediana, pois esta está na posição em que passando uma linha vertical por esse ponto o histograma fica dividido em duas partes com áreas iguais.



Como medida de localização, a mediana é mais resistente do que a média, pois não é tão sensível aos dados.

- Quando a distribuição é simétrica, a média e a mediana coincidem.
- A mediana não é tão sensível, como a média, às observações que são muito maiores ou muito menores do que as restantes (outliers). Por outro lado a média reflete o valor de todas as observações.

Assim, não se pode dizer em termos absolutos qual destas medidas de localização é preferível, dependendo do contexto em que estão a ser utilizadas.

Exemplo: Os salários dos 160 empregados de uma determinada empresa, distribuem-se de acordo com a sequinte tabela de frequências:

Salário (em euros)	75	100	145	200	400	1700
Frequência absoluta	23	58	50	20	7	2
Frequência acumulada	23	81	131	151	158	160

Calcular a média e a mediana e comentar os resultados obtidos.

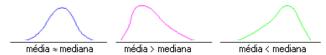
Resolução: $\overline{\mathbf{x}}$ = = (75.23+100.58+...+400.7+1700.2)/16 0 = 156,10

Resolução: euros. $\mathbf{m}=$ semi-soma dos elementos de ordem 80 e 81 = 100 euros.

Comentário: O fato de termos obtido uma média de 156,10 e uma mediana de 100, é reflexo do fato de existirem alguns, embora poucos, salários muito altos, relativamente aos restantes. Repare-se que, numa perspectiva social, a mediana é uma característica mais importante do que a média. Na realidade 50% dos trabalhadores têm salário menor ou igual a 100 €, embora a média de 156,10 € não transmita essa ideia.

Vejamos de uma outra forma: Sabes, quando a distribuição dos dados é simétrica ou aproximadamente simétrica, as medidas de localização do centro da amostra (média e mediana) coincidem ou são muito semelhantes. O mesmo não se passa quando a distribuição dos dados é assimétrica, fato que se prende com a pouca resistência da média.

Representando as distribuições dos dados (esta observação é válida para as representações gráficas na forma de diagramas de barras ou de histograma) na forma de uma mancha, temos, de um modo geral:

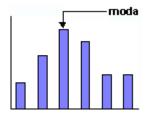


Moda: é o valor que ocorre mais vezes numa distribuição, ou seja, é o de maior efetivo e, portanto, de maior frequência. Define-se moda como sendo: o valor que surge com mais frequência se os dados são discretos, ou, o intervalo de classe com maior frequência se os dados são contínuos. Assim, da representação gráfica dos dados, obtém-se imediatamente o valor que representa a moda ou

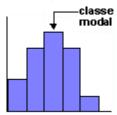


a classe modal. Esta medida é especialmente útil para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos, apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana.

Para um conjunto de dados, define-se moda como sendo: o valor que surge com mais frequência *se os dados são discretos, ou,* o intervalo de classe com maior frequência se os dados são contínuos. Assim, da representação gráfica dos dados, obtém-se imediatamente o valor que representa a moda ou a classe modal.



Esta medida é especialmente útil para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos, apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana (se não forem susceptíveis de ordenação).



Quartis: Generalizando a noção de mediana \mathbf{m} , que como vimos anteriormente é a medida de localização, tal que 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais a \mathbf{m} , e os outros 50% são maiores ou iguais a \mathbf{m} , temos a noção de quartil de ordem \mathbf{p} , com $0 < \mathbf{p} < 1$, como sendo o valor $\mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$ tal que 100p% dos elementos da amostra são menores ou iguais a $\mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$ e os restantes 100 (1-p)% dos elementos da amostra são maiores ou iguais a $\mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$.

Tal como a mediana, é uma medida que se calcula a partir da amostra ordenada. Um processo de obter os quartis é utilizando a *Função Distribuição Empírica*.

Generalizando ainda a expressão para o cálculo da mediana, temos uma expressão análoga para o cálculo dos quartis:

$$Q_p = \begin{cases} X[\mathbf{n} \, \mathbf{p}] + \mathbf{1} : \mathbf{n} & \text{se np n\u00e30 \u00e9 inteiro} \\ \\ \frac{1}{2} [X_{\mathbf{n} \, \mathbf{p} : \mathbf{n}} + X_{\mathbf{n} \, \mathbf{p} + \mathbf{1} : \mathbf{n}}] & \text{se np inteiro} \end{cases}$$

onde representamos por [a], o maior inteiro contido em a.

Aos quartis de ordem 1/4 e 3/4, damos respectivamente o nome de 1° quartil e 3° quartil. Exemplo: Tendo-se decidido registrar os pesos dos alunos de uma determinada turma prática do 10° ano, obtiveram-se os seguintes valores (em kg):

	52	56	62	54	52	51	60	61	56	55	56	54	57	67	61	49
ı																

- a) Determine os quantis de ordem 1/7, 1/2 e os 1° e 3° quartis.
- b) Um aluno com o peso de 61 kg, pode ser considerado "normal", isto é nem demasiado magro, nem demasiado gordo?

