MATEMÁTICA

Teoria dos Conjuntos; 01
Conjuntos dos números Reais (R): operações, propriedades e problemas; 06
Cálculos Algébricos; 11
Grandezas Proporcionais - Regra de Três Simples e Composta; 14
Porcentagem e Juro Simples; 28
Sistema Monetário Brasileiro; 38
Equação do Primeiro e Segundo Graus - problemas; 40
Sistema Decimal de Medidas (comprimento, superfície, volume, massa, capacidade e tempo) - transformação de unidades e resolução de problemas; 48
Geometria: ponto, reta, plano – ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros, circunferência, círculo e seus elementos respectivos – figuras geométricas planas (perímetros e áreas) – sólidos geométricos (figuras espaciais): seus elementos e volumes; 52
Funções do 1º e 2º graus; 79
Sequências, Progressões Aritméticas e Geométricas. Resolução de problemas. 91

TEORIA DOS CONJUNTOS;

Conjuntos

É uma reunião, agrupamento de pessoas, seres ou objetos. Dá a ideia de coleção.

Conjuntos Primitivos

Os conceitos de conjunto, elemento e pertinência são primitivos, ou seja, não são definidos.

Um cacho de bananas, um cardume de peixes ou uma porção de livros são todos exemplos de conjuntos.

Conjuntos, como usualmente são concebidos, têm elementos. Um elemento de um conjunto pode ser uma banana, um peixe ou um livro. Convém frisar que um conjunto pode ele mesmo ser elemento de algum outro conjunto.

Por exemplo, uma reta é um conjunto de pontos; um feixe de retas é um conjunto onde cada elemento (reta) é também conjunto (de pontos).

Em geral indicaremos os conjuntos pelas letras maiúsculas A, B, C, ..., X, e os elementos pelas letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, ..., embora não exista essa obrigatoriedade.

Em Geometria, por exemplo, os pontos são indicados por letras maiúsculas e as retas (que são conjuntos de pontos) por letras minúsculas.

Outro conceito fundamental é o de relação de pertinência que nos dá um relacionamento entre um elemento e um conjunto.

Se x é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \in A$

Lê-se: x é elemento de A ou x pertence a A.

Se x não é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \notin A$

Lê-se x não é elemento de A ou x não pertence a A.

Como representar um conjunto

Pela designação de seus elementos: Escrevemos os elementos entre chaves, separando os por vírgula.

Exemplos

- {3, 6, 7, 8} indica o conjunto formado pelos elementos 3, 6, 7 e 8.

{a; b; m} indica o conjunto constituído pelos elementos a, b e m.

{1; {2; 3}; {3}} indica o conjunto cujos elementos são 1, {2; 3} e {3}.

Pela propriedade de seus elementos: Conhecida uma propriedade P que caracteriza os elementos de um conjunto A, este fica bem determinado.

P termo "propriedade P que caracteriza os elementos de um conjunto A" significa que, dado um elemento x qualquer temos:

Assim sendo, o conjunto dos elementos x que possuem a propriedade P é indicado por:

{x, tal que x tem a propriedade P}

Uma vez que "tal que" pode ser denotado por t.q. ou | ou ainda :, podemos indicar o mesmo conjunto por:

{x, t . q . x tem a propriedade P} ou, ainda,

{x : x tem a propriedade P}

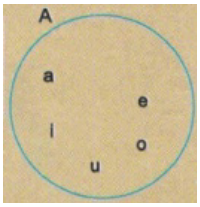
Exemplos

- { x, t.q. x é vogal } é o mesmo que {a, e, i, o, u}
- {x | x é um número natural menor que 4 } é o mesmo que {0, 1, 2, 3}
- {x : x em um número inteiro e x2 = x } é o mesmo que {0, 1}

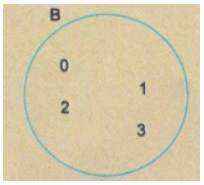
Pelo diagrama de Venn-Euler: O diagrama de Venn-Euler consiste em representar o conjunto através de um "círculo" de tal forma que seus elementos e somente eles estejam no "círculo".

Exemplos

- Se A = {a, e, i, o, u} então



- Se B = {0, 1, 2, 3 }, então



Conjunto Vazio

Conjunto vazio é aquele que não possui elementos. Representa-se pela letra do alfabeto norueguês $\emptyset$ ou, simplesmente { }.

Simbolicamente: $\forall x, x \notin \emptyset$

Exemplos

- $\emptyset$ = {x : x é um número inteiro e 3x = 1}
- $\emptyset$ = {x | x é um número natural e 3 – x = 4}
- $\emptyset$ = {x | x ≠ x}

Subconjunto

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B ou A é a parte de B ou, ainda, A está contido em B e indicamos por $A \subset B$.

Simbolicamente: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \forall \Rightarrow x \in B)$

Portanto, $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto de B ou A não é parte de B ou, ainda, A não está contido em B.

Por outro lado, $A \not\subset B$ se, e somente se, existe, pelo menos, um elemento de A que não é elemento de B.

Simbolicamente: $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ e } x \notin B)$

Exemplos

- $\{2 . 4\} \subset \{2, 3, 4\}$, pois $2 \in \{2, 3, 4\}$ e $4 \in \{2, 3, 4\}$
- $\{2, 3, 4\} \not\subset \{2, 4\}$, pois $3 \notin \{2, 4\}$
- $\{5, 6\} \subset \{5, 6\}$, pois $5 \in \{5, 6\}$ e $6 \in \{5, 6\}$

Inclusão e pertinência

A definição de subconjunto estabelece um relacionamento entre dois conjuntos e recebe o nome de relação de inclusão ($\subset$).

A relação de pertinência ($\in$) estabelece um relacionamento entre um elemento e um conjunto e, portanto, é diferente da relação de inclusão.

Simbolicamente

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$

$x \notin A \Leftrightarrow \{x\} \not\subset A$

Igualdade

Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é igual a B e indicamos por A = B se, e somente se, A é subconjunto de B e B também subconjunto de A.

Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$

Demonstrar que dois conjuntos A e B são iguais equivale, segundo a definição, a demonstrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Segue da definição que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

Portanto $A \neq B$ significa que A é diferente de B. Portanto $A \neq B$ se, e somente se, A não é subconjunto de B ou B não é subconjunto de A. Simbolicamente: $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$

Exemplos

- $\{2,4\} = \{4,2\}$, pois $\{2,4\} \subset \{4,2\}$ e $\{4,2\} \subset \{2,4\}$. Isto nos mostra que a ordem dos elementos de um conjunto não deve ser levada em consideração. Em outras palavras, um conjunto fica determinado pelos elementos que o mesmo possui e não pela ordem em que esses elementos são descritos.
- $\{2,2,2,4\} = \{2,4\}$, pois $\{2,2,2,4\} \subset \{2,4\}$ e $\{2,4\} \subset \{2,2,2,4\}$. Isto nos mostra que a repetição de elementos é desnecessária.
- $\{a,a\} = \{a\}$
- $\{a,b = \{a\} \Leftrightarrow a = b$
- $\{1,2\} = \{x,y\} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ e } y = 2) \text{ ou } (x = 2 \text{ e } y = 1)$

Conjunto das partes

Dado um conjunto A podemos construir um novo conjunto formado por todos os subconjuntos (partes) de A. Esse novo conjunto chama-se conjunto dos subconjuntos (ou das partes) de A e é indicado por P(A).

Simbolicamente: $P(A)=\{X \mid X \subset A\}$ ou $X \subset P(A) \Leftrightarrow X \subset A$

Exemplos

a) = {2, 4, 6}
P(A) = {$\emptyset$, {2}, {4}, {6}, {2,4}, {2,6}, {4,6}, A}

b) = {3,5}
P(B) = {$\emptyset$, {3}, {5}, B}

c) = {8}
P(C) = {$\emptyset$, C}

d) = $\emptyset$
P(D) = {$\emptyset$}

Propriedades

Seja A um conjunto qualquer e $\emptyset$ o conjunto vazio. Valem as seguintes propriedades

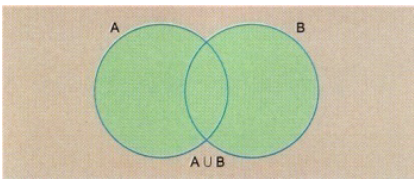
$\emptyset \neq (\emptyset)$	$\emptyset \notin \emptyset$	$\emptyset \subset \emptyset$	$\emptyset \in \{\emptyset\}$
$\emptyset \subset A \Leftrightarrow \emptyset \in P(A)$		$A \subset A \Leftrightarrow A \in P(A)$	

Se A tem n elementos então A possui 2^n subconjuntos e, portanto, P(A) possui 2^n elementos.

União de conjuntos

A união (ou reunião) dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Representa-se por $A \cup B$.

Simbolicamente: $A \cup B = \{X \mid X \in A \text{ ou } X \in B\}$



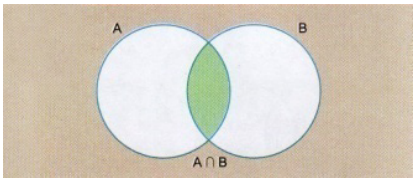
Exemplos

- $\{2,3\} \cup \{4,5,6\} = \{2,3,4,5,6\}$
- $\{2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{2,3,4,5\}$
- $\{2,3\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- $\{a,b\} \cup \phi \{a,b\}$

NOVA CONCURSOS

Intersecção de conjuntos

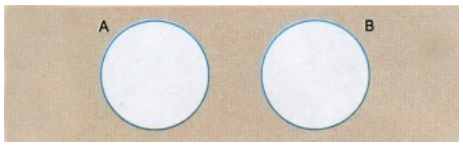
A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B. Representa-se por $A \cap B$. Simbolicamente: $A \cap B = \{X \mid X \in A \text{ ou } X \in B\}$



Exemplos

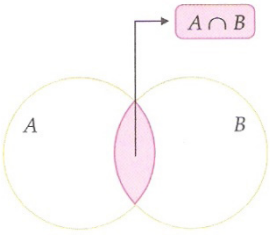
- $\{2,3,4\} \cap \{3,5\} = \{3\}$
- $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
- $\{2,3\} \cap \{1,2,3,5\} = \{2,3\}$
- $\{2,4\} \cap \{3,5,7\} = \phi$

Observação: Se $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.



Número de Elementos da União e da Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, como vemos na figura abaixo, podemos estabelecer uma relação entre os respectivos números de elementos.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

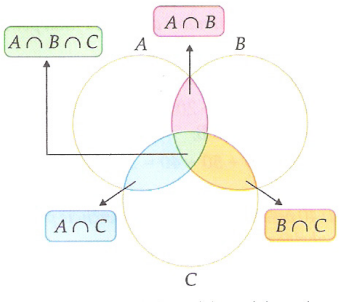
Note que ao subtrairmos os elementos comuns $(n(A \cap B))$ evitamos que eles sejam contados duas vezes.

Observações:

a) Se os conjuntos A e B forem disjuntos ou se mesmo um deles estiver contido no outro, ainda assim a relação dada será verdadeira.

b) Podemos ampliar a relação do número de elementos para três ou mais conjuntos com a mesma eficiência.

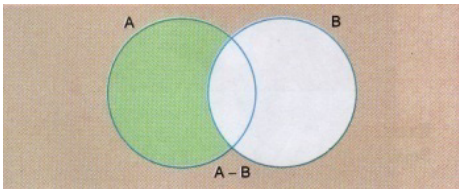
Observe o diagrama e comprove.



$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Subtração

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Representa-se por A – B. Simbolicamente: $A - B = \{X \mid X \in A \text{ e } X \notin B\}$



O conjunto A – B é também chamado de conjunto complementar de B em relação a A, representado por $C_A B$.

Simbolicamente: $C_A B = A - B\{X \mid X \in A \text{ e } X \notin B\}$

Exemplos

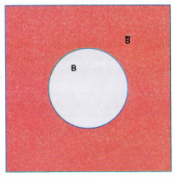
- A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 2}
  $C_A B = A - B = \{1,3\}$ e $C_B A = B - A = \phi$

- A = {1, 2, 3} e B = {2, 3, 4}
  $C_A B = A - B = \{1\}$ e $C_B A = B - A = \{14\}$

- A = {0, 2, 4} e B = {1 ,3 ,5}
  $C_A B = A - B = \{0,2,4\}$ e $C_B A = B - A = \{1,3,5\}$

Observações: Alguns autores preferem utilizar o conceito de completar de B em relação a A somente nos casos em que $B \subset A$.

- Se $B \subset A$ representa-se por $\overline{B}$ o conjunto complementar de B em relação a A. Simbolicamente: $B \subset A \Leftrightarrow \overline{B} = A - B = C_A B$`



Exemplos

Seja S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então:
a) A = {2, 3, 4} $\Rightarrow \overline{A}$ = {0, 1, 5, 6}
b) B = {3, 4, 5, 6 } $\Rightarrow \overline{B}$ = {0, 1, 2}
c) C = $\phi \Rightarrow \overline{C}$ = S

Número de elementos de um conjunto

Sendo X um conjunto com um número finito de elementos, representa-se por n(X) o número de elementos de X. Sendo, ainda, A e B dois conjuntos quaisquer, com número finito de elementos temos:

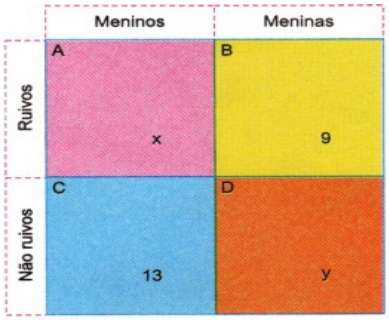
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
$A \cap B=\phi \Rightarrow n(A \cup B)=n(A)+n(B)$
$n(A - B)=n(A)-n(A \cap B)$
$B \subset A \Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(B)$

Resolução de Problemas

Exemplo:

Numa escola mista existem 42 meninas, 24 crianças ruivas, 13 meninos não ruivos e 9 meninas ruivas. Pergunta-se

a) quantas crianças existem na escola?
b) quantas crianças são meninas ou são ruivas



Sejam:

A o conjunto dos meninos ruivos e n(A) = x
B o conjunto das meninas ruivas e n(B) = 9
C o conjunto dos meninos não ruivos e n(C) = 13
D o conjunto das meninas não ruivas e n(D) = y
De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} n(B \cup D) = n(B) + n(D) = 9 + y = 42 \Leftrightarrow y = 33 \\ n(A \cup D) = n(A) + n(B) = x + 9 = 24 \Leftrightarrow x = 15 \end{cases}$$

Assim sendo
a) O número total de crianças da escola é:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) = 15 + 9 + 13 + 33 = 70$$

b) O número de crianças que são meninas ou são ruivas é:

$$n[(A \cup B) \cup (B \cup D)] = n(A) + n(B) + n(D) = 15 + 9 + 33 = 57$$

Questões

1 – (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Dos 43 vereadores de uma cidade, 13 dele não se inscreveram nas comissões de Educação, Saúde e Saneamento Básico. Sete dos vereadores se inscreveram nas três comissões citadas. Doze deles se inscreveram apenas nas comissões de Educação e Saúde e oito deles se inscreveram apenas nas comissões de Saúde e Saneamento Básico. Nenhum dos vereadores se inscreveu em apenas uma dessas comissões. O número de vereadores inscritos na comissão de Saneamento Básico é igual a

A) 15.
B) 21.
C) 18.
D) 27.
E) 16.

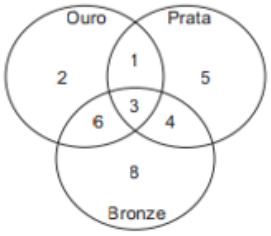
2 – (TJ-SC) Num grupo de motoristas, há 28 que dirigem automóvel, 12 que dirigem motocicleta e 8 que dirigem automóveis e motocicleta. Quantos motoristas há no grupo?

A) 16 motoristas
B) 32 motoristas
C) 48 motoristas
D) 36 motoristas

3 – (TRT 19ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2014) Dos 46 técnicos que estão aptos para arquivar documentos 15 deles também estão aptos para classificar processos e os demais estão aptos para atender ao público. Há outros 11 técnicos que estão aptos para atender ao público, mas não são capazes de arquivar documentos. Dentre esses últimos técnicos mencionados, 4 deles também são capazes de classificar processos. Sabe-se que aqueles que classificam processos são, ao todo, 27 técnicos. Considerando que todos os técnicos que executam essas três tarefas foram citados anteriormente, eles somam um total de

A) 58.
B) 65.
C) 76.
D) 53.
E) 95.

4 – (METRÔ/SP – OFICIAL LOGISTICA –ALMOXARIFADO I – FCC/2014) O diagrama indica a distribuição de atletas da delegação de um país nos jogos universitários por medalha conquistada. Sabe-se que esse país conquistou medalhas apenas em modalidades individuais. Sabe-se ainda que cada atleta da delegação desse país que ganhou uma ou mais medalhas não ganhou mais de uma medalha do mesmo tipo (ouro, prata, bronze). De acordo com o diagrama, por exemplo, 2 atletas da delegação desse país ganharam, cada um, apenas uma medalha de ouro.



A análise adequada do diagrama permite concluir corretamente que o número de medalhas conquistadas por esse país nessa edição dos jogos universitários foi de

A) 15.
B) 29.
C) 52.
D) 46.
E) 40.

5 – (PREF. CAMAÇARI/BA – TÉC. VIGILÂNCIA EM SAÚDE NM – AOCP/2014) Qual é o número de elementos que formam o conjunto dos múltiplos estritamente positivos do número 3, menores que 31?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13

6 - (PREF. CAMAÇARI/BA – TÉC. VIGILÂNCIA EM SAÚDE NM – AOCP/2014) Considere dois conjuntos A e B, sabendo que A ∩ B = {3}, A ∪ B = {0; 1; 2; 3; 5} e A – B = {1 ; 2}, assinale a alternativa que apresenta o conjunto B.

A) {1; 2; 3}
B) {0; 3}
C) {0; 1; 2; 3; 5}
D) {3; 5}
E) {0; 3; 5}

7 – (Agente Administrativo) Em uma cidade existem duas empresas de transporte coletivo, A e B. Exatamente 70% dos estudantes desta cidade utilizam a Empresa A e 50% a Empresa B. Sabendo que todo estudante da cidade é usuário de pelo menos uma das empresas, qual o % deles que utilizam as duas empresas?

A) 20%
B) 25%
C) 27%
D) 33%
E) 35%

8 – (METRÔ/SP – ENGENHEIRO SEGURANÇA DO TRABALHO – FCC/2014) Uma pesquisa, com 200 pessoas, investigou como eram utilizadas as três linhas: A, B e C do Metrô de uma cidade. Verificou-se que 92 pessoas utilizam a linha A; 94 pessoas utilizam a linha B e 110 pessoas utilizam a linha C. Utilizam as linhas A e B um total de 38 pessoas, as linhas A e C um total de 42 pessoas e as linhas B e C um total de 60 pessoas; 26 pessoas que não se utilizam dessas linhas. Desta maneira, conclui-se corretamente que o número de entrevistados que utilizam as linhas A e B e C é igual a

A) 50.
B) 26.
C) 56.
D) 10.
E) 18.

9 – TJ/RS – TÉCNICO JUDICIÁRIO – ÁREA JUDICIÁRIA E ADMINISTRATIVA – FAURGS/2012) Observando-se, durante certo período, o trabalho de 24 desenhistas do Tribunal de Justiça, verificou-se que 16 executaram desenhos arquitetônicos, 15 prepararam croquis e 3 realizaram outras atividades. O número de desenhistas que executaram desenho arquitetônico e prepararam croquis, nesse período, **é** de

A) 10.
B) 11.
C) 12.
D) 13.
E) 14.

10 - (TJ/RS – OFICIAL DE TRANSPORTE – CETRO/2013) Dados os conjuntos A = {x | x é vogal da palavra CARRO} e B = {x | x é letra da palavra CAMINHO}, é correto afirmar que A∩ B tem

A) 1 elemento.
B) 2 elementos.
C) 3 elementos.
D) 4 elementos.
E) 5 elementos.
F)

Respostas

1 - **RESPOSTA: "C"**

De acordo com os dados temos:

7 vereadores se inscreveram nas 3.

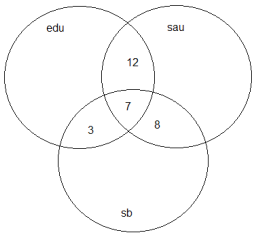
APENAS 12 se inscreveram em educação e saúde (o 12 não deve ser tirado de 7 como costuma fazer nos conjuntos, pois ele já desconsidera os que se inscreveram nos três)

APENAS 8 se inscreveram em saúde e saneamento básico.

São 30 vereadores que se inscreveram nessas 3 comissões, pois 13 dos 43 não se inscreveram.

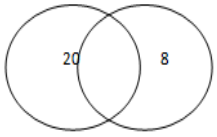
Portanto, 30-7-12-8=3

Se inscreveram em educação e saneamento 3 vereadores.



Só em saneamento se inscreveram: 3+7+8=18

2 – RESPOSTA: "B"



Os que dirigem automóveis e motocicleta: 8

Os que dirigem apenas automóvel: 28-8 = 20

Os que dirigem apenas motocicleta: 12-8= 4

A quantidade de motoristas é o somatório: 20+8+4 = 32 motoristas.

3 - RESPOSTA: "B".

Técnicos arquivam e classificam: 15

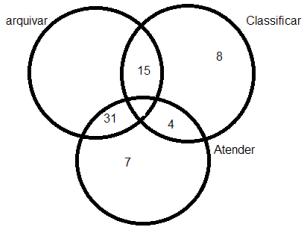
Arquivam e atendem: 46-15=31

classificam e atendem: 4

Classificam: 15+4=19 como são 27 faltam 8

Dos 11 técnicos aptos a atender ao público 4 são capazes de classificar processos, logo apenas 11-4 = 7 técnicos são aptos a atender ao público.

Somando todos os valores obtidos no diagrama teremos: 31+15+7+4+8 = 65 técnicos.



4 - RESPOSTA: "D".

O diagrama mostra o número de atletas que ganharam medalhas.

No caso das intersecções, devemos multiplicar por 2 por ser 2 medalhas e na intersecção das três medalhas multiplica-se por 3.