Resolução: Ordenando a amostra anterior, cuja dimensão é 16, temos:

49 51 52 52 54 54 55 56 56 56 57 60 61 61 62 67

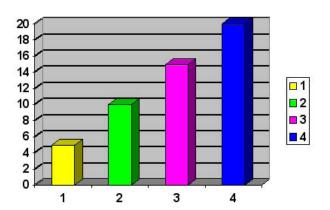
a) 1	6 . 1	L/7 :	= 16	5/7,	onc	le [1	6/7] = 2	2 e (Q _{1/7}	= x	3 · 16	= 52	2
1	6.1	L/4 :	= 4,	one	de 🕻) _{1/2} :	= [x,	2 - 16	+ X ₀	. 16]/	′2 =	56		
1	6.1	1/2 :	= 8,	one	de C) _{1/4} :	= [x	1.16	+ x _	.16]/	′2 =	53		
1	6.3	3/4	= 12	2, or	nde	$\mathbf{Q}_{3/4}$	= [+. 10 Х _{12.1}	+ عا	X _{12.}	16]/2	2 = (60.5	
		-				-5/4		12.1	LO	15.	TO			

b) Um aluno com 61 kg pode ser considerado um pouco "forte", pois naquela turma só 25% dos alunos é que têm peso maior ou igual a 60.5 kg.

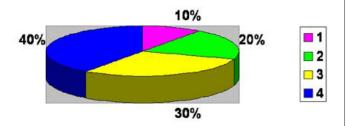
Escalas - Tabelas - Gráficos

Tipos de gráficos: Os dados podem então ser representados de várias formas:

Diagramas de Barras

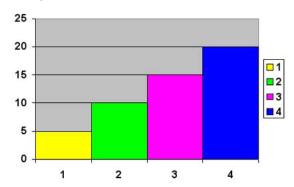


Diagramas Circulares





Histogramas



Pictogramas



Tabela de Frequências: Como o nome indica, conterá os valores da variável e suas respectivas contagens, as quais são denominadas *frequências absolutas* ou simplesmente, *frequências*. No caso de variáveis qualitativas ou quantitativas discretas, a tabela de freqüência consiste em listar os valores possíveis da variável, numéricos ou não, e fazer a contagem na tabela de dados brutos do número de suas ocorrências. A frequência do valor i será representada por ni, a frequência total por n e a *freqüência relativa* por fi = ni/n.

Para variáveis cujos valores possuem ordenação natural (qualitativas ordinais e quantitativas em geral), faz sentido incluirmos também uma coluna contendo as *frequências acumuladas f ac*, obtidas pela soma das frequências de todos os valores da variável, menores ou iguais ao valor considerado.

No caso das variáveis quantitativas contínuas, que podem assumir infinitos valores diferentes, é inviável construir a tabela de frequência nos mesmos moldes do caso anterior, pois obteríamos praticamente os valores originais da tabela de dados brutos. Para resolver este problema, determinamos classes ou faixas de valores e contamos o número de ocorrências em cada faixa. Por ex., no caso da variável peso de adultos, poderíamos adotar as seguintes faixas: 30 |— 40 kg, 40 |— 50 kg, 50 |— 60, 60 |— 70, e assim por diante. Apesar de não adotarmos nenhuma regra formal para estabelecer as faixas, procuraremos utilizar, em geral, de 5 a 8 faixas com mesma amplitude.

Eventualmente, faixas de tamanho desigual podem ser convenientes para representar valores nas extremidades da tabela. Exemplo:

Número e Proporção (%) de Óbitos, segundo regiões. Brasil, 1996 e 1999.

Região	n	%		
Norte	16117	4,93		
Nordeste	69811	21,37		
Sudeste	170050	52,05		
Sul	48921	14,97		
Centro-Oeste	21830	6,68		
BRASIL	326729	100,00		

Gráfico de Barras: Para construir um *gráfico de barras*, representamos os valores da variável no eixo das abscissas e suas as frequências ou porcentagens no eixo das ordenadas. Para cada valor da variável desenhamos uma barra com altura correspondendo à sua freqüência ou porcentagem. Este tipo de gráfico é interessante para as variáveis qualitativas ordinais ou quantitativas discretas, pois permite investigar a presença de tendência nos dados. Exemplo:

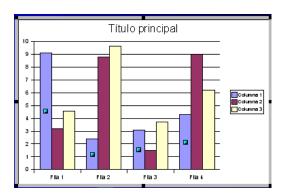
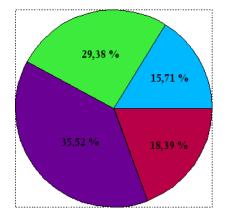


Diagrama Circular: Para construir um *diagrama circular* ou gráfico de *pizza*, repartimos um disco em setores circulares correspondentes às porcentagens de cada valor (calculadas multiplicando-se a frequência relativa por 100). Este tipo de gráfico adapta-se muito bem para as variáveis qualitativas nominais. Exemplo:





Histograma: O *histograma* consiste em retângulos contíguos com base nas faixas de valores da variável e com área igual à frequência relativa da respectiva faixa. Desta forma, a altura de cada retângulo é denominada densidade de frequência ou simplesmente densidade definida pelo quociente da área pela amplitude da faixa. Alguns autores utilizam a frequência absoluta ou a porcentagem na construção do histograma, o que pode ocasionar distorções (e, consequentemente, más interpretações) quando amplitudes diferentes são utilizadas nas faixas. Exemplo:

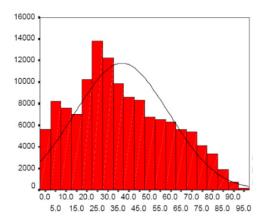


Gráfico de Linha ou Sequência: Adequados para apresentar observações medidas ao longo do tempo, enfatizando sua tendência ou periodicidade. Exemplo:



Polígono de Frequência:

Semelhante ao histograma, mas construído a partir dos pontos médios das classes. Exemplo:

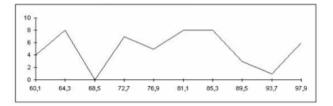
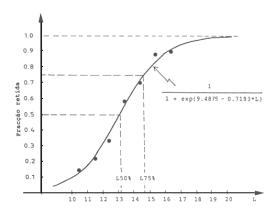


Gráfico de Ogiva:

Apresenta uma distribuição de frequências acumuladas, utiliza uma poligonal ascendente utilizando os pontos extremos.



Probabilidade

Ponto Amostral, Espaço Amostral e Evento

Em uma tentativa com um número limitado de resultados, todos com chances iguais, devemos considerar:

Ponto Amostral: Corresponde a qualquer um dos resultados possíveis.

Espaço Amostral: Corresponde ao conjunto dos resultados possíveis; será representado por S e o número de elementos do espaço amostra por n(S).

Evento: Corresponde a qualquer subconjunto do espaço amostral; será representado por A e o número de elementos do evento por n(A).

Os conjuntos S e Ø também são subconjuntos de S, portanto são eventos.

 \emptyset = evento impossível.

S = evento certo.

Conceito de Probabilidade

As probabilidades têm a função de mostrar a chance de ocorrência de um evento. A probabilidade de ocorrer um determinado evento A, que é simbolizada por P(A), de um espaço amostral S $\neq \emptyset$, é dada pelo quociente entre o número de elementos A e o número de elemento S. Representando:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(S)}$$

Exemplo: Ao lançar um dado de seis lados, numerados de 1 a 6, e observar o lado virado para cima, temos:

- um espaço amostral, que seria o conjunto S {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- um evento número par, que seria o conjunto A1 = {2, 4, 6} C S.

- o número de elementos do evento número par é $n(A_1) = 3$.



- a probabilidade do evento número par é 1/2, pois

$$P(A) = \frac{n(A_1)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriedades de um Espaço Amostral Finito e Não Vazio

- Em um evento impossível a probabilidade é igual a zero. Em um evento certo S a probabilidade é igual a 1. Simbolicamente: $P(\emptyset) = 0$ e P(S) = 1.
- Se A for um evento qualquer de S, neste caso: $0 \le P(A) \le 1$.
- Se A for o complemento de A em S, neste caso: P(A) = 1 P(A).

Demonstração das Propriedades

Considerando S como um espaço finito e não vazio, temos:

$$\begin{cases} n(\emptyset) = 0 \to P(\emptyset) = \frac{0}{n(S)} \to P(\emptyset) = 0 \\ P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} \to P(S) = 1 \end{cases}$$

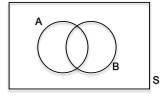
$$\begin{cases} \emptyset \in A \in A \iff n(\emptyset) \le n(A) \le n(S) \iff \\ \frac{n(\emptyset)}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \iff 0 \le P(A) \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = S \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \leftrightarrow n(A) + n(\overline{A}) = n(S) \leftrightarrow \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$$

União de Eventos

Considere A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, temos:

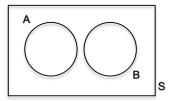


$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Logo:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

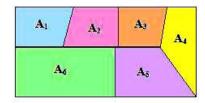


Considerando que A \cap B, nesse caso A e B serão denominados mutuamente exclusivos. Observe que A \cap B = 0, portanto: P(A U B) = P(A) + P(B). Quando os eventos A₁, A₂, A₃, ..., A_n de S forem, de dois em dois, sempre mutuamente exclusivos, nesse caso temos, analogicamente:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$$

Eventos Exaustivos

Quando os eventos A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n de S forem, de dois em dois, mutuamente exclusivos, estes serão denominados exaustivos se A_1 U A_2 U A_3 U ... U A_n = S



Então, logo:

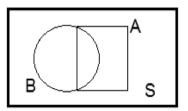
$$\begin{cases} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) = P(S) = 1 \end{cases}$$

Portanto:
$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$$

Probabilidade Condicionada

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. A probabilidade de B condicionada a A é dada pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que já ocorreu A. É representada por P(B/A).

Veja:
$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$





Eventos Independentes

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. Estes serão independentes somente quando:

$$P(A/N) = P(A)$$
 $P(B/A) = P(B)$

Intersecção de Eventos

Considerando A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, logo:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(A) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(B) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Assim sendo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

 $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

Considerando A e B como eventos independentes, logo P(B/A) = P(B), P(A/B) = P(A), sendo assim: $P(A \cap B) = P(A)$. P(B). Para saber se os eventos A e B são independentes, podemos utilizar a definição ou calcular a probabilidade de $A \cap B$. Veja a representação:

A e B independentes
$$\leftrightarrow$$
 P(A/B) = P(A) ou
A e B independentes \leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) . P(B)

Lei Binominal de Probabilidade

Considere uma experiência sendo realizada diversas vezes, dentro das mesmas condições, de maneira que os resultados de cada experiência sejam independentes. Sendo que, em cada tentativa ocorre, obrigatoriamente, um evento A cuja probabilidade é p ou o complemento A cuja probabilidade é 1 – p.