Intersecções:

$$6 \cdot 2 = 12$$
$$1 \cdot 2 = 2$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$3 \cdot 3 = 9$$

Somando as outras:

2+5+8+12+2+8+9=46

5 -**RESPOSTA: "B".**

Se nos basearmos na tabuada do 3 , teremos o seguinte conjunto

A={3,6,9,12,15,18,21,24,27,30}

10 elementos.

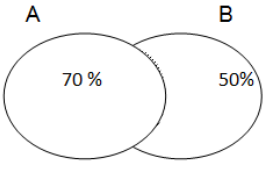
6 - **RESPOSTA: "E".**

A intersecção dos dois conjuntos, mostra que 3 é elemento de B.

A-B são os elementos que tem em A e não em B.

Então de A ∪ B, tiramos que B={0;3;5}.

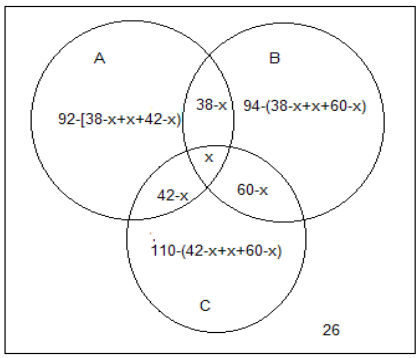
7 - Resposta "A".



70 – 50 = 20.

20% utilizam as duas empresas.

8 - RESPOSTA: "E".



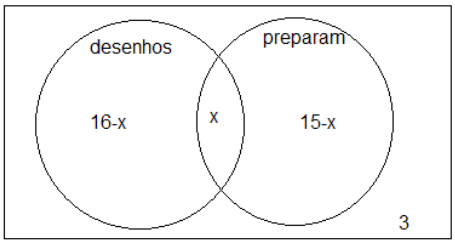
92-[38-x+x+42-x]+94-[38-x+x+60-x]+110-[42-x+x+-60-x]+(38-x)+x+(42-x)+(60-x)+26=200

92-[80-x]+94-[98-x]+110-[102-x]+38+42-x+-60-x+26=200

92-80+x+94-98+x+110-102+x+166-2x=200

x+462-180=200 ➜ x+182 = 200 ➜ x = 200-182 ➜ x = 18

9 - **RESPOSTA: "A".**



16-x+x+15-x+3=24 ➜ x+34 = 24 ➜ -x = 24-34 ➜ -x = -10, como não existe variável negativa neste caso multiplica-se por (-1) ambos os lados , logo x = 10.

10 - RESPOSTA: "B".

Como o conjunto A é dado pelas vogais: A={A,O}, e B é dado pelas letras : B={ C,A,M,I,N,H,O}, portanto A∩ B={A,O}

CONJUNTOS DOS NÚMEROS REAIS (R): OPERAÇÕES, PROPRIEDADES E PROBLEMAS;

NÚMEROS REAIS

O conjunto dos **números reais** *R* é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, como 3,141592(...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Denomina-se corpo dos números reais a coleção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de frações associado aos inteiros (números racionais) e a norma associada ao infinito.

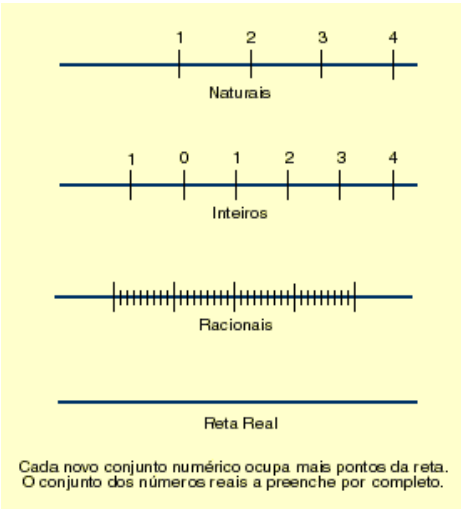
Existem também outras conclusões dos racionais, uma para cada número primo p, chamadas números p-ádicos. O corpo dos números p-ádicos é formado pelos racionais e a norma associada a p!

Propriedade

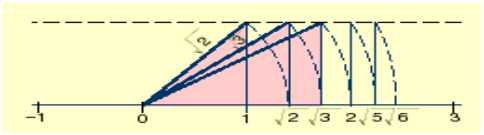
O conjunto dos números reais com as operações binárias de soma e produto e com a relação natural de ordem formam um corpo ordenado. Além das propriedades de um corpo ordenado, *R* tem a seguinte propriedade: Se *R* for dividido em dois conjuntos (uma partição) *A* e *B*, de modo que todo elemento de *A* é menor que todo elemento de *B*, então existe um elemento *x* que *separa* os dois conjuntos, ou seja, *x* é maior ou igual a todo elemento de *A* e menor ou igual a todo elemento de *B*.

$$\forall A, B, (\mathbb{R} = A \cup B \wedge (\forall a \in A, b \in B, (a < b)) \Longrightarrow (\exists x, (\forall a \in A, b \in B \Longrightarrow a \leq x \leq b))$$

Ao conjunto formado pelos números Irracionais e pelos números Racionais chamamos de conjunto dos números Reais. Ao unirmos o conjunto dos números Irracionais com o conjunto dos números Racionais, formando o conjunto dos números Reais, todas as distâncias representadas por eles sobre uma reta preenchem-na por completo; isto é, ocupam todos os seus pontos. Por isso, essa reta é denominada reta Real.



Podemos concluir que na representação dos números Reais sobre uma reta, dados uma origem e uma unidade, a cada ponto da reta corresponde um número Real e a cada número Real corresponde um ponto na reta.



Ordenação dos números Reais

A representação dos números Reais permite definir uma relação de ordem entre eles. Os números Reais positivos são maiores que zero e os negativos, menores. Expressamos a relação de ordem da seguinte maneira: Dados dois números Reais **a** e **b**,

$a \leq b \leftrightarrow b - a \geq 0$

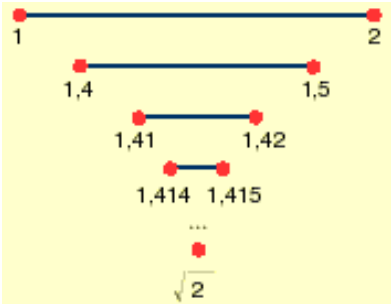
Exemplo: $-15 \leq \leftrightarrow 5 - (-15) \geq 0$

$5 + 15 \geq 0$

Propriedades da relação de ordem

- Reflexiva: $a \leq a$
- Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \rightarrow a \leq c$
- Anti-simétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \rightarrow a = b$
- Ordem total: $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$

Expressão aproximada dos números Reais



Os números Irracionais possuem infinitos algarismos decimais não-periódicos. As operações com esta classe de números sempre produzem erros quando não se utilizam todos os algarismos decimais. Por outro lado, é impossível utilizar todos eles nos cálculos. Por isso, somos obrigados a usar aproximações, isto é, cortamos o decimal em algum lugar e desprezamos os algarismos restantes. Os algarismos escolhidos serão uma aproximação do número Real. Observe como tomamos a aproximação de e do número nas tabelas.

	Aproximação por			
	Falta		**Excesso**	
Erro menor que	$\sqrt{2}$	π	$\sqrt{2}$	π
1 unidade	**1**	**3**	**2**	**4**
1 décimo	**1,4**	**3,1**	**1,5**	**3,2**
1 centésimo	**1,41**	**3,14**	**1,42**	**3,15**
1 milésimo	**1,414**	**3,141**	**1,415**	**3,142**
1 décimo de milésimo	**1,4142**	**3,1415**	**1,4134**	**3,1416**

Operações com números Reais

Operando com as aproximações, obtemos uma sucessão de intervalos fixos que determinam um número Real. É assim que vamos trabalhar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão. Relacionamos, em seguida, uma série de recomendações úteis para operar com números Reais:

- Vamos tomar a aproximação por falta.
- Se quisermos ter uma ideia do erro cometido, escolhemos o mesmo número de casas decimais em ambos os números.
- Se utilizamos uma calculadora, devemos usar a aproximação máxima admitida pela máquina (o maior número de casas decimais).
- Quando operamos com números Reais, devemos fazer constar o erro de aproximação ou o número de casas decimais.
- É importante adquirirmos a idéia de aproximação em função da necessidade. Por exemplo, para desenhar o projeto de uma casa, basta tomar medidas com um erro de centésimo.
- Em geral, para obter uma aproximação de **n** casas decimais, devemos trabalhar com números Reais aproximados, isto é, com **n** + 1 casas decimais.

Para colocar em prática o que foi exposto, vamos fazer as quatro operações indicadas: adição, subtração, multiplicação e divisão com dois números Irracionais.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

Valor Absoluto

Como vimos, o **erro** pode ser:

- Por *excesso*: neste caso, consideramos o erro positivo.
- Por *falta*: neste caso, consideramos o erro negativo.

Quando o erro é dado sem sinal, diz-se que está dado em valor absoluto. O valor absoluto de um número **a** é designado por **|a|** e coincide com o número positivo, se for positivo, e com seu oposto, se for negativo.

Exemplo: Um livro nos custou 8,50 reais. Pagamos com uma nota de 10 reais. Se nos devolve 1,60 real de troco, o vendedor cometeu um erro de +10 centavos. Ao contrário, se nos devolve 1,40 real, o erro cometido é de 10 centavos.

Figura 8

	Aproximação	Por excesso	Por falta
Soma de números reais: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$	3,1464	3,1462
	erro máximo	0,0002	0,0002
Subtração de números reais: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	0,3178	0,3178
	erro máximo	0,0000	0,0000
Multiplicação de números reais: $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	2,4497	2,4493
	erro máximo	0,0004	0,0004
Divisão de números reais: $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3} \div \sqrt{2}$	1,2247	1,2247
	erro máximo	0,0000	0,0000

Questões

1 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um comerciante tem 8 prateleiras em seu empório para organizar os produtos de limpeza. Adquiriu 100 caixas desses produtos com 20 unidades cada uma, sendo que a quantidade total de unidades compradas será distribuída igualmente entre essas prateleiras. Desse modo, cada prateleira receberá um número de unidades, desses produtos, igual a

A) 40
B) 50
C) 100
D) 160
E) 250

2 - (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Em uma banca de revistas existem um total de 870 exemplares dos mais variados temas. Metade das revistas é da editora A, dentre as demais, um terço são publicações antigas. Qual o número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas?

A) 320
B) 290
C) 435
D) 145

3 - (TRT 6ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO- ADMINISTRATIVA – FCC/2012) Em uma praia chamava a atenção um catador de cocos (a água do coco já havia sido retirada). Ele só pegava cocos inteiros e agia da seguinte maneira: o primeiro coco ele coloca inteiro de um lado; o segundo ele dividia ao meio e colocava as metades em outro lado; o terceiro coco ele dividia em três partes iguais e colocava os terços de coco em um terceiro lugar, diferente dos outros lugares; o quarto coco ele dividia em quatro partes iguais e colocava os quartos de coco em um quarto lugar diferente dos outros lugares. No quinto coco agia como se fosse o primeiro coco e colocava inteiro de um lado, o seguinte dividia ao meio, o seguinte em três partes iguais, o seguinte em quatro partes iguais e seguia na sequência: inteiro, meios, três partes iguais, quatro partes iguais. Fez isso com exatamente 59 cocos quando alguém disse ao catador: eu quero três quintos dos seus terços de coco e metade dos seus quartos de coco. O catador consentiu e deu para a pessoa

A) 52 pedaços de coco.
B) 55 pedaços de coco.
C) 59 pedaços de coco.
D) 98 pedaços de coco.
E) 101 pedaços de coco.

4 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) A mãe do Vitor fez um bolo e repartiu em 24 pedaços, todos de mesmo tamanho. A mãe e o pai comeram juntos, ¼ do bolo. O Vitor e a sua irmã comeram, cada um deles, ¼ do bolo. Quantos pedaços de bolo sobraram?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

5 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Paulo recebeu R$1.000,00 de salário. Ele gastou ¼ do salário com aluguel da casa e 3/5 do salário com outras despesas. Do salário que Paulo recebeu, quantos reais ainda restam?

A) R$ 120,00
B) R$ 150,00
C) R$ 180,00
D) R$ 210,00
E) R$ 240,00

6 - (UFABC/SP – TECNÓLOGO-TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO – VUNESP/2013) Um jardineiro preencheu parcialmente, com água, 3 baldes com capacidade de 15 litros cada um. O primeiro balde foi preenchido com 2/3 de sua capacidade, o segundo com 3/5 da capacidade, e o terceiro, com um volume correspondente à média dos volumes dos outros dois baldes. A soma dos volumes de água nos três baldes, em litros, é

A) 27.
B) 27,5.
C) 28.
D) 28,5.
E) 29.

7 - (UFOP/MG – ADMINISTRADOR DE EDIFICIOS – UFOP/2013) Uma pessoa caminha 5 minutos em ritmo normal e, em seguida, 2 minutos em ritmo acelerado e, assim, sucessivamente, sempre intercalando os ritmos da caminhada (5 minutos normais e 2 minutos acelerados). A caminhada foi iniciada em ritmo normal, e foi interrompida após 55 minutos do início.

O tempo que essa pessoa caminhou aceleradamente foi:

A) 6 minutos
B) 10 minutos
C) 15 minutos
D) 20 minutos

8 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Sobre o conjunto dos números reais é CORRETO dizer:

A) O conjunto dos números reais reúne somente os números racionais.
B) R* é o conjunto dos números reais não negativos.
C) Sendo A = {-1,0}, os elementos do conjunto A não são números reais.
D) As dízimas não periódicas são números reais.

9 - (TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL – VUNESP/2013) Para numerar as páginas de um livro, uma impressora gasta 0,001 mL por cada algarismo impresso. Por exemplo, para numerar as páginas 7, 58 e 290 gasta-se, respectivamente, 0,001 mL, 0,002 mL e 0,003 mL de tinta. O total de tinta que será gasto para numerar da página 1 até a página 1 000 de um livro, em mL, será

A) 1,111.
B) 2,003.
C) 2,893.
D) 1,003.
E) 2,561.

10 - (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Gilberto levava no bolso três moedas de R$ 0,50, cinco de R$ 0,10 e quatro de R$ 0,25. Gilberto retirou do bolso oito dessas moedas, dando quatro para cada filho.

A diferença entre as quantias recebidas pelos dois filhos de Gilberto é de, no máximo,

A) R$ 0,45
B) R$ 0,90
C) R$ 1,10
D) R$ 1,15
E) R$ 1,35

Respostas

1 - RESPOSTA: "E".

Total de unidades: $100 \cdot 20 = 2000$ unidades

$\frac{2000}{8} = 250$ unidades em cada prateleira.

2 - RESPOSTA: "B".
editora A: 870/2=435 revistas
publicações antigas: 435/3=145 revistas

$435 + 145 = 580$
$870 - 580 = 290$

O número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas são 290.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{59}{4} = 14\ resto\ 3$$

14 vezes iguais
Coco inteiro: 14
Metades:14.2=28
Terça parte:14.3=42
Quarta parte:14.4=56
3 cocos: 1 coco inteiro, metade dos cocos, terça parte
Quantidade total
Coco inteiro: 14+1=15
Metades: 28+2=30
Terça parte:42+3=45
Quarta parte :56

$$\frac{3}{5} \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 56 = 27 + 28 = 55$$

4 - RESPOSTA "B".

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Sobrou 1/4 do bolo.

$$24 \cdot \frac{1}{4} = 6\ pedaços$$

5 - RESPOSTA: "B".

Aluguel: $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$

Outras despesas: $1000 \cdot \frac{3}{5} = 600$

$$250 + 600 = 850$$

Restam :1000-850=R$150,00

6 - RESPOSTA: "D".
Primeiro balde:

$$\frac{2}{3} \cdot 15 = 10\ litros$$

Segundo balde:

$$\frac{3}{5} \cdot 15 = 9\ litros$$

Terceiro balde:

$$\frac{10 + 9}{2} = 9{,}5\ litros$$

A soma dos volumes é : 10+9+9,5=28,5 litros

7 - RESPOSTA: "C".
A caminhada sempre vai ser 5 minutos e depois 2 minutos, então 7 minutos ao total.
Dividindo o total da caminhada pelo tempo, temos:

$$\frac{55}{7} = 7\ e\ resta\ 6$$

Assim, sabemos que a pessoa caminhou 7. (5 minutos +2 minutos) +6 minutos (5 minutos+1 minuto)
Aceleradamente caminhou: (7.2)+1➜ 14+1=15 minutos

8 - RESPOSTA: "D".
A) errada - O conjunto dos números reais tem os conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais.
B) errada – R* são os reais sem o zero.
C) errada - -1 e 0 são números reais.

9 - RESPOSTA: "C".
$1 \text{ a } 9 = 9 \text{ algarismos} = 0{,}001 \cdot 9 = 0{,}009 \text{ ml}$
De 10 a 99, temos que saber quantos números tem.
99-10+1=90.
OBS: soma 1, pois quanto subtraímos exclui-se o primeiro número.
$90 \text{ números de 2 algarismos: } 0{,}002 \cdot 90 = 0{,}18 \text{ml}$

De 100 a 999
999-100+1=900 números
$900 \cdot 0{,}003 = 2{,}7 \text{ml}$
1000=0,004ml
Somando: 0,009+0,18+2,7+0,004=2,893

10 - RESPOSTA: "E".
Supondo que as quatro primeiras moedas sejam as 3 de R$ 0,50 e 1 de R$ 0,25(maiores valores).
Um filho receberia : 1,50+0,25=R$1,75
E as ouras quatro moedas sejam de menor valor: 4 de R$ 0,10=R$ 0,40.
A maior diferença seria de 1,75-0,40=1,35
Dica: sempre que fala a maior diferença tem que o maior valor possível – o menor valor.

CÁLCULOS ALGÉBRICOS;

Cálculos Algébricos

Expressões Algébricas são aquelas que contêm números e letras.
Ex: $2ax^2+bx$

Variáveis são as letras das expressões algébricas que representam um número real e que de princípio não possuem um valor definido.
Valor numérico de uma expressão algébrica é o número que obtemos substituindo as variáveis por números e efetuamos suas operações.

Ex: Sendo x =1 e y = 2, calcule o valor numérico (VN) da expressão:
$x^2 + y$ » $1^2 + 2 = 3$ Portando o valor numérico da expressão é 3.

Monômio: os números e letras estão ligados apenas por produtos.
Ex : 4x

Polinômio: é a soma ou subtração de monômios.
Ex: 4x+2y

Termos semelhantes: são aqueles que possuem partes literais iguais (variáveis)
Ex: $2 x^3 y^2 z$ e $3 x^3 y^2 z$ » são termos semelhantes pois possuem a mesma parte literal.

Adição e Subtração de expressões algébricas
Para determinarmos a soma ou subtração de expressões algébricas, basta somar ou subtrair os termos semelhantes.
Assim: $2 x^3 y^2 z + 3x^3 y^2 z = 5x^3 y^2 z$ ou $2 x^3 y^2 z - 3x^3 y^2 z = -x^3 y^2 z$

Convém lembrar dos jogos de sinais.
Na expressão $(x^3 + 2 y^2 + 1) – (y^2 - 2) = x^3 +2 y^2 + 1 – y^2 + 2 = x^3 + y^2 +3$

Multiplicação e Divisão de expressões algébricas
Na multiplicação e divisão de expressões algébricas, devemos usar a propriedade distributiva.
Exemplos:
1) $a (x+y) = ax + ay$
2) $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$
3) $x (x^2 + y) = x^3 + xy$

Para multiplicarmos potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.
Na divisão de potências devemos conservar a base e subtrair os expoentes

Exemplos:
1) $4x^2 : 2 x = 2 x$
2) $(6 x^3 - 8 x) : 2 x = 3 x^2 - 4$
3) $(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x+2) :(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3x +2$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x+2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1} \quad -3x^3 + 8x^2 - 7x & \\ \quad 3x^3 - 6x^2 - 3x & \\ \hline \qquad 2x^2 - 4x + 2 & \\ \qquad -2x^2 + 4x - 2 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Para iniciarmos as operações devemos saber o que são termos semelhantes.
Dizemos que um termo é semelhante do outro quando suas partes literais são idênticas.

Veja:
$5x^2$ e $42x$ são dois termos, as suas partes literais são x^2 e x, as letras são iguais, mas o expoente não, então esses termos não são semelhantes.
$7ab^2$ e $20ab^2$ são dois termos, suas partes literais são ab^2 e ab^2, observamos que elas são idênticas, então podemos dizer que são semelhantes.

Adição e subtração de monômios
Só podemos efetuar a adição e subtração de monômios entre termos semelhantes. E quando os termos envolvidos na operação de adição ou subtração não forem semelhantes, deixamos apenas a operação indicada.
Veja:
Dado os termos $5xy^2$, $20xy^2$, como os dois termos são semelhantes eu posso efetuar a adição e a subtração deles.
$5xy^2 + 20xy^2$ devemos somar apenas os coeficientes e conservar a parte literal.
$25 xy^2$
$5xy^2 - 20xy^2$ devemos subtrair apenas os coeficientes e conservar a parte literal.
- 15 xy2

Veja alguns exemplos:
- $\frac{x^2}{} - \frac{2x^2}{} + x^2$ como os coeficientes são frações devemos tirar o mmc de 6 e 9.

$$\frac{3x^2 - 4x^2 + 18x^2}{18}$$

$$\frac{17x^2}{18}$$

- $4x^2 + 12y^3 – 7y^3 – 5x^2$ devemos primeiro unir os termos semelhantes. $12y^3 – 7y^3 + 4x^2 – 5x^2$ agora efetuamos a soma e a subtração.
$-5y^3 – x^2$ como os dois termos restantes não são semelhantes, devemos deixar apenas indicado à operação dos monômios.

Reduza os termos semelhantes na expressão $4x^2 – 5x -3x + 2x^2$. Depois calcule o seu valor numérico da expressão. $4x^2 – 5x - 3x + 2x^2$ reduzindo os termos semelhantes. $4x^2 + 2x^2 – 5x - 3x$

$6x^2 - 8x$ os termos estão reduzidos, agora vamos achar o valor numérico dessa expressão.

Para calcularmos o valor numérico de uma expressão devemos ter o valor de sua incógnita, que no caso do exercício é a letra x.

Vamos supor que x = - 2, então substituindo no lugar do x o -2 termos:

$6x^2 - 8x$
$6 . (-2)^2 – 8 . (-2) =$
$6 . 4 + 16 =$
$24 + 16$
40

Multiplicação de monômios

Para multiplicarmos monômios não é necessário que eles sejam semelhantes, basta multiplicarmos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Sendo que quando multiplicamos as partes literais devemos usar a propriedade da potência que diz: $a^m . a^n = a^{m+n}$ (bases iguais na multiplicação repetimos a base e somamos os expoentes).