Problema: Realizando-se a experiência descrita exatamente n vezes, qual é a probabilidade de ocorrer o evento A só k vezes?

Resolução:

- Se num total de n experiências, ocorrer somente k vezes o evento A, nesse caso será necessário ocorrer exatamente n-k vezes o evento A.
- Se a probabilidade de ocorrer o evento A é p e do evento A é 1-p, nesse caso a probabilidade de ocorrer k vezes o evento A e n-k vezes o evento A, ordenadamente, é:

$$\underbrace{p.p.p....p}_{k \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(1-p).(1-p).....(1-p)}_{(n-k) \text{ fatores}}$$
$$= p^{k}.(1-p)^{n-k}$$

- As k vezes em que ocorre o evento A são quaisquer entre as n vezes possíveis. O número de maneiras de escolher k vezes o evento A é, portanto $C_{n\,k}$.

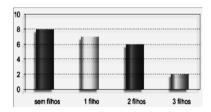
- Sendo assim, há $C_{n,k}$ eventos distintos, mas que possuem a mesma probabilidade $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, e portanto a probabilidade desejada é: $C_{n,k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

QUESTÕES

01. A probabilidade de uma bola branca aparecer ao se retirar uma única bola de uma urna que contém, exatamente, 4 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis é:

(A)
$$\frac{1}{3}$$
 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{8}$

02. As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é



(A)
$$\frac{1}{3}$$
 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{7}{23}$ (E) $\frac{7}{25}$

- 03. Retirando uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual a probabilidade de se obter um rei ou uma dama?
- 04. Jogam-se dois dados "honestos" de seis faces, numeradas de 1 a 6, e lê-se o número de cada uma das duas faces voltadas para cima. Calcular a probabilidade de serem obtidos dois números ímpares ou dois números iguais?
- 05. Uma urna contém 500 bolas, numeradas de 1 a 500. Uma bola dessa urna é escolhida ao acaso. A probabilidade de que seja escolhida uma bola com um número de três algarismos ou múltiplo de 10 é
 - (A) 10%
 - (B) 12%
 - (C) 64%
 - (D) 82%
 - (E) 86%
- 06. Uma urna contém 4 bolas amarelas, 2 brancas e 3 bolas vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ela ser amarela ou branca?
- 07. Duas pessoas A e B atiram num alvo com probabilidade 40% e 30%, respectivamente, de acertar. Nestas condições, a probabilidade de apenas uma delas acertar o alvo é:



(A) 42%

(B) 45%

(C) 46%

(D) 48%

(E) 50%

08. Num espaço amostral, dois eventos independentes A e B são tais que $P(A \cup B) = 0.8 e P(A) = 0.3$. Podemos concluir que o valor de P(B) é:

(A) 0,5

(B) 5/7

(C) 0,6

(D) 7/15

(E) 0,7

09. Uma urna contém 6 bolas: duas brancas e quatro pretas. Retiram-se quatro bolas, sempre com reposição de cada bola antes de retirar a seguinte. A probabilidade de só a primeira e a terceira serem brancas é:

(A)
$$\frac{1}{81}$$
 (B) $\frac{16}{81}$ (C) $\frac{4}{81}$ (D) $\frac{24}{81}$ (E) $\frac{2}{81}$

Respostas

01.
$$P(branca) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

02

A partir da distribuição apresentada no gráfico:

08 mulheres sem filhos.

07 mulheres com 1 filho.

06 mulheres com 2 filhos.

02 mulheres com 3 filhos.

Comoas 23 mulheres têm um total de 25 filhos, a probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é igual a P = 7/25.

03. P(dama ou rei) = P(dama) + P(rei) =

$$\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

04. No lançamento de dois dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, são 36 casos possíveis. Considerando os eventos A (dois números ímpares) e B (dois números iguais), a probabilidade pedida é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

05. Sendo Ω , o conjunto espaço amostral, temos $n(\Omega)$ = 500

A: o número sorteado é formado por 3 algarismos; A = $\{100, 101, 102, ..., 499, 500\}$, n(A) = 401 e p(A) = 401/500

B: o número sorteado é múltiplo de 10; B = {10, 20, ..., 500}. Para encontrarmos n(B) recorremos à fórmula do termo geral da P.A., em que

 $a_1 = 10$

 $a_n^- = 500$

r = 10

Temos $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \rightarrow 500 = 10 + (n-1) \cdot 10 \rightarrow n = 50$

Dessa forma, p(B) = 50/500.

A Ω B: o número tem 3 algarismos e é múltiplo de 10; A Ω B = {100, 110, ..., 500}.

De $a_n = a_1 + (n-1)$. r, temos: 500 = 100 + (n-1). $10 \rightarrow n = 41$ e p(A \cap B) = 41/500

Por fim, p(A.B) =
$$\frac{401}{500} + \frac{50}{500} - \frac{41}{500} = \frac{41}{50} = 82\%$$

06

Sejam $A_{1'}$, $A_{2'}$, $A_{3'}$, A_{4} as bolas amarelas, $B_{1'}$, B_{2} as brancas e $V_{1'}$, $V_{2'}$, V_{3} as vermelhas.