$(3a^2b) . (- 5ab^3)$ na multiplicação dos dois monômios, devemos multiplicar os coeficientes 3 . (-5) e na parte literal multiplicamos as que têm mesma base para que possamos usar a propriedade $a^m . a^n = a^{m+n}$.

$3 . (- 5) . a^2 . a . b . b^3$
$-15\ a^{2+1}\ b^{1+3}$
$-15\ a^3b^4$

Divisão de monômios

Para dividirmos os monômios não é necessário que eles sejam semelhantes, basta dividirmos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Sendo que quando dividirmos as partes literais devemos usar a propriedade da potência que diz: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (bases iguais na divisão repetimos a base e diminuímos os expoentes), sendo que $a \neq 0$.

$(-20x^2y^3) : (- 4xy^3)$ na divisão dos dois monômios, devemos dividir os coeficientes -20 e - 4 e na parte literal dividirmos as que têm mesma base para que possamos usar a propriedade am : $a^n = a^{m-n}$.

$-20 : (– 4) . x^2 : x . y^3 : y^3$
$5\ x^{2-1}\ y^{3-3}$
$5x^1y^0$
$5x$

Potenciação de monômios

Na potenciação de monômios devemos novamente utilizar uma propriedade da potenciação:

(I) $(a . b)^m = a^m . b^m$
(II) $(am)^n = a^{m.n}$
Veja alguns exemplos:
$(-5x^2b^6)^2$ aplicando a propriedade

(I). $(-5)^2 . (x^2)^2 . (b^6)^2$ aplicando a propriedade
(II) $25 . x^4 . b^{12}$ $25x^4b^{12}$

Exercícios

1. Determine o 7º termo do binômio (2x + 1)9, desenvolvido segundo as potências decrescentes de x.

2. Qual o termo médio do desenvolvimento de (2x + 3y)8?

3. Desenvolvendo o binômio (2x - 3y)3n, obtemos um polinômio de 16 termos. Qual o valor de n?

4. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de (x + 1/x)6.

5. Calcule: $(3x^2+2x-1) + (-2x^2+4x+2)$.

6. Efetue e simplifique o seguinte calculo algébrico: (2x+3).(4x+1).

7. Efetue e simplifique os seguintes cálculos algébricos:
a) $(x - y).(x^2 - xy + y^2)$
b) (3x - y).(3x + y).(2x - y)

8. Dada a expressão algébrica bc – b2, determine o seu valor numérico quando b = 2,2 e c = 1,8.

9. Calcule o valor numérico da expressão 2x3 – 10y, quando x = -3 e y = -4.

10. Um caderno curta y reais. Gláucia comprou 4 cadernos, Cristina comprou 6 cadernos, e Karina comprou 3. Qual é o monômio que expressa a quantia que as três gastaram juntas?

Respostas

1) Resposta "672x3".
Solução: Primeiro temos que aplicar a fórmula do termo geral de (a + b)n, onde:
a = 2x
b = 1
n = 9

Como queremos o sétimo termo, fazemos p = 6 na fórmula do termo geral e efetuamos os cálculos indicados.

Temos então:

$T_{6+1} = T_7 = C_{9,6} . (2x)^{9-6} \times (1)^6 = \frac{9!}{[(9-6)!\ x6!]} \times (2x)^3 \times 1 =$

$= \frac{9.8.7.6!}{3.2.1.6!} \times 8x^3 = 672x^3$

Portanto o sétimo termo procurado é 672x3.

2) Resposta "90720x4y4".

Solução: Temos:

a = 2x

b = 3y

n = 8

Sabemos que o desenvolvimento do binômio terá 9 termos, porque n = 8. Ora sendo $T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5\ T_6\ T_7\ T_8\ T_9$ os termos do desenvolvimento do binômio, o termo do meio (termo médio) será o T_5 (quinto termo).

Logo, o nosso problema resume-se ao cálculo do T5. Para isto, basta fazer p = 4 na fórmula do termo geral e efetuar os cálculos decorrentes. Teremos:

$T_{4+1} = T_5 = C_{8,4} . (2x)^{8-4} . (3y)^4 = \frac{8!}{[(8-4)!\ .4!]} . (2x)^4 . (3y)^4 =$

$= \frac{8.7.6.5.4!}{(4!.4.3.2.1} . 16x^4 . 81y^4$

Fazendo as contas vem:

$T_5 = 70.16.81.x^4 . y^4 = 90720x^4y^4$, que é o termo médio procurado.

3) Resposta "5".

Solução: Ora, se o desenvolvimento do binômio possui 16 termos, então o expoente do binômio é igual a 15.

Logo,

3n = 15 de onde se conclui que n = 5.

4) Resposta "20".

Solução: Sabemos que o termo independente de x é aquele que não depende de x, ou seja, aquele que não possui x.

Temos no problema dado:

a = x

$b = \frac{1}{x}$

n = 6.

Pela fórmula do termo geral, podemos escrever:

$T_{p+1} = C_{6,p} . x^{6-p} . (\frac{1}{x})_p = C_{6,p} . x^{6-p} . x^{-p} = C_{6,p} . x^{6-2p}.$

Ora, para que o termo seja independente de x, o expoente desta variável deve ser zero, pois $x^0 = 1$.

Logo, fazendo 6 - 2p = 0, obtemos p = 3. Substituindo então p por 6, teremos o termo procurado. Temos então:

$T_{3+1} = T_4 = C_{6,3} . x^0 = C_{6,3} = \frac{6!}{[(6-3)!.3!]} = \frac{6.5.4.3!}{3!.2.1} = 20$

Logo, o termo independente de x é o T_4 (quarto termo) que é igual a 20.

5) Solução:

$(3x^2+2x-1) + (-2x^2+4x+2)$

$3x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 4x + 2 =$

$x^2 + 6x + 1$

6) Solução:

$(2x+3).(4x+1)$

$8x^2 + 2x + 12x + 3 =$

$8x^2 + 14x + 3$

7) a - Solução:

$(x - y).(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - x^2y + xy^2 - x^2y + xy^2 - y^3 =$

$x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 =$

b - Solução:

$(3x - y).(3x + y).(2x - y)$

$(3x - y).(6x^2 - 3xy + 2xy - y^2) =$

$(3x - y).(6x^2 - xy - y^2) =$

$18x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 6x^2y + xy^2 + y^3 =$

$18x^3 - 9x^2y - 2xy^2 + y^3$

8) Resposta "-0,88".

Solução:

bc – b2 =

2,2 . 1,8 – 2,22 = (Substituímos as letras pelos valores passados no enunciado)

3,96 – 4,84 =

-0,88.

Portanto, o valor procurado é 0,88.

9) Resposta "-14".

Solução:

2x3 – 10y =

$2.(-3)^2 - 10.(-4)$ = (Substituímos as letras pelos valores do enunciado da questão)

2.(27) – 10.(-4) =

(-54) – (-40) =

-54 + 40 = -14.

Portanto -14 é o valor procurado na questão.

10) Resposta "13y reais".

Solução: Como Gláucia gastou 4y reais, Cristina 6y reais e Karina 3y reais, podemos expressar essas quantias juntas por:

4y + 6y + 3y =

(4 + 6 + 3)y =

13y

Importante: Numa expressão algébrica, se todos os monômios ou termos são semelhantes, podemos tornar mais simples a expressão somando algebricamente os coeficientes numéricos e mantendo a parte literal.

GRANDEZAS PROPORCIONAIS - REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA;

NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere a seguinte situação:

Joana gosta de queijadinha e por isso resolveu aprender a fazê-las. Adquiriu a receita de uma amiga. Nessa receita, os ingredientes necessários são:

3 ovos
1 lata de leite condensado
1 xícara de leite
2 colheres das de sopa de farinha de trigo
1 colher das de sobremesa de fermento em pó
1 pacote de coco ralado
1 xícara de queijo ralado
1 colher das de sopa de manteiga

Veja que:

- Para se fazerem 2 receitas seriam usados 6 ovos para 4 colheres de farinha;
- Para se fazerem 3 receitas seriam usados 9 ovos para 6 colheres de farinha;
- Para se fazerem 4 receitas seriam usados 12 ovos para 8 colheres de farinha;
- Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de ovos: 6 9 12
Sucessão do número de colheres de farinha: 4 6 8

Nessas sucessões as razões entre os termos correspondentes são iguais:

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Assim: $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Dizemos, então, que:

- os números da sucessão 6, 9, 12 são **diretamente proporcionais** aos da sucessão 4, 6, 8;
- o número $\frac{3}{2}$, que é a razão entre dois termos correspondentes, é chamado **fator de proporcionalidade**.

Duas sucessões de números não-nulos são diretamente proporcionais quando as razões entre cada termo da primeira sucessão e o termo correspondente da segunda sucessão são iguais.

Exemplo 1: Vamos determinar *x* e *y*, de modo que as sucessões sejam diretamente proporcionais:

2 8 *y*
3 *x* 21

Como as sucessões são diretamente proporcionais, as razões são iguais, isto é:

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{x}=\frac{y}{21}$$

$\frac{2}{3}=\frac{8}{x}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}=\frac{y}{21}$

$2x = 3 . 8$ $\qquad$ $3y = 2 . 21$

$2x = 24$ $\qquad$ $3y = 42$

$x=\frac{24}{2}$ $\qquad$ $y=\frac{42}{3}$

$x=12$ $\qquad$ $y=14$

Logo, $x = 12$ e $y = 14$

Exemplo 2: Para montar uma pequena empresa, Júlio, César e Toni formaram uma sociedade. Júlio entrou com R$ 24.000,00, César com R$ 27.000,00 e Toni com R$ 30.000,00. Depois de 6 meses houve um lucro de R$ 32.400,00 que foi repartido entre eles em partes diretamente proporcionais à quantia investida. Calcular a parte que coube a cada um.

Solução:

Representando a parte de Júlio por *x*, a de César por *y*, e a de Toni por *z*, podemos escrever:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=32400 \\ \frac{x}{24000}=\frac{y}{27000}=\frac{z}{30000} \end{array}\right\}$$

$$\frac{x}{24000}=\frac{y}{27000}=\frac{z}{30000}=\frac{\overbrace{x+y+z}^{32400}}{\underbrace{24000+27000+30000}_{81000}}$$

Resolvendo as proporções:

$$\frac{x}{24000}=\frac{32400^{4}}{81000^{10}}$$

$10x = 96\,000$
$x = 9\,600$

$$\frac{y}{27000}=\frac{4}{10}$$

$10y = 108\,000$

$y = 10\,800$

NOVA CONCURSOS

$$\frac{z}{3000}=\frac{4}{10}$$

10z = 120 000
z = 12 000

Logo, Júlio recebeu R$ 9.600,00, César recebeu R$ 10.800,00 e Toni, R$ 12.000,00.

Números Inversamente Proporcionais

Considere os seguintes dados, referentes à produção de sorvete por uma máquina da marca x-5:

1 máquina x-5 produz 32 litros de sorvete em 120 min.
2 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 60 min.
4 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 30 min.
6 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 20 min.

Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de máquinas: 1 2 4 6
Sucessão do número de minutos: 120 60 30 20

Nessas sucessões as razões entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do termo correspondente da segunda são iguais:

$$\frac{1}{\frac{1}{120}}=\frac{2}{\frac{1}{60}}=\frac{4}{\frac{1}{30}}=\frac{6}{\frac{1}{20}}=120$$

Dizemos, então, que:
- os números da sucessão 1, 2, 4, 6 são inversamente proporcionais aos da sucessão 120, 60, 30, 20;
- o número 120, que é a razão entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do seu correspondente na segunda, é chamado fator de proporcionalidade.

Observando que

$\frac{1}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo que 1.120=120 $\frac{4}{\frac{1}{30}}$ é mesmo que 4.30=120

$\frac{2}{\frac{1}{60}}$ é o mesmo que 2.60=120 $\frac{6}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo que 6.20= 120

Podemos dizer que: Duas sucessões de números não-nulos são inversamente proporcionais quando os produtos de cada termo da primeira sucessão pelo termo correspondente da segunda sucessão são iguais.

Exemplo 1: Vamos determinar *x* e *y*, de modo que as sucessões sejam inversamente proporcionais:

4 *x* 8
20 16 *y*

Para que as sucessões sejam inversamente proporcionais, os produtos dos termos correspondentes deverão ser iguais. Então devemos ter:

4 . 20 = 16 . x = 8 . y

16 . x = 4 . 20
16x = 80
x = 80/16
x = 5

8 . y = 4 . 20
8y = 80
y = 80/8
y = 10

Logo, x = 5 e y = 10.

Exemplo 2: Vamos dividir o número 104 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Representamos os números procurados por *x*, *y* e *z*. E como as sucessões (*x, y, z*) e (2, 3, 4) devem ser inversamente proporcionais, escrevemos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}} \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}}=\frac{\overbrace{x+y+z}^{104}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

Como, $\frac{104}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{104}{\frac{6+4+3}{12}}=\frac{104}{\frac{13}{12}}=104:\frac{13}{12}=104^{8}.\frac{12}{13^{1}}=\frac{96}{1}$, vem

$x=96^{48}.\frac{1}{2^{1}}$ $y=96^{32}.\frac{1}{3^{1}}$ $z=96^{24}.\frac{1}{4^{1}}$

x = 48 y = 32 z = 24

Logo, os números procurados são 48, 32 e 24.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Considere uma usina de açúcar cuja produção, nos cinco primeiros dias da safra de 2005, foi a seguinte:

Dias	Sacos de açúcar
1	5 000
2	10 000
3	15 000
4	20 000
5	25 000

Com base na tabela apresentada observamos que:

- duplicando o número de dias, duplicou a produção de açúcar;
- triplicando o número de dias, triplicou a produção de açúcar, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **tempo** e **produção** são **diretamente proporcionais**.

Observe também que, duas a duas, as razões entre o número de dias e o número de sacos de açúcar são iguais:

$$\frac{1}{2}=\frac{5000}{10000} \quad \frac{1}{4}=\frac{5000}{20000} \quad \frac{2}{3}=\frac{10000}{15000} \quad \frac{2}{5}=\frac{10000}{25000} \quad \frac{3}{5}=\frac{15000}{25000}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5000}{15000} \quad \frac{1}{5}=\frac{5000}{25000} \quad \frac{2}{4}=\frac{10000}{20000} \quad \frac{3}{4}=\frac{15000}{20000} \quad \frac{4}{5}=\frac{20000}{25000}$$

Isso nos leva a estabelecer que: Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual à razão entre os valores da segunda.

Tomemos agora outro exemplo.

Com 1 tonelada de cana-de-açúcar, uma usina produz 70l de álcool.

De acordo com esses dados podemos supor que:

- com o dobro do número de toneladas de cana, a usina produza o dobro do número de litros de álcool, isto é, 140l;
- com o triplo do número de toneladas de cana, a usina produza o triplo do número de litros de álcool, isto é, 210l.

Então concluímos que as grandezas quantidade de cana-de-açúcar e número de litros de álcool são **diretamente proporcionais.**

Grandezas Inversamente Proporcionais

Considere uma moto cuja velocidade média e o tempo gasto para percorrer determinada distância encontram-se na tabela:

Velocidade	Tempo
30 km/h	12 h
60 km/h	6 h
90 km/h	4 h
120 km/h	3 h

Com base na tabela apresentada observamos que:

- duplicando a velocidade da moto, o número de horas fica reduzido à metade;
- triplicando a velocidade, o número de horas fica reduzido à terça parte, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Observe que, duas a duas, as razões entre os números que indicam a velocidade são iguais ao inverso das razões que indicam o tempo:

$\frac{30}{60}=\frac{6}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{6}$

$\frac{30}{90}=\frac{4}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{4}$

$\frac{30}{120}=\frac{3}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{3}$

$\frac{60}{90}=\frac{4}{6}$ inverso da razão $\frac{6}{4}$

$\frac{60}{120}=\frac{3}{6}$ inverso da razão $\frac{6}{3}$

$\frac{90}{120}=\frac{3}{6}$ inverso da razão $\frac{4}{3}$

Podemos, então, estabelecer que: Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores da segunda.

Acompanhe o exemplo a seguir:

Cinco máquinas iguais realizam um trabalho em 36 dias. De acordo com esses dados, podemos supor que:

- o dobro do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na metade do tempo, isto é, 18 dias;
- o triplo do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na terça parte do tempo, isto é, 12 dias.

Então concluímos que as grandezas **quantidade de máquinas** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

QUESTÕES

1 - (PGE/BA – ASSISTENTE DE PROCURADORIA – FCC/2013) Uma faculdade irá inaugurar um novo espaço para sua biblioteca, composto por três salões. Estima-se que, nesse espaço, poderão ser armazenados até 120.000 livros, sendo 60.000 no salão maior, 15.000 no menor e os demais no intermediário. Como a faculdade conta atualmente com apenas 44.000 livros, a bibliotecária decidiu colocar, em cada salão, uma quantidade de livros diretamente proporcional à respectiva capacidade máxima de armazenamento. Considerando a estimativa feita, a quantidade de livros que a bibliotecária colocará no salão intermediário é igual a

A) 17.000.
B) 17.500.
C) 16.500.
D) 18.500.
E) 18.000.

2 - (PREF. PAULISTANA/PI – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – IMA/2014) Uma herança de R$ 750.000,00 deve ser repartida entre três herdeiros, em partes proporcionais a suas idades que são de 5, 8 e 12 anos. O mais velho receberá o valor de:

A) R$ 420.000,00
B) R$ 250.000,00
C) R$ 360.000,00
D) R$ 400.000,00
E) R$ 350.000,00

3 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Uma empresa foi constituída por três sócios, que investiram, respectivamente, R$60.000,00, R$40.000,00 e R$20.000,00. No final do primeiro ano de funcionamento, a empresa obteve um lucro de R$18.600,00 para dividir entre os sócios em quantias diretamente proporcionais ao que foi investido. O sócio que menos investiu deverá receber

A) R$2.100,00.
B) R$2.800,00.
C) R$3.400,00.
D) R$4.000,00.
E) R$3.100,00.

4 - (METRÔ/SP - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Um mosaico foi construído com triângulos, quadrados e hexágonos. A quantidade de polígonos de cada tipo é proporcional ao número de lados do próprio polígono. Sabe-se que a quantidade total de polígonos do mosaico é 351. A quantidade de triângulos e quadrados somada supera a quantidade de hexágonos em

A) 108.
B) 27.
C) 35.
D) 162.
E) 81.

5 - (PC/SP – OFICIAL ADMINISTRATIVO – VUNESP/2014) Foram construídos dois reservatórios de água. A razão entre os volumes internos do primeiro e do segundo é de 2 para 5, e a soma desses volumes é $14m^3$. Assim, o valor absoluto da diferença entre as capacidades desses dois reservatórios, em litros, é igual a

A) 8000.
B) 6000.
C) 4000.
D) 6500.
E) 9000.

6 – (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Na tabela abaixo, a sequência de números da coluna A é inversamente proporcional à sequência de números da coluna B.

A	B
16	60
12	X
8	120
4	240

A letra X representa o número

A) 90.
B) 80.
C) 96.
D) 84.
E) 72.

7 - (SAMU/SC – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – SPDM/2012) Carlos dividirá R$ 8.400,00 de forma inversamente proporcional à idade de seus dois filhos: Marcos, de12 anos, e Fábio, de 9 anos. O valor que caberá a Fábio será de:

A) R$ 3.600,00
B) R$ 4.800,00
C) R$ 7.000,00
D) R$ 5.600,00

8 - (TRT – FCC) Três técnicos judiciários arquivaram um total de 382 processos, em quantidades inversamente proporcionais as suas respectivas idades: 28, 32 e 36 anos. Nessas condições, é correto afirmar que o número de processos arquivados pelo mais velho foi:

A) 112
B) 126
C) 144
D) 152
E) 164

RESPOSTAS

1 - RESPOSTA: "C".

Como é diretamente proporcional, podemos analisar da seguinte forma:

No salão maior, percebe-se que é a metade dos livros, no salão menor é 1/8 dos livros.

Então, como tem 44.000 livros, no salão maior ficará com 22.000 e no salão menor é 5.500 livros.

22000+5500=27500

Salão intermediário:44.000-27.500=16.500 livros.

2 - RESPOSTA: "C".

5x+8x+12x=750.000
25x=750.000
X=30.000
O mais velho receberá:12 · 30000=360.000,00

3 - RESPOSTA: "E".

20000 :40000 :60000
1: 2: 3
k+2k+3k=18600
6k=18600
k=3100
O sócio que investiu R$20.000,00 receberá R$3.100,00.

4 - RESPOSTA: "B".

$$triângulos: 3x$$
$$quadrado: 4x$$
$$hexágono: 6x$$

$$3x + 4x + 6x = 351$$
$$13x = 351$$
$$x = 27$$
$$3x + 4x = 3.27 + 4.27 = 81 + 108 = 189$$
$$6x = 6.27 = 162$$

189-162= 27

5 - RESPOSTA: "B".

Primeiro:2k
Segundo:5k
2k+5k=14
7k=14
K=2
Primeiro=2.2=4
Segundo=5.2=10
Diferença=10-4=6m³

1m³------1000L
6--------x
X=6000 l

6 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{16}{\frac{1}{60}} = \frac{12}{\frac{1}{X}}$$
$$16 \cdot 60 = 12 \cdot X$$

X=80

7 - RESPOSTA: "B".

Marcos: a
Fábio: b
a+b=8400
b=4800

$$\frac{a}{\frac{1}{12}} + \frac{b}{\frac{1}{9}} = \frac{a+b}{\frac{1}{12}+\frac{1}{9}}$$

$$\frac{b}{\frac{1}{9}} = \frac{8400}{\frac{3}{36}+\frac{4}{36}}$$

$$\frac{7}{36}b = \frac{8400}{9}$$

8 - RESPOSTA "A".

$$\frac{x}{\frac{1}{28}} = \frac{y}{\frac{1}{32}} = \frac{z}{\frac{1}{36}} \Rightarrow \frac{z}{\frac{1}{36}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{28}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}} \Rightarrow \frac{z}{\frac{1}{36}} = \frac{382}{\frac{72+63+56}{2016}} \Rightarrow$$
$$\frac{z}{\frac{1}{36}} = \frac{382}{\frac{191}{2016}} \Rightarrow \frac{z}{\frac{1}{36}} = 382 \cdot \frac{2016}{191} \Rightarrow \frac{z}{\frac{1}{36}} = 2 \cdot 2016 \Rightarrow z = 4032 \cdot \frac{1}{36} \Rightarrow z = 112$$

$\frac{1}{28} + \frac{1}{32} + \frac{1}{\quad}$ mos os inversos dos números, ou seja: $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{72+63+53}{504} = \frac{191}{504}$ inadores por 4, ficamos com: . Eliminando-se os denominadores, temos 191 que corresponde a uma soma. Dividindo-se a soma pela soma: $382 \div 191 = 2 \cdot 56 = 112$

NOVA CONCURSOS

Razão

Sejam dois números reais *a* e *b*, com $b \neq 0$. Chama-se razão entre *a* e *b* (nessa ordem) o quociente a b, ou .

A razão é representada por um número racional, mas é lida de modo diferente.

Exemplos

a) A fração $\frac{3}{5}$ lê-se: "três quintos".

b) A razão $\frac{3}{5}$ lê-se: "3 para 5".

Os termos da razão recebem nomes especiais.

a) Na fração $\frac{3}{5}$: O número 3 é **numerador**; O número 5 é **denominador**

a) Na razão $\frac{3}{5}$: O número 3 é **antecedente**; O número 5 é **consequente**

Exemplo 1

A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$; já a razão entre 50 e 20 é $\frac{50}{20}=\frac{5}{2}$.

Exemplo 2

Numa classe de 42 alunos há 18 rapazes e 24 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$, o que significa que para "cada 3 rapazes há 4 moças". Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$, o que equivale a dizer que "de cada 7 alunos na classe, 3 são rapazes".

Razão entre grandezas de mesma espécie

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

Uma sala tem 18 m^2. Um tapete que ocupar o centro dessa sala mede 384 dm^2. Vamos calcular a razão entre a área do tapete e a área da sala.

Primeiro, devemos transformar as duas grandezas em uma mesma unidade:

Área da sala: 18 m^2 = 1 800 dm^2

Área do tapete: 384 dm^2

Estando as duas áreas na mesma unidade, podemos escrever a razão:

$$\frac{384 dm^2}{1800 dm^2}=\frac{384}{1800}=\frac{16}{75}$$

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Exemplo 1

Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170.

Distância percorrida: 170 km – 30 km = 140 km
Tempo gasto: 11h – 9h = 2h

Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$\frac{140 km}{2h}=70 km/h$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **velocidade média**.

Observe que:
- as grandezas "quilômetro e hora" são de naturezas diferentes;
- a notação km/h (lê-se: "quilômetros por hora") deve acompanhar a razão.

Exemplo 2

A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km^2 e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995.

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km^2 (hab./km^2):

$$\frac{6628000}{927286}\cong 71,5 hab./km^2$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **densidade demográfica**.

A notação hab./km^2 (lê-se: "habitantes por quilômetro quadrado") deve acompanhar a razão.

Exemplo 3

Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$\frac{83,76 km}{8l}\cong 10,47 km/l$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **consumo médio**.

A notação km/l (lê-se: "quilômetro por litro") deve acompanhar a razão.

Exemplo 4

Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

$$Escala = \frac{comprimento \bullet no \bullet desenho}{comprimento \bullet real} = \frac{20cm}{8m} = \frac{20cm}{800cm} = \frac{1}{40} ou 1:40$$

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se **Escala.**

Proporção

A igualdade entre duas razões recebe o nome de **proporção**.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 está para 5 assim como 6 está para 10"), os números 3 e 10 são chamados extremos, e os números 5 e 6 são chamados meios.

Observemos que o produto 3 x 10 = 30 é igual ao produto 5 x 6 = 30, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exemplo 1

Na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos 2 x 9 = 3 x 6 = 18;

e em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, temos 4 x 4 = 1 x 16 = 16.

Exemplo 2

Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.

Se uma criança tem 12 kg, a dosagem correta *x* é dada por:

$$\frac{5gotas}{2kg} = \frac{x}{12kg} \rightarrow x = 30gotas$$

Por outro lado, se soubermos que foram corretamente ministradas 20 gotas a uma criança, podemos concluir que seu "peso" é 8 kg, pois:

$$\frac{5gotas}{2kg} = 20gotas / p \rightarrow p = 8kg$$

(nota: o procedimento utilizado nesse exemplo é comumente chamado de regra de três simples.)

Propriedades da Proporção

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios: essa propriedade possibilita reconhecer quando duas razões formam ou não uma proporção.

$\frac{4}{3} e \frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois

Produtos dos extremos $\leftarrow \underbrace{4.9}_{36} = \underbrace{3.12}_{36} \rightarrow$ Produtos dos meios.

A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+2}{5} = \frac{10+4}{10} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{14}{10} \end{cases}$$

ou

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+2}{2} = \frac{10+4}{4} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \end{cases}$$

A diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4-3}{4} = \frac{8-6}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \end{cases}$$

ou

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{cases}$$

A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12+3}{8+2} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{12}{8} \end{cases}$$

ou

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12+3}{8+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

A diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-1}{15-5} = \frac{3}{15} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{3}{15} \end{cases}$$

ou

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-1}{15-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

NOVA CONCURSOS

Questões

1 - (VUNESP - AgSegPenClasseI-V1 - 2012) – Em um concurso participaram 3000 pessoas e foram aprovadas 1800. A razão do número de candidatos aprovados para o total de candidatos participantes do concurso é:

A) 2/3
B) 3/5
C) 5/10
D) 2/7
E) 6/7

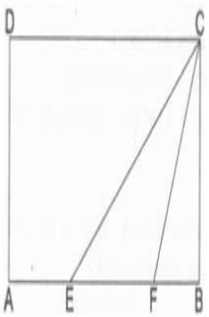
2 – (VNSP1214/001-AssistenteAdministrativo-I – 2012) – Em uma padaria, a razão entre o número de pessoas que tomam café puro e o número de pessoas que tomam café com leite, de manhã, é 2/3. Se durante uma semana, 180 pessoas tomarem café de manhã nessa padaria, e supondo que essa razão permaneça a mesma, pode-se concluir que o número de pessoas que tomarão café puro será:

A) 72
B) 86
C) 94
D) 105
E) 112

3 - (PREF. NEPOMUCENO/MG – TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO – CONSULPLAN/2013) Num zoológico, a razão entre o número de aves e mamíferos é igual à razão entre o número de anfíbios e répteis. Considerando que o número de aves, mamíferos e anfíbios são, respectivamente, iguais a 39, 57 e 26, quantos répteis existem neste zoológico?

A) 31
B) 34
C) 36
D) 38
E) 43

4 - (TRT - Técnico Judiciário) Na figura abaixo, os pontos E e F dividem o lado AB do retângulo ABCD em segmentos de mesma medida.



A razão entre a área do triângulo (CEF) e a área do retângulo é:

a) 1/8
b) 1/6
c) 1/2
d) 2/3
e) 3/4

5 - (CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012) Na biblioteca de uma faculdade, a relação entre a quantidade de livros e de revistas era de 1 para 4. Com a compra de novos exemplares, essa relação passou a ser de 2 para 3.

Assinale a única tabela que está associada corretamente a essa situação.

A)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	50	200
Após a compra	200	300

B)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	50	200
Após a compra	300	200

C)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	200	300

D)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	300	200

E)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	200
Após a compra	50	300

6 **- (**CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012) Uma rede varejista teve um faturamento anual de 4,2 bilhões de reais com 240 lojas em um estado. Considerando que esse faturamento é proporcional ao número de lojas, em outro estado em que há 180 lojas, o faturamento anual, em bilhões de reais, foi de

A) 2,75
B) 2,95
C) 3,15
D) 3,35
E) 3,55

7 - **(**PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) De cada dez alunos de uma sala de aula, seis são do sexo feminino. Sabendo que nesta sala de aula há dezoito alunos do sexo feminino, quantos são do sexo masculino?

A) Doze alunos.
B) Quatorze alunos.
C) Dezesseis alunos.
D) Vinte alunos.

8 - (TJ/SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2013) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, 2/5 dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que 1/4 dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, nessa escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de

A) 2:3
B) 1:3
C) 1:6
D) 3:4
E) 2:5

9 - (PMPP1101/001-Escriturário-I-manhã – 2012) – A razão entre as idades de um pai e de seu filho é hoje de 5/2. Quando o filho nasceu, o pai tinha 21 anos. A idade do filho hoje é de

A) 10 anos
B) 12 anos
C) 14 anos
D) 16 anos
E) 18 anos

10 - (FAPESP – ANALISTA ADMINISTRATIVO – VUNESP/2012) Em uma fundação, verificou-se que a razão entre o número de atendimentos a usuários internos e o número de atendimento total aos usuários (internos e externos), em um determinado dia, nessa ordem, foi de 3/5. Sabendo que o número de usuários externos atendidos foi 140, pode-se concluir que, no total, o número de usuários atendidos foi

A) 84
B) 100
C) 217
D) 280
E) 350

Respostas

1 – Resposta "B"

$$\frac{número\ de\ candidatos\ aprovados}{número\ total\ de\ candidatos} = \frac{1800}{3000} = \frac{18^3}{30^5} = \frac{3}{5}$$

2 – Resposta "A"

Sejam CP e CL o número de pessoas que consumiram café puro e café com leite respectivamente. Como na semana o número total de pessoas que consumiram café foi de 180, temos que:

CP+CL = 180

A relação encontrada entre eles é de $\frac{2}{3}$; $\frac{CP}{CL} = \frac{2}{3}$ assim aplicando a propriedade da proporção teremos:

$$\frac{CP+CL}{CP} = \frac{2+3}{2} \rightarrow \frac{180}{CP} = \frac{5}{2} \rightarrow 180.2 = CP.5 \rightarrow CP = \frac{360}{5} \rightarrow CP = 72$$

3 - RESPOSTA: "D"

$$\frac{Aves}{mamíferos} = \frac{anfíbios}{répteis}$$

$\frac{39}{57} = \frac{26}{répteis}$ ∴ Aplicando-se o produto dos meios pelos extremos temos:

$$répteis = 57 \cdot \frac{26}{39} = 38$$

4 - Resposta "B"

04) $A = x \cdot y \quad A\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot y = \frac{xy}{6}$

$\frac{x}{3}\ \frac{x}{3}\ \frac{x}{3}\ \frac{A\Delta}{A} = \frac{6}{xy} = \frac{1}{6}$

5 - RESPOSTA: "A"

Para cada 1 livro temos 4 revistas

Significa que o número de revistas é 4x o número de livros.

50 livros: 200 revistas

Depois da compra

2 livros :3 revistas

200 livros: 300 revistas

6 - RESPOSTA: "C"

$$\frac{4{,}2}{240} = \frac{x}{180}$$

240.x = 4,2.180 → 240x = 756 → x = 3,15 bilhões

7 - RESPOSTA: "A"

Como 6 são do sexo feminino, 4 são do sexo masculino(10-6 = 4) .Então temos a seguinte razão: $\frac{6}{4}$

$$\frac{6}{4} = \frac{18}{x} \rightarrow 6x = 72 \rightarrow x = 12$$

8- RESPOSTA: "C"

Se 2/5 chegaram atrasados

$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ chegaram no horário

$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ tiveram mais de 30 minutos de atraso

$$razão = \frac{tiveram\ mais\ de\ 30\ \min\ de\ atraso}{chegaram\ no\ horário} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}$$

$$razão = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{6}\ ou\ 1:6$$

9 – RESPOSTA: "C"

A razão entre a idade do pai e do filho é respectivamente $\frac{P}{F} = \frac{5}{2}$, se quando o filho nasceu o pai tinha 21, significa que hoje o pai tem x + 21 , onde x é a idade do filho. Montando a proporção teremos:

$$\frac{x+21}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2.(x+21) = 5x \Rightarrow 2x + 42 = 5x \Rightarrow 5x - 2x = 42 \Rightarrow 3x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{3}$$

$$x = 14\ anos$$

10 - RESPOSTA: "E"

Usuários internos: I

Usuários externos : E

$\frac{I}{I+E} = \frac{3}{5} = \frac{I}{I+140}$ ➔ 5I = 3I+420 ➔2I = 420 ➔I = 210

I+E = 210+140 = 350

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos através de um processo prático, chamado **regra de três simples**.

Exemplo 1: Um carro faz 180 km com 15L de álcool. Quantos litros de álcool esse carro gastaria para percorrer 210 km?

Solução:

O problema envolve duas grandezas: distância e litros de álcool.

Indiquemos por x o número de litros de álcool a ser consumido.

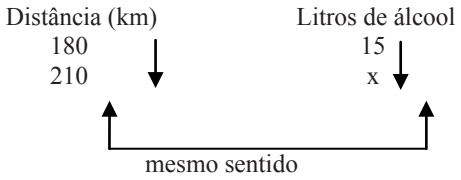
Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x

Na coluna em que aparece a variável x ("litros de álcool"), vamos colocar uma flecha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15 ↓
210	x ↓

Observe que, se duplicarmos a distância, o consumo de álcool também duplica. Então, as grandezas **distância** e **litros de álcool** são **diretamente proporcionais**. No esquema que estamos montando, indicamos esse fato colocando uma flecha na coluna "distância" no **mesmo sentido** da flecha da coluna "litros de álcool":



Armando a proporção pela orientação das flechas, temos:

$$\frac{180^{6}}{210^{7}} = \frac{15}{x} \rightarrow 6x = 7 \cdot 15 \rightarrow 6x = 105 \rightarrow x = \frac{105}{6} \rightarrow x = 17{,}5$$

Resposta: O carro gastaria 17,5 L de álcool.

Exemplo 2: Viajando de automóvel, à velocidade de 60 km/h, eu gastaria 4 h para fazer certo percurso. Aumentando a velocidade para 80 km/h, em quanto tempo farei esse percurso?

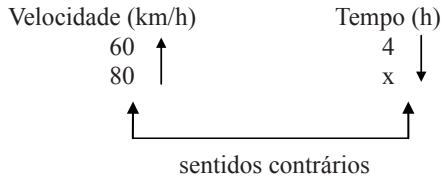
Solução: Indicando por x o número de horas e colocando as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha, temos:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

Na coluna em que aparece a variável x ("tempo"), vamos colocar uma flecha:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4 ↓
80	x ↓

Observe que, se duplicarmos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade. Isso significa que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**. No nosso esquema, esse fato é indicado colocando-se na coluna "velocidade" uma flecha em **sentido contrário** ao da flecha da coluna "tempo":



Na montagem da proporção devemos seguir o sentido das flechas. Assim, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{80^{4}}{60^{3}} \rightarrow 4x = 4 \cdot 3 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{4} \rightarrow x = 3$$

Resposta: Farei esse percurso em 3 h.

Exemplo 3: Ao participar de um treino de Fórmula 1, um competidor, imprimindo velocidade média de 200 km/h, faz o percurso em 18 segundos. Se sua velocidade fosse de 240 km/h, qual o tempo que ele teria gasto no percurso?

Vamos representar pela letra *x* o tempo procurado.

Estamos relacionando dois valores da grandeza velocidade (200 km/h e 240 km/h) com dois valores da grandeza tempo (18 s e *x* s).

Queremos determinar um desses valores, conhecidos os outros três.

Velocidade	Tempo gasto para fazer o percurso
200 km/h	18 s
240 km/h	*x*

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto para fazer o percurso cairá para a metade; logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e *x*.

Daí temos:

$200 \cdot 18 = 240 \cdot x$

$3\,600 = 240x$

$240x = 3\,600$

$x = \frac{3600}{240}$

$x = 15$

Conclui-se, então, que se o competidor tivesse andando em 200 km/h, teria gasto 18 segundos para realizar o percurso.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais, é chamado **regra de três composta**.

Exemplo 1: Em 4 dias 8 máquinas produziram 160 peças. Em quanto tempo 6 máquinas iguais às primeiras produziriam 300 dessas peças?

Solução: Indiquemos o número de dias por *x*. Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma só coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha. Na coluna em que aparece a variável *x* ("dias"), coloquemos uma flecha:

Máquinas	Peças	Dias
8	160	4 ↓
6	300	x ↓

Comparemos cada grandeza com aquela em que está o x.

As grandezas **peças** e **dias** são diretamente proporcionais. No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "peças" uma flecha no **mesmo sentido** da flecha da coluna "dias":

Máquinas	Peças	Dias
8	160 ↓	4 ↓
6	300 ↓	x ↓

Mesmo sentido

As grandezas **máquinas** e **dias** são inversamente proporcionais (duplicando o número de máquinas, o número de dias fica reduzido à metade). No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna (máquinas) uma flecha no sentido contrário ao da flecha da coluna "dias":

Máquinas	Peças	Dias
8 ↑	160 ↓	4 ↓
6	300	x

Sentidos contrários

Agora vamos montar a proporção, igualando a razão que contém o *x*, que é $\frac{4}{x}$, com o produto das outras razões, obtidas segundo a orientação das flechas $\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{160}{300}\right)$:

$$\frac{4}{x}=\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{8}^{4}}\cdot\frac{\cancel{160}^{8^{1}}}{\cancel{300}^{15^{5}}}$$

$$\frac{4}{x}=\frac{2}{5} \Rightarrow 2x = 4 \cdot 5 \quad a \quad x=\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{2}^{1}} \Rightarrow x = 10$$

Resposta: Em 10 dias.

Exemplo 2: Uma empreiteira contratou 210 pessoas para pavimentar uma estrada de 300 km em 1 ano. Após 4 meses de serviço, apenas 75 km estavam pavimentados. Quantos empregados ainda devem ser contratados para que a obra seja concluída no tempo previsto?

Solução: Em $\frac{1}{3}$ de ano foi pavimentada $\frac{1}{4}$ de estrada.

Comparemos cada grandeza com aquela em que está o x.

Pessoas	Estrada	Tempo
210 ↓	75	4 ↑
X	225	8

Sentido contrário

As grandezas **"pessoas"** e **"tempo"** são inversamente proporcionais (duplicando o número de pessoas, o tempo fica reduzido à metade). No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "tempo" uma flecha no sentido contrário ao da flecha da coluna "pessoas":

Pessoas	Estrada	Tempo
210 ↓	75 ↓	4
X	225	8

Mesmo Sentido

As grandezas **"pessoas"** e **"estrada"** são diretamente proporcionais. No nosso esquema isso será indicado colocando-se na coluna "estrada" uma flecha no **mesmo sentido** da flecha da coluna "pessoas":

$$\frac{210}{x}=\frac{\cancel{75}^{1}}{\cancel{225}^{3}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}}$$

$$\frac{210}{x}=\frac{2}{3}$$

$$210.3 = 2.x \rightarrow 2x = 630 \rightarrow x = 315$$

Como já haviam 210 pessoas trabalhando, logo 315 – 210 = 105 pessoas.

Reposta: Devem ser contratados 105 pessoas.

Questões

1 – (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013) Um atleta está treinando para fazer 1 500 metros em 5 minutos. Como ele pretende manter um ritmo sempre constante, deve fazer cada 100 metros em

A) 15 segundos.
B) 20 segundos.
C) 22 segundos.
D) 25 segundos.
E) 30 segundos.

2 – (SAP/SP – AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA DE CLASSE I – VUNESP/2013) Uma máquina demora 1 hora para fabricar 4 500 peças. Essa mesma máquina, mantendo o mesmo funcionamento, para fabricar 3 375 dessas mesmas peças, irá levar

A) 55 min.
B) 15 min.
C) 35 min.
D) 1h 15min.
E) 45 min.

3 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Manoel vendeu seu carro por R$27.000,00(-vinte e sete mil reais) e teve um prejuízo de 10%(dez por cento) sobre o valor de custo do tal veículo, por quanto Manoel adquiriu o carro em questão?

A) R$24.300,00
B) R$29.700,00
C) R$30.000,00
D)R$33.000,00
E) R$36.000,00

4 - (DNOCS -2010) Das 96 pessoas que participaram de uma festa de Confraternização dos funcionários do Departamento Nacional de Obras Contra as Secas, sabe-se que 75% eram do sexo masculino. Se, num dado momento antes do término da festa, foi constatado que a porcentagem dos homens havia se reduzido a 60% do total das pessoas presentes, enquanto que o número de mulheres permaneceu inalterado, até o final da festa, então a quantidade de homens que haviam se retirado era?

A) 36.
B) 38.
C) 40.
D) 42.
E) 44.

5 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Em uma maquete, uma janela de formato retangular mede 2,0 cm de largura por 3,5 cm de comprimento. No edifício, a largura real dessa janela será de 1,2 m. O comprimento real correspondente será de:

A) 1,8 m
B) 1,35 m
C) 1,5 m
D) 2,1 m
E) 2,45 m

6 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O trabalho de varrição de 6.000 m² de calçada é feita em um dia de trabalho por 18 varredores trabalhando 5 horas por dia. Mantendo-se as mesmas proporções, 15 varredores varrerão 7.500 m² de calçadas, em um dia, trabalhando por dia, o tempo de

A) 8 horas e 15 minutos.
B) 9 horas.
C) 7 horas e 45 minutos.
D) 7 horas e 30 minutos.
E) 5 horas e 30 minutos.

7 – (PREF. CORBÉLIA/PR – CONTADOR – FAUEL/2014) Uma equipe constituída por 20 operários, trabalhando 8 horas por dia durante 60 dias, realiza o calçamento de uma área igual a 4800 m². Se essa equipe fosse constituída por 15 operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 80 dias, faria o calçamento de uma área igual a:

A) 4500 m²
B) 5000 m²
C) 5200 m²
D) 6000 m²
E) 6200 m²

8 – (PC/SP – OFICIAL ADMINISTRATIVO – VUNESP/2014) Dez funcionários de uma repartição trabalham 8 horas por dia, durante 27 dias, para atender certo número de pessoas. Se um funcionário doente foi afastado por tempo indeterminado e outro se aposentou, o total de dias que os funcionários restantes levarão para atender o mesmo número de pessoas, trabalhando uma hora a mais por dia, no mesmo ritmo de trabalho, será:

A) 29.
B) 30.
C) 33.
D) 28.
E) 31.

9 - (TRF 3ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2014) Sabe-se que uma máquina copiadora imprime 80 cópias em 1 minuto e 15 segundos. O tempo necessário para que 7 máquinas copiadoras, de mesma capacidade que a primeira citada, possam imprimir 3360 cópias é de

A) 15 minutos.
B) 3 minutos e 45 segundos.
C) 7 minutos e 30 segundos.
D) 4 minutos e 50 segundos.
E) 7 minutos.