Temos S = $\{A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_{4'}, V_{1'}, V_{2'}, V_{3}, B_{1'}, B_{2}\} \rightarrow n(S) = 9$ A: retirada de bola amarela = $\{A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_{4}\}$, n(A) = 4B: retirada de bola branca = $\{B_{1'}, B_{2}\}$, n(B) = 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \rightarrow P(A) = \frac{4}{9} \cong 44,4\%$$

 $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \rightarrow P(B) = \frac{2}{9} \cong 22,2\%$

Como A \cap B = \emptyset , A e B são eventos mutuamente exclusivos;

Logo: P(A U B) = P(A) + P(B) =
$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{9} \cong 67,0\%$$

)7.

Se apenas um deve acertar o alvo, então podem ocorrer os sequintes eventos:

(A) "A" acerta e "B" erra; ou

(B) "A" erra e "B" acerta.

Assim, temos:

P(A B) = P(A) + P(B)

P(A B) = 40% .70% + 60% .30%

 $P(A B) = 0.40 \cdot 0.70 + 0.60 \cdot 0.30$

P(A B) = 0.28 + 0.18

P(A B) = 0.46

P(A B) = 46%

08.

Sendo A e B eventos independentes, $P(A \cap B) = P(A)$. P(B) e como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Temos:

 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

 $0.8 = 0.3 + P(B) - 0.3 \cdot P(B)$

 $0.7 \cdot (PB) = 0.5$

P(B) = 5/7.



09. Representando por $P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4)$ a probabilidade pedida, temos:

$$P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4) =$$

$$P(B_1). P(P_2). P(B_3). P(P_4) =$$

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

16. EXPRESSÕES MATEMÁTICAS 17. EXPRESSÕES MATEMÁTICAS

Expressões numéricas são <u>conjuntos</u> de números que sofrem **operações matemáticas** com uma ordem de operações preestabelecida. Para que você aprenda a resolvê-las, primeiramente, destacaremos a prioridade que as **operações matemáticas** possuem.

Ordem das operações

As **operações matemáticas** estudadas no Ensino Fundamental são: adição, subtração, <u>multiplicação</u>, <u>divisão</u>, <u>potenciação</u> e <u>radiciação</u>. A ordem em que elas devem ser resolvidas em uma **expressão numérica** é a seguinte:

→ Potenciação e radiciação

Em uma **expressão numérica**, sempre resolva primeiro as potências e raízes antes de qualquer outra operação matemática. A única exceção é para o caso em que aparecem colchetes, chaves ou parênteses. Vale ressaltar que, entre potências e raízes, não há **prioridade.**

→ Multiplicação e divisão

Em segundo lugar, quando não houver mais potências ou raízes, devem ser feitas as multiplicações e divisões. Entre essas duas, também não há **prioridade**. Realize primeiro aquela que aparecer primeiro ou que facilitará os cálculos.

→ Adição e subtração

Por último, realize as somas e diferenças. Também não há **prioridade** entre elas. Resolva-as na ordem em que aparecerem.

Ordem entre colchetes, chaves e parênteses

Em algumas **expressões numéricas**, uma parte da expressão pode ter prioridade em relação às outras. Essa parte deve ser separada com parênteses, chaves e/ou colchetes. A **prioridade** em que as operações devem ser feitas é a seguinte:

$\rightarrow \textbf{Parênteses}$

Em primeiro lugar, devem ser feitas todas as **operações** que estiverem dentro dos parênteses. Se houver muitas operações, a ordem que deve ser seguida é a **das operações**, dada anteriormente.

→ Colchetes

Em segundo lugar, as **operações** que estiverem dentro de colchetes deverão ser feitas também de acordo com a ordem das operações dada anteriormente.

Lembre-se apenas de que os parênteses aparecem sozinhos ou dentro de colchetes. Nesse caso, quando sobrar apenas um número dentro dos parênteses, estes podem ser eliminados.

→ Chaves

Por último, as operações dentro de chaves também devem ser realizadas de acordo com a **ordem das operações**.

Exemplo:

$$\{15 + [(7 - 100:102) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\} \cdot 3$$

Observe que existem dois parênteses dentro de colchetes. Qualquer um dos dois pode ser feito primeiro ou ambos podem ser realizados ao mesmo tempo, desde que não se misturem os cálculos para cada um. Faremos na ordem em que aparecem. Isso é o mais indicado a ser feito.