10 – (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Os 5 funcionários de uma padaria produzem, utilizando três fornos, um total de 2500 pães ao longo das 10 horas de sua jornada de trabalho. No entanto, o dono de tal padaria pretende contratar mais um funcionário, comprar mais um forno e reduzir a jornada de trabalho de seus funcionários para 8 horas diárias. Considerando que todos os fornos e funcionários produzem em igual quantidade e ritmo, qual será, após as mudanças, o número de pães produzidos por dia?

A) 2300 pães.
B) 3000 pães.
C) 2600 pães.
D) 3200 pães.
E) 3600 pães.

Respostas

1- RESPOSTA: "B"

Como as alternativas estão em segundo, devemos trabalhar com o tempo em segundo.

1 minuto = 60 segundos ; logo 5minutos = 60.5 = 300 segundos

Metro		Segundos
1500	-----	300
100	-----	x

Como estamos trabalhando com duas grandezas diretamente proporcionais temos:

$$\frac{\cancel{1500}^{15}}{\cancel{100}^{1}} = \frac{300}{x}$$

15.x = 300.1 ➜ 15x = 300 ➜ x = 20 segundos

2- RESPOSTA: "E".
Peças Tempo
4500 ----- 1 h
3375 ----- x

Como estamos trabalhando com duas grandezas diretamente proporcionais temos:

$$\frac{4500}{3375} = \frac{1}{x}$$

4500.x = 3375.1 ➜ x = 0,75 h
Como a resposta esta em minutos devemos achar o correspondente em minutos
Hora Minutos
1 ------ 60
0,75 ----- x
1.x = 0,75.60 ➜ x = 45 minutos.

3. RESPOSTA : "C"
Como ele teve um prejuízo de 10%, quer dizer 27000 é 90% do valor total.
Valor %
27000 ------ 90
X ------- 100

$\frac{27000}{x} = \frac{90^{9}}{100^{10}} \rightarrow \frac{27000}{x} = \frac{9}{10}$ = 27000.10 ➜ 9x = 270000

➜ x = 30000.

4. RESPOSTA : "A"

75% Homens = 72
25% Mulheres = 24 Antes

40% Mulheres = 24
60% Homens = x Depois

40% ---------- 24
60% ---------- x

40x = 60 . 24 ➜ x = $\frac{1440}{40}$ ➜ x = 36.

Portanto: 72 – 36 = 36 Homens se retiraram.

5. RESPOSTA: "D"
Transformando de cm para metro temos : 1 metro = 100cm
➜ 2 cm = 0,02 m e 3,5 cm = 0,035 m
Largura comprimento
0,02m ---------- 0,035m
1,2m ---------- x

$$x = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}035}{0{,}02} = 2{,}1m$$

6. - RESPOSTA: "D".
Comparando- se cada grandeza com aquela onde esta o x.
M^2↑ varredores↓ horas↑
6000----------18---------- 5
7500----------15---------- x

Quanto mais a área, mais horas(diretamente proporcionais)
Quanto menos trabalhadores, mais horas(inversamente proporcionais)

$$\frac{5}{x} = \frac{6000}{7500} \cdot \frac{15}{18}$$

$$6000 \cdot 15 \cdot x = 5 \cdot 7500 \cdot 18$$
$$90000x = 675000$$
$$x = 7{,}5\ horas$$

Como 0,5 h equivale a 30 minutos , logo o tempo será de 7 horas e 30 minutos.

7 - RESPOSTA: "D".
Operários↑ horas↑ dias↑ área↑
20----------8----------60-------4800
15----------10----------80-------- x

Todas as grandezas são diretamente proporcionais, logo:

$$\frac{4800}{x} = \frac{20}{15} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{60}{80}$$
$$20 \cdot 8 \cdot 60 \cdot x = 4800 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 80$$
$$9600x = 57600000$$
$$x = 6000m^2$$

8- RESPOSTA: "B"
Temos 10 funcionários inicialmente, com os afastamento esse número passou para 8. Se eles trabalham 8 horas por dia , passarão a trabalhar uma hora a mais perfazendo um total de 9 horas, nesta condições temos:
Funcionários↑ horas↑ dias↓
10----------8----------27
8----------9---------- x

Quanto menos funcionários, mais dias devem ser trabalhados (inversamente proporcionais).
Quanto mais horas por dia, menos dias devem ser trabalhados (inversamente proporcionais).

Funcionários↓ horas↓ dias↓
8----------9---------- 27
10----------8----------x

$\frac{27}{x} = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{8}$ ➜ x.8.9 = 27.10.8 ➜ 72x = 2160 ➜ x = 30 dias.

9 - RESPOSTA: "C".

Transformando o tempo para segundos: 1 min e 15 segundos = 75 segundos

Quanto mais máquinas menor o tempo (flecha contrária) e quanto mais cópias, mais tempo (flecha mesma posição)

Máquina↑ cópias↓ tempo↓
1----------80----------75 segundos
7----------3360----------x

Devemos deixar as 3 grandezas da mesma forma, invertendo os valores de" máquina".

Máquina↓ cópias↓ tempo↓
7----------80----------75 segundos
1----------3360--------- x

$\frac{75}{x} = \frac{7}{1} \cdot \frac{80}{3360}$ ➜ x.7.80 = 75.1.3360 ➜ 560x = 252000 ➜ x = 450 segundos

Transformando
1minuto-----60segundos
x----------450
x=7,5 minutos=7 minutos e 30segundos.

10 - RESPOSTA: "D".

Funcionários↑ Fornos ↑ pães ↑ horas↑
5----------3----------2500----------10
6----------4----------x----------8

As flecham indicam se as grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais.

Quanto mais funcionários mais pães são feitos(diretamente)

$$\frac{2500}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{8}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 10x = 2500 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8$$
$$150x = 480000$$
$$x = 3200\ pães.$$

PORCENTAGEM E JURO SIMPLES;

PORCENTAGEM

É uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{50}{100}$ é uma porcentagem que podemos representar por 50%.

Forma Decimal: É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo, 35% na forma decimal seriam representados por 0,35.

75% = $\frac{75}{100}$ = 0,75

Cálculo de uma Porcentagem: Para calcularmos uma porcentagem *p*% de *V*, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por *V*.

P% de V = $\frac{p}{100}$. V

Exemplo 1
23% de 240 = $\frac{23}{100}$. 240 = 55,2

Exemplo 2
Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução: 67% de 56 000 = $\frac{67}{100}.56000 = 37520$

Resposta: 37 520 pessoas.

Porcentagem que o lucro representa em relação ao preço de custo e em relação ao preço de venda

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.

Lucro = preço de venda – preço de custo

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de **prejuízo**.

Assim, podemos escrever:
Preço de custo + lucro = preço de venda
Preço de custo – prejuízos = preço de venda

Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:
Lucro sobre o custo = lucro/preço de custo. 100%
Lucro sobre a venda = lucro/preço de venda. 100%

Observação: A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.

Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R$ 500,00 e vendida por R$ 800,00.

Pede-se:

- o lucro obtido na transação;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

Resposta:

Lucro = 800 – 500 = R$ 300,00

$L_c = \frac{300}{500} = 0,60 = 60\%$

$L_v = \frac{300}{800} = 0,375 = 37,5\%$

Aumento

Aumento Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um aumento de p% de seu valor. Chamemos de *A* o valor do aumento e V_A o valor após o aumento. Então, A = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_A = V + A = V + \frac{p}{100}. V$

$V_A = (1 + \frac{p}{100}) . V$

Em que $(1 + \frac{p}{100})$ é o fator de aumento.

Desconto

Desconto Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um desconto de p% de seu valor. Chamemos de *D* o valor do desconto e V_D o valor após o desconto. Então, D = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_D = V – D = V – \frac{p}{100}. V$

$V_D = (1 – \frac{p}{100}) . V$

Em que $(1 – \frac{p}{100})$ é o fator de desconto.

Exemplo

Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

Resolução: $V_A = 1,4 . V$

$3\,500 = 1,4 . V$

$V = \frac{3500}{1,4} = 2500$

Resposta: R$ 2 500,00

Aumentos e Descontos Sucessivos: Consideremos um valor inicial *V*, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de p_1% e p_2%. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$V_1 = V . (1 + \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, temos:

$V_2 = V_1 . (1 + \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 + \frac{p_2}{100})$

Sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de p_1% e p_2%.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$V_1 = V. (1 – \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, temos:

$V_2 = V_1 . (1 – \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 – \frac{p_1}{100}) . (1 – \frac{p_2}{100})$

Sendo *V* um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de p_1% e, sucessivamente, um desconto de p_2%.

Sendo V_1 o valor após o aumento, temos:

$V_1 = V . (1+ \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos:

$V_2 = V_1 . (1 – \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 – \frac{p_2}{100})$

Exemplo

(VUNESP-SP) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1 000 reais nessa aplicação. Ao final de *n* anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, são:

Resolução: $V^A = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n .v$

$V^A = \left(1.\frac{15}{100}\right)^n .1000$

$V^A = 1\,000 . (1,15)n$

$V^A = 1\,000 . 1,15n$

$V^A = 1\,150,00n$

QUESTÕES

1 - (PREF. AMPARO/SP – AGENTE ESCOLAR – CONRIO/2014) Se em um tanque de um carro for misturado 45 litros de etanol em 28 litros de gasolina, qual será o percentual aproximado de gasolina nesse tanque?

A) 38,357%
B) 38,356%
C) 38,358%
D) 38,359%

2 - (CEF / Escriturário) Uma pessoa x pode realizar uma certa tarefa em 12 horas. Outra pessoa, y, é 50% mais eficiente que x. Nessas condições, o número de horas necessárias para que y realize essa tarefa é :

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

3 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Observe a tabela que indica o consumo mensal de uma mesma torneira da pia de uma cozinha, aberta meia volta por um minuto, uma vez ao dia.

	Torneira alimentada por água de rua	Torneira alimentada por água da caixa
Consumo mensal por 1 minuto de uso, 1 vez ao dia	28,026 m^3	7,2 m^3

(**http://www.sabesp.com.br/CalandraWeb/animacoes/index.html**. Acessado em 15/03/2012)

Em relação ao cosumo mensal da torneira alimentada pela água da rua, o da torneira alimentada pela água da caixa representa, aproximadamente,

A) 20%
B) 26%
C) 30%
D) 35%
E) 40%

4 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O preço de uma mercadoria, na loja J, é de R$ 50,00. O dono da loja J resolve reajustar o preço dessa mercadoria em 20%. A mesma mercadoria, na loja K, é vendida por R$ 40,00. O dono da loja K resolve reajustar o preço dessa mercadoria de maneira a igualar o preço praticado na loja J após o reajuste de 20%. Dessa maneira o dono da loja K deve reajustar o preço em

A) 20%.
B) 50%.
C) 10%.
D) 15%.
E) 60%.

5 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O preço de venda de um produto, descontado um imposto de 16% que incide sobre esse mesmo preço, supera o preço de compra em 40%, os quais constituem o lucro líquido do vendedor. Em quantos por cento, aproximadamente, o preço de venda é superior ao de compra?

A) 67%.
B) 61%.
C) 65%.
D) 63%.
E) 69%.

6 - (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Um comerciante comprou uma mercadoria por R$ 350,00. Para estabelecer o preço de venda desse produto em sua loja, o comerciante decidiu que o valor deveria ser suficiente para dar 30% de desconto sobre o preço de venda e ainda assim garantir lucro de 20% sobre o preço de compra. Nessas condições, o preço que o comerciante deve vender essa mercadoria é igual a

A) R$ 620,00.
B) R$ 580,00.
C) R$ 600,00.
D) R$ 590,00.
E) R$ 610,00.

7 - (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Uma bolsa contém apenas 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. Sorteando ao acaso uma bola dessa bolsa, a probabilidade de que ela seja preta é
A) maior do que 55% e menor do que 60%.
B) menor do que 50%.
C) maior do que 65%.
D) maior do que 50% e menor do que 55%.
E) maior do que 60% e menor do que 65%.

8 - PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Das 80 crianças que responderam a uma enquete referente a sua fruta favorita, 70% eram meninos. Dentre as meninas, 25% responderam que sua fruta favorita era a maçã. Sendo assim, qual porcentagem representa, em relação a todas as crianças entrevistadas, as meninas que têm a maçã como fruta preferida?
A) 10%
B) 1,5%
C) 25%
D) 7,5%
E) 5%

9 - (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Numa liquidação de bebidas, um atacadista fez a seguinte promoção:

> Cerveja em lata: R$ 2,40 a unidade.
>
> Na compra de duas embalagens com 12 unidades cada, ganhe 25% de desconto no valor da segunda embalagem.

Alexandre comprou duas embalagens nessa promoção e revendeu cada unidade por R$3,50. O lucro obtido por ele com a revenda das latas de cerveja das duas embalagens completas foi:
A) R$33,60
B) R$28,60
C) R$26,40
D) R$40,80
E) R$43,20

10 - (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Leilão de veículos apreendidos do Detran aconteceu no dia 7 de dezembro.

O Departamento Estadual de Trânsito de Sergipe – Detran/SE – realizou, no dia 7 de dezembro, sábado, às 9 horas, no Espaço Emes, um leilão de veículos apreendidos em fiscalizações de trânsito. Ao todo foram leiloados 195 veículos, sendo que 183 foram comercializados como sucatas e 12 foram vendidos como aptos para circulação.

Quem arrematou algum dos lotes disponíveis no leilão pagou 20% do lance mais 5% de comissão do leiloeiro no ato da arrematação. Os 80% restantes foram pagos impreterivelmente até o dia 11 de dezembro.
Fonte: http://www.ssp.se.gov.br05/12/13 (modificada).

Vitor arrematou um lote, pagou o combinado no ato da arrematação e os R$28.800,00 restantes no dia 10 de dezembro. Com base nas informações contidas no texto, calcule o valor total gasto por Vitor nesse leilão.
A) R$34.600,00
B) R$36.000,00
C) R$35.400,00
D) R$32.000,00
E) R$37.800,00

RESPOSTAS

1 - **RESPOSTA: "B".**
Mistura:28+45=73
73------100%
28------x
X=38,356%

2 - RESPOSTA "C".
12 horas → 100 %
50 % de 12 horas = $\frac{12}{2}$ = 6 horas
X = 12 horas → 100 % = total de horas trabalhado
Y = 50 % mais rápido que X.
Então, se 50% de 12 horas equivalem a 6 horas, logo Y faz o mesmo trabalho em 6 horas.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{7,2}{28,026} = 0,256 \approx 26\%$$

4 - RESPOSTA: "B".

Loja J: $50 + 0,2.50 = 60$
Loja K: $40 + x.40 = 60$

$$40x = 20$$
$$x = 0,5$$

O reajuste deve ser de 50%.

5 **- RESPOSTA: "A".**

Preço de venda: PV
Preço de compra: PC
Note que: 1,4 = 100%+40% ou 1+0,4.Como ele superou o preço de venda (100%) em 40% , isso significa soma aos 100% mais 40%, logo 140%= 1,4.
PV - 0,16PV = 1,4PC
0,84PV=1,4PC

$$\frac{PV}{PC} = \frac{1,4}{0,84} = 1,67$$

O preço de venda é 67% superior ao preço de compra.

6 - RESPOSTA: "C".
Preço de venda: PV
Preço de compra: 350
30% de desconto, deixa o produto com 70% do seu valor.
Como ele queria ter um lucro de 20% sobre o preço de compra, devemos multiplicar por 1,2(350+0,2.350) ➜ 0,7PV = 1,2 . 350

$$PV = 1,2 \cdot \frac{350}{0,7} = 600$$

O preço de venda deve ser R$600,00.

7 - **RESPOSTA: "A".**
Ao todo tem 12 bolas, portanto a probabilidade de se tirar uma preta é:

$$P = \frac{7}{12} = 0,583 = 58,3\%$$

8 - RESPOSTA: "D".
Tem que ser menina E gostar de maçã.
Meninas:100-70=30%

$P = \frac{30}{100} \cdot \frac{25}{100}$, simplificando temos $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$ ➜ P = 0,075 . 100% = 7,5%.

9 - **RESPOSTA: "A".**

$$2,40 \cdot 12 = 28,80$$

$$segunda\ embalagem: 28,80 \cdot 0,75 = 21,60$$

$$as\ duas\ embalagens: 28,80 + 21,60 = 50,40$$

$$revenda: 3,5 \cdot 24 = 84,00$$

$$lucro: R\$84,00 - R\$50,40 = R\$33,60$$

O lucro de Alexandre foi de R$33,60.

10 - RESPOSTA: "E".
R$28.800-------80%
x------------------100%

$$x = \frac{28\,800 \cdot 100}{80} = 36\,000$$

$$valor\ da\ comissão: \frac{36.000 \cdot 5}{100} = 1800$$

Valor total: R$36.000,00+R$1.800,00=R$37.800,00

JUROS SIMPLES

Toda vez que falamos em juros estamos nos referindo a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor, pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta).

- Os juros são representados pela letra ***j***.
- O dinheiro que se deposita ou se empresta chamamos de capital e é representado pela letra *C*.
- O tempo de depósito ou de empréstimo é representado pela letra ***t***.
- A taxa de juros é a razão centesimal que incide sobre um capital durante certo tempo. É representado pela letra ***i*** e utilizada para calcular juros.

Chamamos de simples os juros que são somados ao capital inicial no final da aplicação.

Devemos sempre relacionar taxa e tempo numa mesma unidade:
Taxa anual ---------- tempo em anos
Taxa mensal---------- tempo em meses
Taxa diária---------- tempo em dias

Consideremos, como **exemplo**, o seguinte problema:

Uma pessoa empresta a outra, a juros simples, a quantia de R$ 3. 000,00, pelo prazo de 4 meses, à taxa de 2% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Resolução:

- Capital aplicado (**C**): R$ 3.000,00
- Tempo de aplicação (**t**): 4 meses
- Taxa (**i**): 2% ou 0,02 a.m. (= ao mês)

Fazendo o cálculo, mês a mês:
- No final do 1º período (1 mês), os juros serão: 0,02 x R$ 3.000,00 = R$ 60,00
- No final do 2º período (2 meses), os juros serão: R$ 60,00 + R$ 60,00 = R$ 120,00
- No final do 3º período (3 meses), os juros serão: R$ 120,00 + R$ 60,00 = R$ 180,00
- No final do 4º período (4 meses), os juros serão: R$ 180,00 + R$ 60,00 = R$ 240,00

Desse modo, no final da aplicação, deverão ser pagos R$ 240,00 de juros.

Fazendo o cálculo, período a período:
- No final do 1º período, os juros serão: i.C
- No final do 2º período, os juros serão: i.C + i.C
- No final do 3º período, os juros serão: i.C + i.C + i.C

- No final do período **t**, os juros serão: i.C + i.C + i.C + ... + i.C

Portanto, temos:

J = C . i . t

Observações:

1) A taxa **i** e o tempo **t** devem ser expressos na mesma unidade.

2) Nessa fórmula, a taxa **i** deve ser expressa na forma decimal.

3) Chamamos de **montante** (**M**) a soma do capital com os juros, ou seja: Na fórmula J= C . i . t, temos quatro variáveis. Se três delas forem valores conhecidos, podemos calcular o 4º valor.

M=C+ j

Exemplo

A que taxa esteve empregado o capital de R$ 20.000,00 para render, em 3 anos, R$ 28.800,00 de juros? (Observação: Como o tempo está em anos devemos ter uma taxa anual.)

C = R$ 20.000,00
t = 3 anos
j = R$ 28.800,00
i = ? (ao ano)

$$j = \frac{C.i.t}{100}$$

$$28\,800 = \frac{20000.i.3}{100}$$

$$28\,800 = 600 \cdot i$$

$$i = \frac{28.800}{600}$$

$$i = 48$$

Resposta: 48% ao ano.

JUROS COMPOSTOS

O capital inicial (principal) pode crescer, como já sabemos, devido aos juros, segundo duas modalidades, a saber:

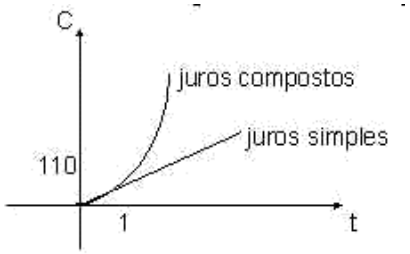
Juros simples - ao longo do tempo, somente o principal rende juros.

Juros compostos - após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

Vamos ilustrar a diferença entre os crescimentos de um capital através juros simples e juros compostos, com um exemplo: Suponha que $100,00 são empregados a uma taxa de 10% a.a. (ao ano) Teremos:

Principal = 100	Juros simples	Juros compostos		
Nº de anos	Montante simples	Montante composto		
1	100+0,1(100) = 110	100+0,1(100)	=	110,00
2	110+0,1(100) = 120	110+0,1(110)	=	121,00
3	120+0,1(100) = 130	121+0,1(121)	=	133,10
4	130+0,1(100) = 140	133,1+0,1(133,1)	=	146,41
5	140+0,1(100) = 150	146,41+0,1(146,41)	=	161,05

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é LINEAR enquanto que o crescimento segundo juros compostos é EXPONENCIAL, e, portanto tem um crescimento muito mais "rápido". Isto poderia ser ilustrado graficamente da seguinte forma:



Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores particulares costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na Economia. Na verdade, o uso de juros simples não se justifica em estudos econômicos.

Fórmula para o cálculo de Juros compostos

Considere o capital inicial (principal P) $1000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:
Após o 1º mês, teremos: $M_1 = 1000 \times 1,1 = 1100 = 1000(1 + 0,1)$
Após o 2º mês, teremos: $M_2 = 1100 \times 1,1 = 1210 = 1000(1 + 0,1)^2$
Após o 3º mês, teremos: $M_3 = 1210 \times 1,1 = 1331 = 1000(1 + 0,1)^3$
.....

Após o nº (enésimo) mês, sendo S o montante, teremos evidentemente: $S = 1000(1 + 0,1)^n$

De uma forma genérica, teremos para um principal P, aplicado a uma taxa de juros compostos i durante o período n : $S = P(1 + i)^n$ onde S = montante, P = principal, i = taxa de juros e n = número de períodos que o principal P (capital inicial) foi aplicado.

Nota: Na fórmula acima, as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 3x12=36 meses.