Assim, para os primeiros parênteses, faremos a potência; depois, a divisão e, por fim, a subtração:

$$\{15 + [(7 - 100:102) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\} \cdot 3$$

 $\{15 + [(7 - 100:100) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\} \cdot 3$
 $\{15 + [(7 - 1) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\} \cdot 3$

$$\{15 + [(7-1) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\}\cdot 3$$

 $\{15 + [(8) + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\}\cdot 3$

Nesse caso, os parênteses podem ser eliminados.

$$\{15 + [8 + (16:\sqrt{4} - 4)]2 + 10\} \cdot 3$$

Agora os parênteses seguintes. Primeiro, a raiz quadrada; depois, divisão e subtração.

$$\{15 + [8 + (16:2 - 4)]2 + 10\} \cdot 3$$

$$\{15 + [8 + (8 - 4)]2 + 10\} \cdot 3$$

$${15 + [8 + (4)]2 + 10} \cdot 3$$

$$\{15 + [8 + 4]2 + 10\} \cdot 3$$

Note que, dentro dos colchetes, sobrou apenas uma adição. Depois de realizá-la, o número que sobrar deverá ser elevado ao quadrado. Assim, obteremos:

$$\{15 + [12]2 + 10\} \cdot 3$$

$$\{15 + 144 + 10\} \cdot 3$$

Agora, falta apenas realizar os cálculos dentro das chaves e multiplicar o resultado por 3:

$$\{15 + 144 + 10\} \cdot 3$$

507

Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/ex-pressoes-numericas.htm



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

- **1.** (PREF. JUNDIAI/SP ELETRICISTA MAKIYA-MA/2013) Dentre os nove competidores de um campeonato municipal de esportes radicais, somente os quatro primeiros colocados participaram do campeonato estadual. Sendo assim, quantas combinações são possíveis de serem formadas com quatro desses nove competidores?
 - A) 126
 - B) 120
 - C) 224
 - D) 212
 - E) 156

$$C_{9,4} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 24} = 126$$

RESPOSTA: "A".

- **2.** (PREF. LAGOA DA CONFUSÃO/TO ORIENTADOR SOCIAL IDECAN/2013) Renato é mais velho que Jorge de forma que a razão entre o número de anagramas de seus nomes representa a diferença entre suas idades. Se Jorge tem 20 anos, a idade de Renato é
 - A) 24.
 - B) 25.
 - C) 26.
 - D) 27.
 - E) 28.

Anagramas de RENATO

6.5.4.3.2.1=720

Anagramas de JORGE

5.4.3.2.1=120 Razão dos anagramas: $\frac{720}{120} = 6$

Se Jorge tem 20 anos, Renato tem 20+6=26 anos

RESPOSTA: "C".

- **3.** (PREF. NEPOMUCENO/MG PORTEIRO CON-SULPLAN/2013) Uma dona de casa troca a toalha de rosto do banheiro diariamente e só volta a repeti-la depois que já tiver utilizado todas as toalhas. Sabe-se que a dona de casa dispõe de 8 toalhas diferentes. De quantas maneiras ela pode ter utilizado as toalhas nos primeiros 5 dias de um mês?
 - A) 4650.
 - B) 5180.
 - C) 5460.
 - D) 6720.
 - E) 7260.

8.7.6.5.4=6720

RESPOSTA: "D".

4. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012) Leia o trecho abaixo e, em seguida, assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

Com a palavra PERMUTA é possível formar ____ anagramas começados por consoante e terminados por vogal.

- A) 120
- B) 480
- C) 1.440
- D) 5.040

P5.4.3.2.1 A=120 120.2(letras E e U)=240

120+240=360 anagramas com a letra P

360.4=1440 (serão 4 tipos por ter 4 consoantes)

RESPOSTA: "C".

- **5.** (PM/SP CABO CETRO/2012) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra QUARTEL que começam com AR.
 - A) 80.
 - B) 120.
 - C) 240.
 - D) 720.

RESPOSTA: "B".

6. (PM/SP – CABO – CETRO/2012) Uma lei de certo país determinou que as placas das viaturas de polícia deveriam ter 3 algarismos seguidos de 4 letras do alfabeto grego (24 letras).

Sendo assim, o número de placas diferentes será igual

- A) 175.760.000.
- B) 183.617.280.
- C) 331.776.000.
- D) 358.800.000.

Algarismos possíveis: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9=10 algarismos

10 10 24 24 24 24 24 331.776.000

RESPOSTA: "C".

7. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMI-NISTRATIVO – FCC/2014) São lançados dois dados e multiplicados os números de pontos obtidos em cada um deles. A quantidade de produtos distintos que se pode obter nesse processo é



A) 36.

B) 27.

C) 30.

D) 21.

E) 18.

6.6=36

Mas, como pode haver o mesmo produto por ser dois dados, 36/2=18

RESPOSTA: "E".

8. (PREF. PAULISTANA/PI – PROFESSOR DE MATEMÁ-TICA – IMA/2014) Quantos são os anagramas da palavra TESOURA?

A) 2300

B) 5040

C) 4500

D) 1000

E) 6500

7.6.5.4.3.2.1=5040

Anagramas são quaisquer palavras que podem ser formadas com as letras, independente se formam palavras que existam ou não.

RESPOSTA: "B".

9. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012) Analise as sentenças abaixo.

I. 4! + 3! = 7!

II. $4! \cdot 3! = 12!$

III. $5! + 5! = 2 \cdot 5!$

É correto o que se apresenta em

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I, II e III.

I falsa

4!=24

3!=6

7!=5040

II falsa

4! · 3! ≠12!

III verdadeira

5!=120

5!+5!=240

2 · 5!=240

RESPOSTA: "C".

10. (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CES-GRANRIO/2013) Uma empresa de propaganda pretende criar panfletos coloridos para divulgar certo produto. O papel pode ser laranja, azul, preto, amarelo, vermelho ou roxo, enquanto o texto é escrito no panfleto em preto, vermelho ou branco.