Exemplos

1 – Expresse o número de períodos n de uma aplicação, em função do montante S e da taxa de aplicação i por período.

Solução:

Temos $S = P(1+i)^n$
Logo, $S/P = (1+i)^n$
Pelo que já conhecemos de logaritmos, poderemos escrever:
$n = \log_{(1+i)} (S/P)$. Portanto, usando logaritmo decimal (base 10), vem:

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)} = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

Temos também da expressão acima que: n.log(1 + i) = logS – logP

Deste exemplo, dá para perceber que o estudo dos juros compostos é uma aplicação prática do estudo dos logaritmos.

2 – Um capital é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal de 2% (2% a.m.). Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

Solução: Sabemos que $S = P(1 + i)^n$. Quando o capital inicial estiver duplicado, teremos $S = 2P$.

Substituindo, vem: $2P = P(1+0{,}02)^n$ [Obs: 0,02 = 2/100 = 2%]

Simplificando, fica:

$2 = 1{,}02^n$, que é uma equação exponencial simples.

Teremos então: $n = \log_{1,02} 2 = \log 2 / \log 1{,}02 = 0{,}30103 / 0{,}00860 = 35$

Nota: log2 = 0,30103 e log1,02 = 0,00860; estes valores podem ser obtidos rapidamente em máquinas calculadoras científicas. Caso uma questão assim caia no vestibular, o examinador teria de informar os valores dos logaritmos necessários, ou então permitir o uso de calculadora na prova, o que não é comum no Brasil.

Portanto, o capital estaria duplicado após 35 meses (observe que a taxa de juros do problema é mensal), o que equivale a 2 anos e 11 meses.

Resposta: 2 anos e 11 meses.

EXERCÍCIOS

1. (SABESP – ANALISTA DE GESTÃO I -CONTABILIDADE – FCC/2012) Renato aplicou uma quantia no regime de capitalização de juros simples de 1,25% ao mês. Ao final de um ano, sacou todo o dinheiro da aplicação, gastou metade dele para comprar um imóvel e aplicou o restante, por quatro meses, em outro fundo, que rendia juros simples de 1,5% ao mês. Ao final desse período, ele encerrou a aplicação, sacando um total de R$ 95.082,00. A quantia inicial, em reais, aplicada por Renato no primeiro investimento foi de

A) 154.000,00
B) 156.000,00
C) 158.000,00
D) 160.000,00
E) 162.000,00

2. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) José Luiz aplicou R$60.000,00 num fundo de investimento, em regime de juros compostos, com taxa de 2% ao mês. Após 3 meses, o montante que José Luiz poderá sacar é

A) R$63.600,00.
B) R$63.672,48.
C) R$63.854,58.
D) R$62.425,00.
E) R$62.400,00.

3. CREA/PR – AGENTE ADMINISTRATIVO – FUNDATEC/2013) Um empréstimo de R$ 50.000,00 será pago no prazo de 5 meses, com juros simples de 2,5% a.m. (ao mês). Nesse sentido, o valor da dívida na data do seu vencimento será:

A) R$6.250,00.
B) R$16.250,00.
C) R$42.650,00.
D) R$56.250,00.
E) R$62.250,00.

4. (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Teresa pagou uma conta no valor de R$ 400,00 com seis dias de atraso. Por isso, foi acrescido, sobre o valor da conta, juro de 0,5% em regime simples, para cada dia de atraso. Com isso, qual foi o valor total pago por Teresa?

A) R$ 420,00.
B) R$ 412,00.
C) R$ 410,00.
D) R$ 415,00.
E) R$ 422,00.

5. PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Polícia autua 16 condutores durante blitz da Lei Seca

No dia 27 de novembro, uma equipe da Companhia de Polícia de Trânsito(CPTran) da Polícia Militar do Estado de Sergipe realizou blitz da Lei Seca na Avenida Beira Mar. Durante a ação, a polícia autuou 16 condutores.

Segundo o capitão Fábio <achado, comandante da CPTran, 12 pessoas foram notificadas por infrações diversas e quatro por desobediência à Lei Seca[...].

O quarteto detido foi multado em R$1.910,54 cada e teve a Carteira Nacional de Trânsito (CNH) suspensa por um ano.

(Fonte: PM/SE 28/11/13, modificada)

Investindo um capital inicial no valor total das quatros mulas durante um período de dez meses, com juros de 5% ao mês, no sistema de juros simples, o total de juros obtidos será:

A) R$2.768,15
B) R$1.595,27
C) R$3.821,08
D) R$9.552,70
E) R$1.910,54

6. (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Uma aplicação financeira rende mensalmente 0,72%. Após 3 meses, um capital investido de R$ 14.000,00 renderá: (Considere juros compostos)

A) R$ 267,92
B) R$ 285,49
C) R$300,45
D) R$304,58

7. (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Qual a porcentagem de rendimento mensal de um capital de R$ 5.000,00 que rende R$ 420,00 após 6 meses?

(Considere juros simples)

A) 2,2%
B) 1,6%
C) 1,4%
D) 0,7%

8. (PM/SP – OFICIAL – VUNESP/2013) Pretendendo aplicar em um fundo que rende juros compostos, um investidor fez uma simulação. Na simulação feita, se ele aplicar hoje R$ 10.000,00 e R$ 20.000,00 daqui a um ano, e não fizer nenhuma retirada, o saldo daqui a dois anos será de R$ 38.400,00. Desse modo, é correto afirmar que a taxa anual de juros considerada nessa simulação foi de

A) 12%.
B) 15%.
C) 18%.
D) 20%.
E) 21%.

9. (TRT 1ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – ÁREA ADMINISTRATIVA – FCC/2013) Juliano possui R$ 29.000,00 aplicados em um regime de juros compostos e deseja comprar um carro cujo preço à vista é R$30.000,00. Se nos próximos meses essa aplicação render 1% ao mês e o preço do carro se mantiver, o número mínimo de meses necessário para que Juliano tenha em sua aplicação uma quantia suficiente para comprar o carro é

A) 7.
B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 3.

10. (BANCO DO BRASIL – ESCRITURÁRIO – CESGRANRIO/2012) João tomou um empréstimo de R$900,00 a juros compostos de 10% ao mês. Dois meses depois, João pagou R$600,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo. O valor desse último pagamento foi, em reais, aproximadamente,

A) 240,00
B) 330,00
C) 429,00
D) 489,00
E) 538,00

RESPOSTAS

1 - **RESPOSTA: "B".**
Quantia inicial: C= 25.000 ; i=1,25% a.m = 0,0125 ; t= 1 ano = 12 meses
M= J+C e J= C.i.t da junção dessas duas fórmulas temos : M=C.(1+i.t),aplicando

$$M = C.(1 + 0{,}0125.12) \Rightarrow M = C.(1 + 0{,}15) \Rightarrow M = C.1{,}15$$

Como ele gastou metade e a outra metade ele aplicou a uma taxa i=1,5% a.m=0,015 e t=4m e sacou após esse período R$ 95.082,00

$$M = \frac{C.1{,}15}{2} = 0{,}575C \therefore \quad 95.082 = 0{,}575C.(1+0{,}015.4) \rightarrow 95.082 = 0{,}575C.1{,}06$$

95.082 = 0,6095C ➜ $C = \frac{95.082}{0{,}6095}$ ➜ C= 156.000

A quantia inicial foi de R$ 156.000,00.

2 - **RESPOSTA: "B".**
C=60.000 ; i = 2% a.m = 0,02 ; t = 3m

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow M = 60000(1+0{,}02)^3 \Rightarrow M = 60000 + (1{,}02)^3 \Rightarrow M = 63672{,}48$$

O montante a ser sacado será de R$ 63.672,48.

3 - **RESPOSTA: "D".**
J=C.i.t C = 50.000 ; i = 2,5% a.m = 0,025 ; t = 5m
J=50 000.0,025.5
J=6250
M=C+J
M=50 000+6 250=56250
O valor da dívida é R$56.250,00.

4 – RESPOSTA: "B".

$$M = C.(1 + i.t) \rightarrow M = 400.(1 + 0{,}005.6) \rightarrow M = 400(1 + 0{,}03) \rightarrow M = 400.1{,}03 \rightarrow M = 412$$

O valor que ela deve pagar é R$412,00.

5 - RESPOSTA: "C".

$$C = 1910{,}54 \cdot 4 = 7642{,}16 \quad ; i = 5\%a.m = 0{,}05 \; ; t = 10m$$
$$J = C.i.t$$
$$J = 7642{,}16 \cdot 0{,}05 \cdot 10 = 3821{,}08$$

O juros obtido será R$3.821,08.

6 - **RESPOSTA: "D".**
i = 0,72%a.m = 0,0072 ; t = 3m ; C = 14.000

$$M = C(1 + i)^t \rightarrow M = 14000(1 + 0{,}0072)^3 \rightarrow M = 14000.1{,}022 \rightarrow \mathrm{M} = 14304{,}58$$

Como ele quer saber os juros:
M = C+J ➜ J = 14304,58-14000 = 304,58
A aplicação renderá R$ 304,58.

7 - RESPOSTA: "C".
C = 5.000 ; J = 420 ; t = 6m
J=C.i.t ➜ 420=5000.i.6

$$i = \frac{420}{5000 \cdot 6} = 0{,}014 = 1{,}4\%$$

A porcentagem será de 1,4%.

8 - **RESPOSTA: "D".**

$C_{1° ano}$ = 10.000 ; $C_{2° ano}$ = 20.000

$$M1 = C(1 + i)^t$$
$$M1 = 10000(1 + i)^2 M2 = 20000(1 + i)^1$$

M1+M2 = 384000

$38400 = 10000(1+i)^2 + 20000(1+i)\ (:400)$

$$96 = 25(1+2i+i^2) + 50 + 50i$$
$$96 = 25 + 50i + 25i^2 + 50 + 50i$$
$$25i^2 + 100i - 21 = 0$$

Têm se uma equação do segundo grau, usa-seentão a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = 100^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-21) = 12100$$
$$i = \frac{-100 \pm 110}{50}$$
$$i_1 = \frac{-100 + 110}{50} = \frac{10}{50} = 0{,}2$$
$$i_2 = \frac{-100 - 110}{50} = -4{,}4\ \ (não\ convém)$$

É correto afirmar que a taxa é de 20%

9 - **RESPOSTA: "B".**

C=29.000 ; M=30.000 ; i=1%a.m = 0,01

$$M = C(1+i)^t$$
$$30000 = 29000(1+0{,}01)^t \rightarrow (1{,}01)^t = \frac{30000}{29000} \rightarrow (1{,}01)^t = 1{,}0344$$

Teremos que substituir os valores de t, portanto vamos começar dos números mais baixos:
$1{,}01^3$=1,0303, está próximo, mas ainda é menor
$1{,}01^4$=1,0406
Como t=4 passou o número que precisava(1,0344), então ele tem que aplicar no mínimo por 4 meses.

10 - **RESPOSTA: "E".**

C = 900 ; i = 10% a.m=0,10 ; t = 2m ; pagou 2 meses depois R$ 600,00 e liquidou após 1 mês

$$M = C(1+i)^t$$
$$M = 900(1+0{,}1)^2 \rightarrow M = 1089{,}00$$

Depois de dois meses João pagou R$ 600,00.

1089-600=489

$$M = 489(1+0{,}1)^1 = 537{,}90$$

SISTEMA MONETÁRIO BRASILEIRO;

Sistema Monetário Nacional

O primeiro dinheiro do Brasil foi à moeda-mercadoria. Durante muito tempo, o comércio foi feito por meio da troca de mercadorias, mesmo após a introdução da moeda de metal.

As primeiras moedas metálicas (de ouro, prata e cobre) chegaram com o início da colonização portuguesa. A unidade monetária de Portugal, o Real, foi usada no Brasil durante todo o período colonial. Assim, tudo se contava em réis (plural popular de real) com moedas fabricadas em Portugal e no Brasil. O Real (R) vigorou até 07 de outubro de 1833. De acordo com a Lei nº 59, de 08 de outubro de 1833, entrou em vigor o Mil-Réis (Rs), múltiplo do real, como unidade monetária, adotada até 31 de outubro de 1942.

No século XX, o Brasil adotou nove sistemas monetários ou nove moedas diferentes (mil-réis, cruzeiro, cruzeiro novo, cruzeiro, cruzado, cruzado novo, cruzeiro, cruzeiro real, real).

Por meio do Decreto-Lei nº 4.791, de 05 de outubro de 1942, uma nova unidade monetária, o cruzeiro – Cr$ veio substituir o mil-réis, na base de Cr$ 1,00 por mil-réis.

A denominação "cruzeiro" origina-se das moedas de ouro (pesadas em gramas ao título de 900 milésimos de metal e 100 milésimos de liga adequada), emitidas na forma do Decreto nº 5.108, de 18 de dezembro de 1926, no regime do ouro como padrão monetário.

O Decreto-Lei nº 1, de 13 de novembro de 1965, transformou o cruzeiro – Cr$ em cruzeiro novo – NCr$, na base de NCr$ 1,00 por Cr$ 1.000. A partir de 15 de maio de 1970 e até 27 de fevereiro de 1986, a unidade monetária foi novamente o cruzeiro (Cr$).

Em 27 de fevereiro de 1986, Dílson Funaro, ministro da Fazenda, anunciou o Plano Cruzado (Decreto-Lei nº 2.283, de 27 de fevereiro de 1986): o cruzeiro – Cr$ se transformou em cruzado – Cz$, na base de Cz$ 1,00 por Cr$ 1.000 (vigorou de 28 de fevereiro de 1986 a 15 de janeiro de 1989). Em novembro do mesmo ano, o Plano Cruzado II tentou novamente a estabilização da moeda. Em junho de 1987, Luiz Carlos Brésser Pereira, ministro da Fazenda, anunciou o Plano Brésser: um Plano Cruzado "requentado" avaliou Mário Henrique Simonsen.

Em 15 de janeiro de 1989, Maílson da Nóbrega, ministro da Fazenda, anunciou o Plano Verão (Medida Provisória nº 32, de 15 de janeiro de 1989): o cruzado – Cz$ se transformou em cruzado novo – NCz$, na base de NCz$ 1,00 por Cz$ 1.000,00 (vigorou de 16 de janeiro de 1989 a 15 de março de 1990).

Em 15 de março de 1990, Zélia Cardoso de Mello, ministra da Fazenda, anunciou o Plano Collor (Medida Provisória nº 168, de 15 de março de 1990): o cruzado novo – NCz$ se transformou em cruzeiro – Cr$, na base de Cr$ 1,00 por NCz$ 1,00 (vigorou de 16 de março de 1990 a 28 de julho de 1993). Em janeiro de 1991, a inflação já passava de 20% ao mês, e o Plano Collor II tentou novamente a estabilização da moeda.

A Medida Provisória nº 336, de 28 de julho de1993, transformou o cruzeiro – Cr$ em cruzeiro real – CR$, na base de CR$ 1,00 por Cr$ 1.000,00 (vigorou de 29 de julho de 1993 a 29 de junho de 1994).

Em 30 de junho de 1994, Fernando Henrique Cardoso, ministro da Fazenda, anunciou o Plano Real: o cruzeiro real – CR$ se transformou em real – R$, na base de R$ 1,00 por CR$ 2.750,00 (Medida Provisória nº 542, de 30 de junho de 1994, convertida na Lei nº 9.069, de 29 de junho de 1995).

O artigo 10, I, da Lei nº 4.595, de 31 de dezembro de 1964, delegou ao Banco Central do Brasil competência para emitir papel-moeda e moeda metálica, competência exclusiva consagrada pelo artigo 164 da Constituição Federal de 1988.

Antes da criação do BCB, a Superintendência da Moeda e do Crédito (SUMOC), o Banco do Brasil e o Tesouro Nacional desempenhavam o papel de autoridade monetária.

A SUMOC, criada em 1945 e antecessora do BCB, tinha por finalidade exercer o controle monetário. A SUMOC fixava os percentuais de reservas obrigatórias dos bancos comerciais, as taxas do redesconto e da assistência financeira de liquidez, bem como os juros. Além disso, supervisionava a atuação dos bancos comerciais, orientava a política cambial e representava o País junto a organismos internacionais.

O Banco do Brasil executava as funções de banco do governo, e o Tesouro Nacional era o órgão emissor de papel-moeda.

Cruzeiro

1000 réis = Cr$1(com centavos) 01.11.1942

O Decreto-Lei nº 4.791, de 05 de outubro de 1942 (D.O.U. de 06 de outubro de 1942), instituiu o Cruzeiro como unidade monetária brasileira, com equivalência a um mil réis. Foi criado o centavo, correspondente à centésima parte do cruzeiro.

Exemplo: 4:750$400 (quatro contos, setecentos e cinquenta mil e quatrocentos réis) passou a expressar-se Cr$ 4.750,40 (quatro mil setecentos e cinquenta cruzeiros e quarenta centavos)

Cruzeiro

(sem centavos) 02.12.1964

A Lei nº 4.511, de 01de dezembro de1964 (D.O.U. de 02 de dezembro de 1964), extinguiu a fração do cruzeiro denominada centavo. Por esse motivo, o valor utilizado no exemplo acima passou a ser escrito sem centavos: Cr$ 4.750 (quatro mil setecentos e cinquenta cruzeiros).

Cruzeiro Novo

Cr$1000 = NCr$1(com centavos) 13.02.1967

O Decreto-Lei nº 1, de 13 de novembro de1965 (D.O.U. de 17 de novembro de 1965), regulamentado pelo Decreto nº 60.190, de 08 de fevereiro de1967 (D.O.U. de 09 de fevereiro de 1967), instituiu o Cruzeiro Novo como unidade monetária transitória, equivalente a um mil cruzeiros antigos, restabelecendo o centavo. O Conselho Monetário Nacional, pela Resolução nº 47, de 08 de fevereiro de 1967, estabeleceu a data de 13.02.67 para início de vigência do novo padrão.

Exemplo: Cr$ 4.750 (quatro mil, setecentos e cinquenta cruzeiros) passou a expressar-se NCr$ 4,75(quatro cruzeiros novos e setenta e cinco centavos).

Cruzeiro

De NCr$ para Cr$ (com centavos) 15.05.1970

A Resolução nº 144, de 31 de março de 1970 (D.O.U. de 06 de abril de 1970), do Conselho Monetário Nacional, restabeleceu a denominação Cruzeiro, a partir de 15 de maio de 1970, mantendo o centavo.

Exemplo: NCr$ 4,75 (quatro cruzeiros novos e setenta e cinco centavos) passou a expressar-se Cr$ 4,75(quatro cruzeiros e setenta e cinco centavos).

Cruzeiros

(sem centavos) 16.08.1984

A Lei nº 7.214, de 15 de agosto de 1984 (D.O.U. de 16.08.84), extinguiu a fração do Cruzeiro denominada centavo. Assim, a importância do exemplo, Cr$ 4,75 (quatro cruzeiros e setenta e cinco centavos), passou a escrever-se Cr$ 4, eliminando-se a vírgula e os algarismos que a sucediam.

Cruzado

Cr$ 1000 = Cz$1 (com centavos) 28.02.1986

O Decreto-Lei nº 2.283, de 27 de fevereiro de 1986 (D.O.U. de 28 de fevereiro de 1986), posteriormente substituído pelo Decreto-Lei nº 2.284, de 10 de março de 1986 (D.O.U. de 11 de março de 1986), instituiu o Cruzado como nova unidade monetária, equivalente a um mil cruzeiros, restabelecendo o centavo. A mudança de padrão foi disciplinada pela Resolução nº 1.100, de 28 de fevereiro de 1986, do Conselho Monetário Nacional.

Exemplo: Cr$ 1.300.500 (um milhão, trezentos mil e quinhentos cruzeiros) passou a expressar-se Cz$ 1.300,50 (um mil e trezentos cruzados e cinquenta centavos).

Cruzado Novo

Cz$ 1000 = NCz$1 (com centavos) 16.01.1989

A Medida Provisória nº 32, de 15 de janeiro de 1989 (D.O.U. de 16 de janeiro de 1989), convertida na Lei nº 7.730, de 31 de janeiro de 1989 (D.O.U. de 01 de fevereiro de 1989), instituiu o Cruzado Novo como unidade do sistema monetário, correspondente a um mil cruzados, mantendo o centavo. A Resolução nº 1.565, de 16 de janeiro de 1989, do Conselho Monetário Nacional, disciplinou a implantação do novo padrão.

Exemplo: Cz$ 1.300,50 (um mil e trezentos cruzados e cinquenta centavos) passou a expressar-se NCz$ 1,30 (um cruzado novo e trinta centavos).

Cruzeiro

De NCz$ para Cr$ (com centavos) 16.03.1990

A Medida Provisória nº 168, de 15 de março de 1990 (D.O.U. de 16 de março de 1990), convertida na Lei nº 8.024, de 12 de abril de 1990 (D.O.U. de 13 de abril de 1990), restabeleceu a denominação Cruzeiro para a moeda, correspondendo um cruzeiro a um cruzado novo. Ficou mantido o centavo. A mudança de padrão foi regulamentada pela Resolução nº 1.689, de 18 de março de 1990, do Conselho Monetário Nacional.

Exemplo: NCz$ 1.500,00 (um mil e quinhentos cruzados novos) passou a expressar-se Cr$ 1.500,00 (um mil e quinhentos cruzeiros).

Cruzeiro Real

Cr$ 1000 = CR$ 1 (com centavos) 01.08.1993

A Medida Provisória nº 336, de 28 de julho de 1993 (D.O.U. de 29 de julho de 1993), convertida na Lei nº 8.697, de 27 de agosto de 1993 (D.O.U. de 28 agosto de 1993), instituiu o Cruzeiro Real, a partir de 01 de agosto de 1993, em substituição ao Cruzeiro, equivalendo um cruzeiro real a um mil cruzeiros, com a manutenção do centavo. A Resolução nº 2.010, de 28 de julho de 1993, do Conselho Monetário Nacional, disciplinou a mudança na unidade do sistema monetário.

Exemplo: Cr$ 1.700.500,00 (um milhão, setecentos mil e quinhentos cruzeiros) passou a expressar-se CR$ 1.700,50 (um mil e setecentos cruzeiros reais e cinquenta centavos).

Real

CR$ 2.750 = R$ 1(com centavos) 01.07.1994

A Medida Provisória nº 542, de 30 de junho de 1994 (D.O.U. de 30 de junho de 1994), instituiu o Real como unidade do sistema monetário, a partir de 01 de julho de 1994, com a equivalência de CR$ 2.750,00 (dois mil, setecentos e cinquenta cruzeiros reais), igual à paridade entre a URV e o Cruzeiro Real fixada para o dia 30 de junho de 1994. Foi mantido o centavo.

Como medida preparatória à implantação do Real, foi criada a URV - Unidade Real de Valor - prevista na Medida Provisória nº 434, publicada no D.O.U. de 28 de fevereiro de 1994, reeditada com os números 457 (D.O.U. de 30 de março de 1994) e 482 (D.O.U. de 29 de abril de 1994) e convertida na Lei nº 8.880, de 27 de maio de 1994 (D.O.U. de 28 de maio de 1994).

Exemplo: CR$ 11.000.000,00 (onze milhões de cruzeiros reais) passou a expressar-se R$ 4.000,00 (quatro mil reais).

Banco Central (BC ou Bacen) - Autoridade monetária do País responsável pela execução da política financeira do governo. Cuida ainda da emissão de moedas, fiscaliza e controla a atividade de todos os bancos no País.

Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID) - Órgão internacional que visa ajudar países subdesenvolvidos e em desenvolvimento na América Latina. A organização foi criada em 1959 e está sediada em Washington, nos Estados Unidos.

Banco Mundial - Nome pelo qual o Banco Internacional de Reconstrução e Desenvolvimento (BIRD) é conhecido. Órgão internacional ligado a ONU, a instituição foi criada para ajudar países subdesenvolvidos e em desenvolvimento.

Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES) - Empresa pública federal vinculada ao Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior que tem como objetivo financiar empreendimentos para o desenvolvimento do Brasil.

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS - PROBLEMAS;

Equação do 1º Grau

Veja estas equações, nas quais há apenas uma incógnita:

$3x - 2 = 16$ (equação de 1º grau)

$2y^3 - 5y = 11$ (equação de 3º grau)

$1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$ (equação de 1º grau)

O método que usamos para resolver a equação de 1º grau é isolando a incógnita, isto é, deixar a incógnita sozinha em um dos lados da igualdade. Para conseguir isso, há dois recursos:

- inverter operações;
- efetuar a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Exemplo 1

Resolução da equação $3x - 2 = 16$, invertendo operações.

Procedimento e justificativa: Se $3x - 2$ dá 16, conclui-se que $3x$ dá $16 + 2$, isto é, 18 (invertemos a subtração). Se $3x$ é igual a 18, é claro que x é igual a 18 : 3, ou seja, 6 (invertemos a multiplicação por 3).

Registro

$3x - 2 = 16$

$3x = 16 + 2$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3}$

$x = 6$

Exemplo 2

Resolução da equação $1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$, efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Procedimento e justificativa: Multiplicamos os dois lados da equação por mmc (2;5) = 10. Dessa forma, são eliminados os denominadores. Fazemos as simplificações e os cálculos necessários e isolamos x, sempre efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade. No registro, as operações feitas nos dois lados da igualdade são indicadas com as setas curvas verticais.

Registro

$1 - 3x + 2/5 = x + 1/2$

$10 - 30x + 4 = 10x + 5$

$-30x - 10x = 5 - 10 - 4$

$-40x = +9(-1)$

$40x = 9$

$x = 9/40$

$x = 0{,}225$

Há também um processo prático, bastante usado, que se baseia nessas ideias e na percepção de um padrão visual.

- Se a + b = c, conclui-se que a = c + b.

Na primeira igualdade, a parcela *b* aparece somando no lado esquerdo; na segunda, a parcela *b* aparece subtraindo no lado direito da igualdade.

- Se a . b = c, conclui-se que a = c + b, desde que $b \neq 0$.

Na primeira igualdade, o número *b* aparece multiplicando no lado esquerdo; na segunda, ele aparece dividindo no lado direito da igualdade.

O processo prático pode ser formulado assim:

- Para isolar a incógnita, coloque todos os termos com incógnita de um lado da igualdade e os demais termos do outro lado.
- Sempre que mudar um termo de lado, inverta a operação.

Exemplo

Resolução da equação $\frac{5(x+2)}{2} = \frac{(x+2)\,.\,(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$, usando o processo prático.

Procedimento e justificativa: Iniciamos da forma habitual, multiplicando os dois lados pelo mmc (2;3) = 6. A seguir, passamos a efetuar os cálculos indicados. Neste ponto, passamos a usar o processo prático, colocando termos com a incógnita à esquerda e números à direita, invertendo operações.

Registro

$\frac{5(x+2)}{2} - \frac{(x+2)\,.\,(x-3)}{3} = \frac{x^2}{3}$

$6.\frac{5(x+2)}{2} - 6.\frac{(x+2)\,.\,(x-3)}{3} = 6.\frac{x^2}{3}$

$15(x + 2) - 2(x + 2)(x - 3) = -2x^2$

$15x + 30 - 2(x^2 - 3x + 2x - 6) = -2x^2$

$15x + 30 - 2(x^2 - x - 6) = -2x^2$

$15x + 30 - 2x^2 + 2x + 12 = -2x^2$

$17x - 2x^2 + 42 = -2x^2$

$17x - 2x^2 + 2x^2 = -42$

$17x = -42$

$x = -\frac{42}{17}$

Note que, de início, essa última equação aparentava ser de 2º grau por causa do termo $-\frac{x^2}{3}$ no seu lado direito.

Entretanto, depois das simplificações, vimos que foi reduzida a uma equação de 1º grau ($17x = -42$).

NOVA CONCURSOS

Questões

1 - (PRF) Num determinado estado, quando um veículo é rebocado por estacionar em local proibido, o motorista paga uma taxa fixa de R$ 76,88 e mais R$ 1,25 por hora de permanência no estacionamento da polícia. Se o valor pago foi de R$ 101,88 o total de horas que o veículo ficou estacionado na polícia corresponde a:

A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

2 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Certa quantia em dinheiro foi dividida igualmente entre três pessoas, cada pessoa gastou a metade do dinheiro que ganhou e 1/3(um terço) do restante de cada uma foi colocado em um recipiente totalizando R$900,00(-novecentos reais), qual foi a quantia dividida inicialmente?

A) R$900,00
B) R$1.800,00
C) R$2.700,00
D) R$5.400,00

3 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um quadrado é chamado mágico quando suas casas são preenchidas por números cuja soma em cada uma das linhas, colunas ou diagonais é sempre a mesma.

O quadrado abaixo é mágico.

15	10	x – 2	6
4	x	16	9
3x – 1	11	2	7
$\frac{-x+7}{2}$	8	13	2x + 2

Um estudante determinou os valores desconhecidos corretamente e para 3x − 1 atribuiu

A)14
B) 12
C) 5
D) 3
E) 1

4 - (PGE/BA – ASSISTENTE DE PROCURADORIA – FCC/2013) A prefeitura de um município brasileiro anunciou que 3/5 da verba destinada ao transporte público seriam aplicados na construção de novas linhas de metrô. O restante da verba seria igualmente distribuído entre quatro outras frentes: corredores de ônibus, melhoria das estações de trem, novos terminais de ônibus e subsídio a passagens. Se o site da prefeitura informa que serão gastos R$ 520 milhões com a melhoria das estações de trem, então o gasto com a construção de novas linhas de metrô, em reais, será de

A) 3,12 bilhões.
B) 2,86 bilhões.
C) 2,60 bilhões.
D) 2,34 bilhões.
E) 2,08 bilhões.

5 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Um funcionário de uma empresa deve executar uma tarefa em 4 semanas. Esse funcionário executou 3/8 da tarefa na 1ª semana. Na 2ª semana, ele executou 1/3 do que havia executado na 1ª semana. Na 3ª e 4ª semanas, o funcionário termina a execução da tarefa e verifica que na 3ª semana executou o dobro do que havia executado na 4ª semana. Sendo assim, a fração de toda a tarefa que esse funcionário executou na 4ª semana é igual a

A) 5/16.
B) 1/6.
C) 8/24.
D)1/ 4.
E) 2/5.

6 - (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) Bia tem 10 anos a mais que Luana, que tem 7 anos a menos que Felícia. Qual é a diferença de idades entre Bia e Felícia?

A) 3 anos.
B) 7 anos.
C) 5 anos.
D) 10 anos.
E) 17 anos.

7 -(DAE AMERICANAS/SP – ANALISTA ADMINSTRATIVO – SHDIAS/2013) Em uma praça, Graziela estava conversando com Rodrigo. Graziela perguntou a Rodrigo qual era sua idade, e ele respondeu da seguinte forma:

- 2/5 de minha idade adicionados de 3 anos correspondem à metade de minha idade.

Qual é a idade de Rodrigo?

A) Rodrigo tem 25 anos.
B) Rodrigo tem 30 anos.
C) Rodrigo tem 35 anos.
D) Rodrigo tem 40 anos.

8 - (METRO/SP - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Dois amigos foram a uma pizzaria. O mais velho comeu da pizza que compraram. Ainda da mesma pizza o mais novo comeu da quantidade que seu amigo havia comido. Sendo assim, e sabendo que mais nada dessa pizza foi comido, a fração da pizza que restou foi

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{7}{8}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{36}{40}$

9 - (METRO/SP - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Glauco foi à livraria e comprou 3 exemplares do livro J. Comprou 4 exemplares do livro K, com preço unitário de 15 reais a mais que o preço unitário do livro J. Comprou também um álbum de fotografias que custou a terça parte do preço unitário do livro K.

Glauco pagou com duas cédulas de 100 reais e recebeu o troco de 3 reais. Glauco pagou pelo álbum o valor, em reais, igual a

A) 33.
B) 132.
C) 54.
D) 44.
E) 11.

10 - AGENTE DE SEGURANÇA METROVIÁRIA I - FCC/2013) Hoje, a soma das idades de três irmãos é 65 anos. Exatamente dez anos antes, a idade do mais velho era o dobro da idade do irmão do meio, que por sua vez tinha o dobro da idade do irmão mais novo. Daqui a dez anos, a idade do irmão mais velho será, em anos, igual a

A) 55.
B) 25.
C) 40.
D) 50.
E) 35.

Respostas

1 - RESPOSTA "A".

Devemos inicialmente equacionar através de uma equação do 1º grau, ou seja:

y= 76,88 + 1,25. x ➜ 101,88 = 76,88 + 1,25x ➜ 101,88 – 76,88 = 1,25x

1,25x = 25 ➜ x = $\frac{25}{1,25}$ ➜ x = 20 horas.

Obs.: y é o valor pago pela multa x corresponde ao número de horas de permanência no estacionamento.

2 - RESPOSTA: "B".

Quantidade a ser dividida: x

Se 1/3 de cada um foi colocado em um recipiente e deu R$900,00, quer dizer que cada uma colocou R$300,00.

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{x}{3}}{2} + 300$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{6} + 300$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{6} = 300$$

$$\frac{2x - x}{6} = 300$$

$$\frac{x}{6} = 300$$

x = 1800

3 - RESPOSTA: "A".

Igualando a 1ª linha com a 3ª , temos:

$$15 + 10 + x - 2 + 6 = 3x - 1 + 11 + 2 + 7$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

3x-1=14

4 - RESPOSTA: "A".

520 milhões para as melhorias das estações de trem, como foi distribuído igualmente, corredores de ônibus, novos terminais e subsídio de passagem também receberam cada um 520 milhões.

Restante da verba foi de 520.4 = 2080 ; 10^6 = notação científica de milhões (1.000.000).

Verba: y

$$\frac{3}{5}y + 2080.10^6 = y$$

$$\frac{3}{5}y - y = -2080.10^6$$

$$-2y = -10400.10^6$$

$$y = 5200.10^6$$

$\frac{3}{5}5200.10^6 = 3120.10^6 = 3,12.10^9$ ou 3,12 bilhões.

NOVA CONCURSOS

5 - RESPOSTA: "B".
Tarefa: x
Primeira semana: 3/8x
2 semana: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{1}{8}x$

1ª e 2ª semana: $\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{4}{8}x = \frac{1}{2}x$

Na 3ª e 4ª semana devem ser feito a outra metade, pois ele executou a metade na 1ª e 2ª semana como consta na fração acima (1/2x).
3ªsemana: 2y
4ª semana: y

$$2y + y = \frac{1}{2}x$$
$$3y = \frac{1}{2}x$$
$$y = \frac{1}{6}x$$

6 - RESPOSTA: "A".
Luana: x
Bia: x+10
Felícia: x+7
Bia-Felícia= x+10-x-7 = 3 anos.

7 - RESPOSTA: "B".
Idade de Rodrigo: x

$$\frac{2}{5}x + 3 = \frac{1}{2}x$$
$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}x = -3$$

Mmc(2,5)=10

$$\frac{4x - 5x}{10} = -3$$
$$4x - 5x = -30$$
$$x = 30$$

8 - RESPOSTA: "C".

$$pizza: x \therefore \quad y: o\ que\ restou\ da\ pizza$$
$$mais\ velho: \frac{3}{8}x$$
$$mais\ novo: \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{21}{40}x$$
$$\frac{3}{8}x + \frac{21}{40}x + y = x$$
$$y = x - \frac{3}{8}x - \frac{21}{40}x$$
$$y = \frac{40x - 15x - 21x}{40} = \frac{4x}{40} = \frac{1}{10}x$$

Sobrou 1/10 da pizza.

9 - RESPOSTA: "E".
Preço livro J: x
Preço do livro K: x+15

$$álbum: \frac{x + 15}{3}$$

Valor pago:197 reais (2.100 – 3)

$$3x + 4(x + 15) + \frac{x + 15}{3} = 197$$
$$\frac{9x + 12(x + 15) + x + 15}{3} = 197$$
$$9x + 12x + 180 + x + 15 = 591$$
$$22x = 396$$
$$x = 18$$

$$álbum: \frac{x + 15}{3} = \frac{18 + 15}{3} = 11$$

O valor pago pelo álbum é de R$ 11,00.

10 - RESPOSTA: "C".
Irmão mais novo: x
Irmão do meio: 2x
Irmão mais velho:4x

Hoje:
Irmão mais novo: x+10
Irmão do meio: 2x+10
Irmão mais velho:4x+10

x+10+2x+10+4x+10=65
7x=65-30
7x=35
x=5

hoje:
Irmão mais novo: x+10=5+10=15
Irmão do meio: 2x+10=10+10=20
Irmão mais velho:4x+10=20+10=30

Daqui a dez anos
Irmão mais novo: 15+10=25
Irmão do meio: 20+10=30
Irmão mais velho: 30+10=40

O irmão mais velho terá 40 anos.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Denomina-se equação do 2º grau na incógnita *x* toda equação da forma :

$ax^2 + bx + c = 0$, em que *a, b, c* são números reais e $a \neq 0$.

Nas equações de 2º grau com uma incógnita, os números reais expressos por *a, b, c* são chamados **coeficientes** da equação:

- ***a*** é sempre o coeficiente do termo em x^2.
- ***b*** é sempre o coeficiente do termo em ***x***.
- ***c*** é sempre o coeficiente ou termo **independente**.

Equação completa e incompleta:

- Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Exemplos

$5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa (a = 5, b = – 8, c = 3).

$y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa (a = 1, b = 12, c = 20).

- Quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta**.

Exemplos

$x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta (a = 1, b = 0 e c = – 81).

$10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta (a = 10, b = 2 e c = 0).

$5y^2 = 0$ é uma equação incompleta (a = 5, b = 0 e c = 0).

Todas essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada forma normal ou forma reduzida de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$; por meio de transformações convenientes, em que aplicamos o princípio aditivo e o multiplicativo, podemos reduzi-las a essa forma.

Exemplo: Pelo princípio aditivo.

$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$
$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$
$2x^2 + x^2 - 7x + 4 - 1 = 0$
$3x^2 - 7x + 3 = 0$

Exemplo: Pelo princípio multiplicativo.

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x - 4}$$

$$\frac{4.(x - 4) - x(x - 4)}{2x(x - 4)} = \frac{2x^2}{2x(x - 4)}$$

$4(x - 4) - x(x - 4) = 2x^2$
$4x - 16 - x^2 + 4x = 2x^2$
$- x^2 + 8x - 16 = 2x^2$
$- x^2 - 2x^2 + 8x - 16 = 0$
$- 3x^2 + 8x - 16 = 0$

Resolução das equações incompletas do 2º grau com uma incógnita.

- A equação é da forma $ax^2 + bx = 0$.

$x^2 + 9 = 0$ ➜ colocamos x em evidência
$x . (x - 9) = 0$
$x = 0$ ou $x - 9 = 0$
$x = 9$

Logo, S = {0, 9} e os números 0 e 9 são as raízes da equação.

- A equação é da forma $ax^2 + c = 0$.

$x^2 - 16 = 0$ ➜ Fatoramos o primeiro membro, que é uma diferença de dois quadrados.

$(x + 4) . (x - 4) = 0$
$x + 4 = 0$ $\quad x - 4 = 0$
$x = - 4$ $\quad x = 4$
Logo, S = {–4, 4}.

Fórmula de Bháskara

Usando o processo de Bháskara e partindo da equação escrita na sua forma normal, foi possível chegar a uma fórmula que vai nos permitir determinar o conjunto solução de qualquer equação do 2º grau de maneira mais simples.

Essa fórmula é chamada **fórmula resolutiva** ou **fórmula de Bháskara.**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Nesta fórmula, o fato de *x* ser ou não número real vai depender do discriminante $\triangle$; temos então, três casos a estudar.

1º caso: $\triangle$ é um número real positivo ($\triangle > 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real, e existem dois valores reais diferentes para a incógnita *x*, sendo costume representar esses valores por *x'* e *x"*, que constituem as raízes da equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \qquad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

2º caso: $\triangle$ é zero ($\triangle = 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2.a} = \frac{-b \pm 0}{2.a} = \frac{-b}{2a}$$

Observamos, então, a existência de um único valor real para a incógnita *x*, embora seja costume dizer que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

NOVA CONCURSOS

3º caso: △ é um número real negativo (△ < 0).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo.

Dizemos então, que não há valores reais para a incógnita *x*, ou seja, a equação não tem raízes reais.

A existência ou não de raízes reais e o fato de elas serem duas ou uma única dependem, exclusivamente, do discriminante △ = $b^2 – 4.a.c$; daí o nome que se dá a essa expressão.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$

- △ = $b^2 – 4.a.c$
- Quando △ ≥ 0, a equação tem raízes reais.
- Quando △ < 0, a equação não tem raízes reais.
- △ > 0 (duas raízes diferentes).
- △ = 0 (uma única raiz).

Exemplo: Resolver a equação $x^2 + 2x – 8 = 0$ no conjunto R.

temos: a = 1, b = 2 e c = – 8

△ = $b^2 – 4.a.c = (2)^2 – 4 . (1) . (–8) = 4 + 32 = 36 > 0$

Como △ > 0, a equação tem duas raízes reais diferentes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Então: S = {-4, 2}.

Propriedade das raízes

Dada a equação $ax^2 + bx + c=0$, com a , e S e P a soma e o produto respectivamente dessas raízes.

$$S = x1 + x2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x1 \,.x2 = \frac{c}{a}$$

Logo podemos reescrever a equação da seguinte forma: $x^2 – Sx + P=0$

Questões

1 - (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Para que a equação $(3m-9)x^2-7x+6=0$ seja uma equação de segundo grau, o valor de m deverá, necessariamente, ser diferente de:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 0.
E) 9.

2 - (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Qual a equação do 2º grau cujas raízes são 1 e 3/2?

A) $x^2-3x+4=0$
B) $-3x^2-5x+1=0$
C) $3x^2+5x+2=0$
D) $2x^2-5x+3=0$

3 - (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) O dobro da menor raiz da equação de 2º grau dada por $x^2-6x=-8$ é:

A) 2
B) 4
C) 8
D) 12

4 - (CGU – ADMINISTRATIVA – ESAF/2012) Um segmento de reta de tamanho unitário é dividido em duas partes com comprimentos x e 1-x respectivamente.

Calcule o valor mais próximo de x de maneira que x = (1-x) / x, usando √5=2,24.

A) 0,62
B) 0,38
C) 1,62
C) 0,5
D) 1/

5 - Antônio gastou R$ 240,00 na compra de brindes iguais para distribuir no final de ano. Com um desconto de R$ 2,00 em cada brinde, teria comprado 10 brindes a mais com os mesmos R$ 240,00. A equação cuja solução levará ao valor do brinde sem o desconto é dada por:

A) $b^2 - 2b + 48 = 0$
B) $b^2 + 10b - 1200 = 0$
C) $b^2 - 2b - 48 = 0$
D) $b^2 - 10b + 1200 = 0$
E) $b^2 + 2b - 240 = 0$

6 - (PREF. PAULISTANA/PI – PROFESSOR DE MATEMÁTICA – IMA/2014) Temos que a raiz do polinômio $p(x) = x^2 – mx + 6$ é igual a 6. O valor de m é:

A) 15
B) 7
C) 10
D) 8
E) 5

7 – (TEC. JUD. – 2ª FCC) Em certo momento, o número x de soldados em um policiamento ostensivo era tal que subtraindo-se do seu quadrado o seu quadruplo, obtinha-se 1845. O valor de x é:

A) 42.
B) 45.
C) 48.
D) 50.
E) 52.

8 - (CPTM - Médico do trabalho – Makiyama) A metrologia anunciou que o dia de amanhã será frio, com algumas pancadas de chuva. A temperatura mínima prevista é A e a temperatura máxima é B. Sabendo que A e B são as raízes da equação x^2 - 26x + 160 = 0, podemos afirmar que A e B são respectivamente, em graus Celsius.

(A) 10° e 16°.
(B) 12° e 16°.
(C) 10° e 18°.
(D) 15° e 17°.
(E) 12° e 18°.

9 - (Prefeitura de São Paulo - SP - Guarda Civil Metropolitano - MS CONCURSOS) Se $x_1 > x_2$ são as raízes da equação x^2 - 27x + 182 = 0, então o valor de $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ é:

A) $\frac{1}{27}$.
B) $\frac{1}{13}$.
C) 1.
D) $\frac{1}{182}$.
E) $\frac{1}{14}$.

10 - (Pref. Mogeiro/PB - Professor – Matemática – EXAMES) A soma das raízes da equação (k - 2)x^2 - 3kx + 1 = 0, com k ≠ 2, é igual ao produto dessas raízes. Nessas condições. Temos:

A) k = 1/2.
B) k = 3/2.
C) k = 1/3.
D) k = 2/3.
E) k = -2.