De quantos modos distintos é possível escolher uma cor para o fundo e uma cor para o texto se, por uma questão de contraste, as cores do fundo e do texto não podem ser iguais?

Ă) 13

B) 14

C) 16

D) 17

E) 18

6.3=18

Tirando as possibilidades de papel e texto iguais:

PPeVV=2 possibilidades

18-2=16 possiblidades

RESPOSTA: "C".

11. (PREF. NEPOMUCENO/MG – TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO – CONSULPLAN/2013) Numa sala há 3 ventiladores de teto e 4 lâmpadas, todos com interruptores independentes. De quantas maneiras é possível ventilar e iluminar essa sala mantendo, pelo menos, 2 ventiladores ligados e 3 lâmpadas acesas?

A) 12.

B) 18.

C) 20.

D) 24.

E) 36.

1ª possibilidade:2 ventiladores e 3 lâmpadas

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$C_{3,2} \cdot C_{4,3} = 3 \cdot 4 = 12$$

2ª possibilidade:2 ventiladores e 4 lâmpadas

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$C_{4,4} = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$C_{3,2} \cdot C_{4,4} = 3 \cdot 1 = 3$$



3ª possibilidade:3 ventiladores e 3 lâmpadas

$$C_{3,3} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$C_{3,3} \cdot C_{4,3} = 1 \cdot 4 = 4$$

4ª possibilidade:3 ventiladores e 4 lâmpadas

$$C_{3,3} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$C_{4,4} = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$C_{3,3} \cdot C_{4,4} = 1 \cdot 1 = 1$$

Somando as possibilidades:12+3+4+1=20

RESPOSTA: "C".

- **12.** (PREF. PAULISTANA/PI PROFESSOR DE MATEMÁ-TICA IMA/2014) Se enfileirarmos três dados iguais, obteremos um agrupamento dentre quantos possíveis.
 - A) 150
 - B) 200
 - C) 410
 - D) 216
 - E) 320

$$C_{6,1} \cdot C_{6,1} \cdot C_{6,1}$$

$$C_{6,1} = \frac{6!}{1! \, 5!} = \frac{6.5!}{5!} = 6$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

RESPOSTA: "D".

- 13. (TJ/RS TÉCNICO JUDICIÁRIO ÁREA JUDICIÁRIA E ADMINISTRATIVA FAURGS/2012) Um técnico judiciário deve agrupar 4 processos do juiz A, 3 do juiz B e 2 do juiz C, de modo que os processos de um mesmo juiz fiquem sempre juntos e em qualquer ordem. A quantidade de maneiras diferentes de efetuar o agrupamento é de
 - A) 32.
 - B) 38.
 - C) 288.
 - D) 864.
 - E) 1728.

Juiz A: $P_4 = 4! = 24$

Juiz B: $\vec{P_3} = 3! = 6$

Juiz C: $P_2 = 2! = 2$

24.6.2=288.P₃=288.6=1728

A P_3 deve ser feita, pois os processos tem que ficar juntos, mas não falam em que ordem podendo ser de qualquer juiz antes.

Portanto pode haver permutação entre eles.

RESPOSTA: "E".

- **14.** (TJ/RS TÉCNICO JUDICIÁRIO ÁREA JUDICIÁRIA E ADMINISTRATIVA FAURGS/2012) O Tribunal de Justiça está utilizando um código de leitura de barras composto por 5 barras para identificar os pertences de uma determinada seção de trabalho. As barras podem ser pretas ou brancas. Se não pode haver código com todas as barras da mesma cor, o número de códigos diferentes que se pode obter é de
 - A) 10.
 - B) 30.
 - C) 50.
 - D) 150.
 - E) 250.

 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ possibilidades se pudesse ser qualquer uma das cores

Mas, temos que tirar código todo preto e todo branco. 32-2=30

RESPOSTA: "B".

15. (PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012) Certa empresa identifica as diferentes peças que produz, utilizando códigos numéricos compostos de 5 dígitos, mantendo, sempre, o seguinte padrão: os dois últimos dígitos de cada código são iguais entre si, mas diferentes dos demais. Por exemplo, o código "03344" é válido, já o código "34544", não.

Quantos códigos diferentes podem ser criados?

- A) 3.312
- B) 4.608
- C) 5.040
- D) 7.000
- E) 7.290

9.9.9.1.1=729

São 10 possibilidades para os últimos dois dígitos: 729.10=7290

RESPOSTA: "E".

16. (DNIT – ANALISTA ADMINISTRATIVO –ADMINISTRATIVA – ESAF/2012) Os pintores Antônio e Batista farão uma exposição de seus quadros. Antônio vai expor 3 quadros distintos e Batista 2 quadros distintos. Os quadros serão expostos em uma mesma parede e em linha reta, sendo que os quadros de um mesmo pintor devem ficar juntos. Então, o número de possibilidades distintas de montar essa exposição é igual a:



A) 5

B) 12

C) 24

D) 6

E) 15

Para Antônio

 $_{-}$ $_{-}$ $_{-}$ $_{3}$ $_{-}$ $_{3}$ $_{-}$ $_{3}$ $_{-}$ $_{-}$ $_{6}$

Para Batista

 $_{-}$ P_{2} = 2! = 2

E pode haver permutação dos dois expositores:

6.2.2=24

RESPOSTA: "C".

17. (CRMV/RJ – AUXILIAR ADMINISTRATIVO – FUNDAÇÃO BIO-RIO/2014) Um anagrama de uma palavra é um reordenamento de todas as suas letras. Por exemplo, ADEUS é um anagrama de SAUDE e OOV é um anagrama de OVO. A palavra MOTO possui a seguinte quantidade de anagramas:

A)8

B)10

C)12

D)16

E)20

Como tem letra repetida:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$$

RESPOSTA: "C".

18. (TJ/PE – ANALISTA JUDICIÁRIO – ADMINISTRATIVA – FCC/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número

A) 11.

B) 13.

C) 17.

D) 22.

E) 23.

A___GRT P3=3!=6

E___GRT P3=3!=6

IA__GRT P2=2!=2 IE__GRT P2=2!=2

IOAEGRT-17^a da sequência

RESPOSTA: "C".

19. (SEED/SP – AGENTE DE ORGANIZAÇÃO ESCOLAR – VUNESP/2012) Um restaurante possui pratos principais e individuais. Cinco dos pratos são com peixe, 4 com carne vermelha, 3 com frango, e 4 apenas com vegetais. Alberto, Bianca e Carolina pretendem fazer um pedido com três pratos principais individuais, um para cada. Alberto não come carne vermelha nem frango, Bianca só come vegetais, e Carolina só não come vegetais. O total de pedidos diferentes que podem ser feitos atendendo as restrições alimentares dos três é igual a

A) 384.

B) 392.

C) 396.

D) 416.

E) 432.

Para Alberto:5+4=9

Para Bianca:4

Para Carolina: 12

9.4.12=432

RESPOSTA: "E".

20. (SAMU/SC – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – SPDM/2012) O total de números de 3 algarismos que terminam por um número par e que podem ser formados pelos algarismos 3,4,5,7,8, com repetição, é de:

A) 50

B) 100

C) 75

D) 80

O último algarismo pode ser 4 ou 8

5.5.2=50

RESPOSTA: "A".

21. (SANEPAR – TÉCNICO AMBIENTAL – UEL/COPS/2013) Alguns funcionários de uma empresa são pagos por produção. A cada tarefa executada corretamente, o funcionário recebe R\$ 100,00. A qualquer forma de execução ou não da tarefa são pagos R\$ 20,00. Nessa empresa, o funcionário Marcos recebeu uma lista de 70 tarefas a serem efetuadas no período de 30 dias.

Sabendo que, ao final do prazo, Marcos recebeu o salário de R\$ 5800,00, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a quantidade de tarefas corretas que Marcos executou.

A) 15

B) 45

C) 50

D) 55 E) 60

Tarefas executadas corretamente: x Tarefas executadas de outra forma : y



$$\begin{cases} x + y = 70 & (x - 20) \\ 100x + 20y = 5800 \end{cases}$$
$$(-20x - 20y = -1400$$

$$\begin{cases} -20x - 20y = -1400 \\ 100x + 20y = 5800 \end{cases}$$

$$80x = 4400$$

 $x = 55$

A quantidade de tarefas corretas foi de 55.

RESPOSTA: "D".

- **22.** (SPTRANS AGENTE DE INFORMAÇÕES VUNESP/2012) Em uma concessionária de veículos, a razão entre o número de carros vermelhos e o número de carros prateados vendidos durante uma semana foi de 3/11. Sabendo-se que nessa semana o número de carros vendidos (somente vermelhos e prateados) foi 168, pode-se concluir que, nessa venda, o número de carros prateados superaram o número de carros vermelhos em
 - A) 96.
 - B) 112.
 - C) 123.
 - Ď) 132.
 - E) 138.
 - Carros vermelhos: V Carros prateados : P

$$\frac{V}{P} = \frac{3}{11}$$

$$3 P = 11 V$$

$$\begin{cases} V + P = 168 (x - 3) \\ 3P - 11V = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3P - 3V = -504 \\ 3P - 11V = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações

-14V=-504

V=36

P=168-36=132

P-V=132-36=96

RESPOSTA: "A".

23. (SPTRANS – AGENTE DE INFORMAÇÕES – VUNESP/2012) Uma pessoa comprou um pacote de bombons, e come todo dia 5 deles. Se essa pessoa comesse 2 bombons a menos por dia, com esse mesmo pacote, teria bombons para comer por mais 8 dias.

- O número de bombons desse pacote é
- A) 70.
- B) 65.
- C) 60.
- D) 55.
- E) 50.

Número de bombons: x

Dias:y

$$\frac{x}{5} = y$$

$$\frac{x}{3} = y + 8$$

$$x = 3y + 24$$

$$\begin{cases} x - 5y = 0 \ (x - 1) \\ x - 3y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 0 \\ x - 3y = 24 \end{cases}$$

Somando as duas equações

2y = 24

Y=12

X=60

São 60 bombons.

RESPOSTA: "C".

24. (DNIT – ANALISTA ADMINISTRATIVO –ADMINISTRATIVA – ESAF/2012) A soma dos valores de x e y que solucionam o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

é igual a:

A) 6

B) 4

C) 3

D) 2

Somando as duas equações:

3x + 3y = 12

Dividindo por 3:

X+y=4

RESPOSTA: "B".