Respostas

1 - RESPOSTA: "C".
Neste caso o valor de a
3m-9≠0
3m≠9
m≠3

2 - RESPOSTA: "D".
Como as raízes foram dadas, para saber qual a equação: x^2 - Sx +P=0, usando o método da soma e produto; S= duas raízes somadas resultam no valor numérico de *b*; e P= duas raízes multiplicadas resultam no valor de *c*.

$$S = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = b$$

$$P = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = c \; ; substituindo$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

3 - RESPOSTA: "B".
x^2-6x+8=0

$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 \Rightarrow 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Dobro da menor raiz: 2 · 2=4

4 - RESPOSTA: "A".

$$x = \frac{1-x}{x}$$

$$X^2 = 1-x$$
$$X^2 + x - 1 = 0$$
$$\Delta = (1)^2 - 4.1.(-1) \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{(-1+2{,}24)}{2} = 0{,}62$$

$$x_2 = \frac{-1-2{,}24}{2} = -1{,}62 \; (não \; convém)$$

5 - RESPOSTA "C".
Dados:
x → preço de cada brinde
b → total de brindes
De acordo com o enunciado temos:

$$x.b = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{b}$$
$$(i)$$

$$(b+10).(x-2) = 240$$
$$(ii)$$

Substituindo (i) em (ii) teremos:

$$(b+10).(\frac{240}{b} - 2) = 240 \Rightarrow (b+10).\left(\frac{240-2b}{b}\right) = 240 \Rightarrow$$

$$240b - 2b^2 + 2400 - 20b = 240b \Rightarrow b^2 + 10b - 1200 = 0$$

6 – RESPOSTA: "B".
Lembrando que a fórmula pode ser escrita como :x^2-Sx+P, temos que P(produto)=6 e se uma das raízes é 6, a outra é 1.
Então a soma é 6+1=7
S=m=7

7 – RESPOSTA "B"
Montando a expressão
$x^2 - 4x = 1845$; igualando a expressão a zero teremos: $x^2 - 4x - 1845 = 0$
Aplicando a formula de Bháskara:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-1845)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 7380}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{7396}}{2}$$

$$\frac{4 \pm 86}{2} \Rightarrow x1 = \frac{4 + 86}{2} = 45 \quad \therefore \quad x2 = \frac{4 - 86}{2} = -41 (não\ convém\ usar)$$

Logo o valor de x = 45

8 - RESPOSTA: "A".
Resolvendo a equação pela fórmula de Bháskara:
$x^2 - 26x + 160 = 0$; a = 1, b = - 26 e c = 160

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-26)^2 - 4.1.160$
$\Delta = 676 - 640$
$\Delta = 36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-26) \pm \sqrt{36}}{2.1}$$
$$x = \frac{26 \pm 6}{2} \rightarrow x = \frac{26+6}{2} = \frac{32}{2} = 16 ou x = \frac{26-6}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

9 - RESPOSTA: "D".
Primeiro temos que resolver a equação:

a = 1, b = - 27 e c = 182

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-27)^2 - 4.1.182$
$\Delta = 729 - 728$
$\Delta = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{27 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 14 \text{ ou } x_2 = 13$$

O mmc entre x_1 e x_2 é o produto $x_1.x_2$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1.x_2} = \frac{14 - 13}{14.13} = \frac{1}{182}$$

10 - RESPOSTA: "C".
Vamos usar as fórmulas da soma e do produto: S = $\frac{-b}{a}$ e P = $\frac{c}{a}$..
$(k - 2)x^2 - 3kx + 1 = 0$; a = k – 2, b = - 3k e c = 1
S = P

$$\frac{-b}{a} = \frac{c}{a} \rightarrow -b = c \rightarrow -(-3k) = 1 \rightarrow 3k = 1 \rightarrow k = 1/3$$

SISTEMA DECIMAL DE MEDIDAS (COMPRIMENTO, SUPERFÍCIE, VOLUME, MASSA, CAPACIDADE E TEMPO) - TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS;

Sistema de Medidas Decimais

Um sistema de medidas é um conjunto de unidades de medida que mantém algumas relações entre si. O sistema métrico decimal é hoje o mais conhecido e usado no mundo todo. Na tabela seguinte, listamos as unidades de medida de comprimento do sistema métrico. A unidade fundamental é o metro, porque dele derivam as demais.

Unidades de Comprimento						
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
1000m	100m	10m	1m	0,1m	0,01m	0,001m

Há, de fato, unidades quase sem uso prático, mas elas têm uma função. Servem para que o sistema tenha um padrão: cada unidade vale sempre 10 vezes a unidade menor seguinte.

Por isso, o sistema é chamado decimal.

E há mais um detalhe: embora o decímetro não seja útil na prática, o decímetro cúbico é muito usado com o nome popular de litro.

As unidades de área do sistema métrico correspondem às unidades de comprimento da tabela anterior.

São elas: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), etc. As mais usadas, na prática, são o quilômetro quadrado, o metro quadrado e o hectômetro quadrado, este muito importante nas atividades rurais com o nome de hectare (ha): 1 hm^2 = 1 ha.

No caso das unidades de área, o padrão muda: uma unidade é 100 vezes a menor seguinte e não 10 vezes, como nos comprimentos. Entretanto, consideramos que o sistema continua decimal, porque 100 = 10^2.

Unidades de Área						
km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
quilômetro quadrado	hectômetro quadrado	decâmetro quadrado	metro quadrado	decímetro quadrado	centímetro quadrado	milímetro quadrado
1000000m^2	10000m^2	100m^2	1m^2	0,01m^2	0,0001m^2	0,000001m^2

Agora, vejamos as unidades de volume. De novo, temos a lista: quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3), etc. Na prática, são muitos usados o metro cúbico e o centímetro cúbico.

Nas unidades de volume, há um novo padrão: cada unidade vale 1000 vezes a unidade menor seguinte. Como 1000 = 10^3, o sistema continua sendo decimal.

Unidades de Volume						
km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**
quilômetro cúbico	hectômetro cúbico	decâmetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
1000000000m^3	1000000m^3	1000m^3	1m^3	0,001m^3	0,000001m^3	0,000000001m^3

A noção de capacidade relaciona-se com a de volume. Se o volume da água que enche um tanque é de 7 000 litros, dizemos que essa é a capacidade do tanque. A unidade fundamental para medir capacidade é o litro (l); 1l equivale a 1 dm^3.

Cada unidade vale 10 vezes a unidade menor seguinte.

Unidades de Capacidade						
kl	**hl**	**dal**	**l**	**dl**	**cl**	**ml**
quilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centímetro	mililitro
1000l	100l	10l	1l	0,1l	0,01l	0,001l

O sistema métrico decimal inclui ainda unidades de medidas de massa. A unidade fundamental é o grama.

Unidades de Massa						
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
quilograma	hectograma	decagrama	grama	decigrama	centigrama	miligrama
1000g	100g	10g	1g	0,1g	0,01g	0,001g

Dessas unidades, só têm uso prático o quilograma, o grama e o miligrama. No dia-a-dia, usa-se ainda a tonelada (t): 1t = 1000 kg.

Não Decimais

Desse grupo, o sistema hora – minuto – segundo, que mede intervalos de tempo, é o mais conhecido.

2h = 2 . 60min = 120 min = 120 . 60s = 7 200s

Para passar de uma unidade para a menor seguinte, multiplica-se por 60.

0,3h não indica 30 minutos nem 3 minutos; como 1 décimo de hora corresponde a 6 minutos, conclui-se que 0,3h = 18min.

Para medir ângulos, também temos um sistema não decimal. Nesse caso, a unidade básica é o grau. Na astronomia, na cartografia e na navegação são necessárias medidas inferiores a 1º. Temos, então:

1 grau equivale a 60 minutos (1º = 60')
1 minuto equivale a 60 segundos (1' = 60")

Os minutos e os segundos dos ângulos não são, é claro, os mesmos do sistema hora – minuto – segundo. Há uma coincidência de nomes, mas até os símbolos que os indicam são diferentes:
1h32min24s é um intervalo de tempo ou um instante do dia.
1º 32' 24" é a medida de um ângulo.

Por motivos óbvios, cálculos no sistema hora – minuto – segundo são similares a cálculos no sistema grau – minuto – segundo, embora esses sistemas correspondam a grandezas distintas.

Há ainda um sistema não-decimal, criado há algumas décadas, que vem se tornando conhecido. Ele é usado para medir a informação armazenada em memória de computadores, disquetes, discos compacto, etc. As unidades de medida são bytes (b), kilobytes (kb), megabytes (Mb), etc. Apesar de se usarem os prefixos "kilo" e "mega", essas unidades não formam um sistema decimal.

Um kilobyte equivale a 2^{10} bytes e 1 megabyte equivale a 2^{10} kilobytes.

Exercícios

1. **Raquel saiu de casa às 13h 45min, caminhando até o curso de inglês que fica a 15 minutos de sua casa, e chegou na hora da aula cuja duração é de uma hora e meia. A que horas terminará a aula de inglês?**
a) 14h
b) 14h 30min
c) 15h 15min
d) 15h 30min
e) 15h 45min

2. 348 mm3 equivalem a quantos decilitros?

3. Quantos decalitros equivalem a 1 m3?

4. Passe 50 dm2 para hectômetros quadrados.

5. Quantos quilômetros cúbicos equivalem a 14 mm3?

6. Quantos centilitros equivalem a 15 hl?

7. Passe 5.200 gramas para quilogramas.

8. Converta 2,5 metros em centímetros.

9. Quantos minutos equivalem a 5h05min?

10. Quantos minutos se passaram das 9h50min até as 10h35min?

Respostas

1) Resposta "D".
Solução: Basta somarmos todos os valores mencionados no enunciado do teste, ou seja:
13h 45min + 15 min + 1h 30 min = 15h 30min

Logo, a questão correta é a letra D.

2) Resposta "0, 00348 dl".
Solução: Como 1 cm^3 equivale a 1 ml, é melhor dividirmos 348 mm^3 por mil, para obtermos o seu equivalente em centímetros cúbicos: 0,348 cm^3.
Logo 348 mm^3 equivalem a 0, 348 ml, já que cm^3 e ml se equivalem.

Neste ponto já convertemos de uma unidade de medida de volume, para uma unidade de medida de capacidade.
Falta-nos passarmos de mililitros para decilitros, quando então passaremos dois níveis à esquerda. Dividiremos então por 10 duas vezes:

$$0{,}348\ ml : 10 : 10 \Rightarrow 0{,}00348\ dl$$

Logo, 348 mm^3 equivalem a 0, 00348 dl.

3) Resposta "100 dal".
Solução: Sabemos que 1 m^3 equivale a 1.000 l, portanto para convertermos de litros a decalitros, passaremos um nível à esquerda.
Dividiremos então 1.000 por 10 apenas uma vez:

$$1000\ l : 10 \Rightarrow 100\ dal$$

Isto equivale a passar a vírgula uma casa para a esquerda.
Poderíamos também raciocinar da seguinte forma:

Como 1 m^3 equivale a 1 kl, basta fazermos a conversão de 1 kl para decalitros, quando então passaremos dois níveis à direita. Multiplicaremos então 1 por 10 duas vezes:

$$1\ kl \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 100\ dal$$

Logo, 100 dal equivalem a 1 m^3.

4) Resposta "0, 00005 hm^2".
Solução: Para passarmos de decímetros quadrados para hectômetros quadrados, passaremos três níveis à esquerda.
Dividiremos então por 100 três vezes:

$$50\ dm^2 : 100 : 100 : 100 \Rightarrow 0{,}00005\ hm^2$$

Isto equivale a passar a vírgula seis casas para a esquerda.

Portanto, 50 dm^2 é igual a 0, 00005 hm^2.

5) Resposta "0,000000000000000014 km^3, ou a 1,4 x 10^{-17} km^3".
Solução: Para passarmos de milímetros cúbicos para quilômetros cúbicos, passaremos seis níveis à esquerda. Dividiremos então 14 por 1000 seis vezes:

$$14\ mm^3 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 \Rightarrow$$

$$1{,}4 \cdot 10^{-17}\ km^3 \Rightarrow 0.000000000000000014\ km^3$$

Portanto, 0, 000000000000000014 km^3, ou a 1,4 x 10^{-17} km^3 se expresso em notação científica equivalem a 14 mm^3.

6) Resposta "150.000 cl".
Solução: Para irmos de hectolitros a centilitros, passaremos quatro níveis à direita.
Multiplicaremos então 15 por 10 quatro vezes:

$$15\ hl \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 150.000\ cl$$

Isto equivale a passar a vírgula quatro casas para a direita.

Logo, 150.000 cl equivalem a 15 hl.

7) Resposta "5,2 kg".

Solução: Para passarmos 5.200 gramas para quilogramas, devemos dividir (porque na tabela grama está à direita de quilograma) 5.200 por 10 três vezes, pois para passarmos de gramas para quilogramas saltamos três níveis à esquerda.

Primeiro passamos de grama para decagrama, depois de decagrama para hectograma e finalmente de hectograma para quilograma:

$$5200\ g : 10 : 10 : 10 \Rightarrow 5{,}2\ kg$$

Isto equivale a passar a vírgula três casas para a esquerda.

Portanto, 5.200 g são iguais a 5,2 kg.

8) Resposta "250 cm".

Solução: Para convertermos 2,5 metros em centímetros, devemos multiplicar (porque na tabela metro está à esquerda de centímetro) 2,5 por 10 duas vezes, pois para passarmos de metros para centímetros saltamos dois níveis à direita.

Primeiro passamos de metros para decímetros e depois de decímetros para centímetros:

$$2{,}5\ m \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow 250\ cm$$

Isto equivale a passar a vírgula duas casas para a direita.

Logo, 2,5 m é igual a 250 cm.

9) Resposta "305min".

Solução:

(5 . 60) + 5 = 305 min.

10) Resposta "45 min".

Solução: 45 min

$$14 : 10^{18}\ km^3 \Rightarrow 14 \cdot 10^{-18}\ km^3 \Rightarrow$$

Unidade de tempo

A unidade padrão de medida de tempo é o segundo, abreviado por s.

Os múltiplos do segundo são:

Hora	Minuto	Segundo
h	min	s
3600 s	60 s	1 s

Usamos o sistema sexagesimal, que emprega a base sessenta. Os múltiplos do segundo enquadram-se nesse sistema. Repare que cada unidade é sessenta vezes maior que a unidade que a antecede.

1 h = 60 min

1 min = 60 s

Para transformar uma unidade em outra imediatamente superior, basta dividi-la por 60 e inferior basta multiplica-la por 60.

Ex:3h = 3 . 60 = 180 min

52 min = 52 . 60 = 3120 s

1020 s = 1020 : 60 = 17 min

420 min = 420 : 60 = 7 h

Ao usarmos o sistema sexagesimal, cada grupo de 60 forma outra classe; então, 60 segundos formam 1 minuto e 60 minutos formam 1 hora. Para adicionarmos unidades de tempo vamos tomar cuidado para posicionar hora embaixo de hora, minuto embaixo de minuto e segundo embaixo de segundo.

Por exemplo: 1)Para adicionarmos 5h 12 min 37 s a 8 h 20 min 11 s, vamos colocar as unidades iguais uma embaixo da outra e depois adicionar os valores da mesma classe.

Horaminuto segundo

5 1237

8 2011

---

13 3248

2)vamos adicionar 8h 19 min 58 s com 2 h 24 min 39 s

Horaminuto segundo

8 19 58

224 39

---

10 43 97

Note que , na casa dos segundos, obtivemos 97 s e vamos decompor esse valor em:

97 s = 60 s + 37 s = 1 min + 37 s

Então, devemos retirar 60 s da classe dos segundos e acrescentar 1 min na classe dos minutos.

Logo a resposta fica: 10 h 44 min 37 s

Para subtrair unidades de medida de tempo, o processo é semelhante ao usado na adição.

Ex; vamos subtrair 4 h 41 min 44 s de 7 h 53 min 36 s

Horaminutosegundo

7 5336

4 4144

Perceba que a subtração 36 s – 44 s não é possível nos números naturais, então, vamos retirar 1 min de 53 min, transformar esse 1 min em 60 s e acrescenta-los aos 36 s. Assim:

Hora minuto segundo

7 52 96

4 41 44

---

3 11 52

Para multiplicarmos uma unidade de medida de tempo por um número natural, devemos multiplicar as horas, minutos e segundos Por esse número natural.

Ex: multiplicar 4 h 52 min 8 s por 6

4 h52 min 8 s

X6

24h 312 min48 s

Como 312 min é maior que 1 hora, devemos descobrir quantas horas cabem em 312 minutos. Para isso basta dividir 312 por 60 onde o resultado é 5 e o resto é 12.

Então 312 min = 5 h 12 min

Devemos então acrescentar 5 h a 24 h = 29 h e o resultado fica

29 h 12 min 48 s

Problemas

1.Dois amigos partiram às 10h 32 min de Aparecida do Norte e chegaram a Ribeirão Preto às 16 h 8 min. Quanto tempo durou a viagem?

2. João nasceu numa terça feira às 13 h 45 min 12 s e Maria nasceu no mesmo dia, às 8 h 13 min 47 s. Determine a diferença entre os horários de nascimento de João e Maria, nessa ordem.

3.Um passageiro embarcou em um ônibus na cidade A às 14h 32 min 18s, esse ônibus saiu da rodoviária desta cidade às 14h 55min 40s e chegou à rodoviária da cidade B às 19h 27min 15s,do mesmo dia. Quanto tempo o passageiro permaneceu no interior do ônibus?

a) 05h 54min 09s
b) 04h 05min 57s
c) 05h 05min 09s
d) 04h 54min 57s

Respostas

1.5 h 36 min

2.5 h 31 min 25 s

3.Vamos considerar o horário de chegada à cidade B e o horário que o passageiro entrou no ônibus

19 h27 min15 seg
14 h32 min18 seg

Para subtrair 18 de 15 não é possível então emprestamos 1 minuto dos 27

Que passa a ser 26 e no lugar de 15 seg usamos 15 +60(que é 1 min). Então

75 – 18 = 57 seg.

O mesmo acontece com os minutos. Vamos emprestar 1 hora das 19 que passa a ser 18 e no lugar de 26 minutos usamos 26 + 60 (que é uma hora). Então 86 – 32 = 54 minutos

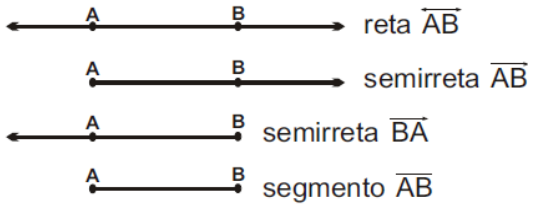
Por fim 18 h – 14 h = 4 horas
Resp. 4 horas 54 min e 57 seg.

GEOMETRIA: PONTO, RETA, PLANO – ÂNGULOS, POLÍGONOS, TRIÂNGULOS, QUADRILÁTEROS, CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E SEUS ELEMENTOS RESPECTIVOS – FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS (PERÍMETROS E ÁREAS) – SÓLIDOS GEOMÉTRICOS (FIGURAS ESPACIAIS): SEUS ELEMENTOS E VOLUMES;

GEOMETRIA PLANA

A Geometria é a parte da matemática que estuda as figuras e suas propriedades. A geometria estuda figuras abstratas, de uma perfeição não existente na realidade. Apesar disso, podemos ter uma boa ideia das figuras geométricas, observando objetos reais, como o aro da cesta de basquete que sugere uma circunferência, as portas e janelas que sugerem retângulos e o dado que sugere um cubo.

Reta, semirreta e segmento de reta



Definições.

a) Segmentos congruentes.

Dois segmentos são congruentes se têm a mesma medida.

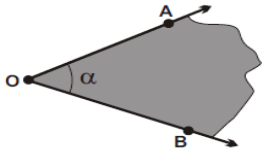
b) Ponto médio de um segmento.

Um ponto P é ponto médio do segmento AB se pertence ao segmento e divide AB em dois segmentos congruentes.

c) Mediatriz de um segmento.

É a reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio

Ângulo



OA - lado
OB - lado
O - vértice
ângulo $A\hat{O}B$ ou ângulo α

Definições.

a) Ângulo é a região plana limitada por duas semirretas de mesma origem.

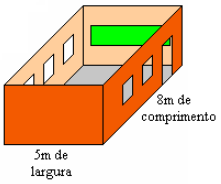
b) Ângulos congruentes: Dois ângulos são ditos congruentes se têm a mesma medida.

c) Bissetriz de um ângulo: É a semirreta de origem no vértice do ângulo que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.

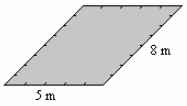
Perímetro: entendendo o que é perímetro.

Imagine uma sala de aula de 5m de largura por 8m de comprimento.

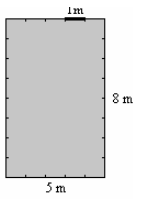
Quantos metros lineares serão necessários para colocar rodapé nesta sala, sabendo que a porta mede 1m de largura e que nela não se coloca rodapé?



SALA DE AULA EM PERSPECTIVA



PLANTA BAIXA EM PERSPECTIVA



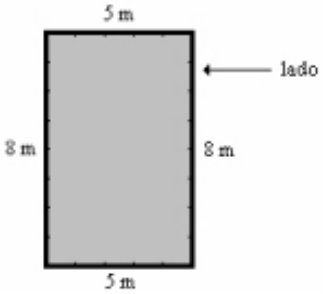
PLANTA BAIXA

A conta que faríamos seria somar todos os lados da sala, menos 1m da largura da porta, ou seja:

P = (5 + 5 + 8 + 8) – 1

P = 26 – 1

P = 25



Colocaríamos 25m de rodapé.

A soma de todos os lados da planta baixa se chama Perímetro.

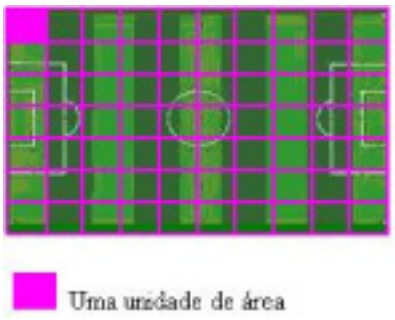
Portanto, Perímetro é a soma dos lados de uma figura plana.

Área

Área é a medida de uma superfície.

A área do campo de futebol é a medida de sua superfície (gramado).

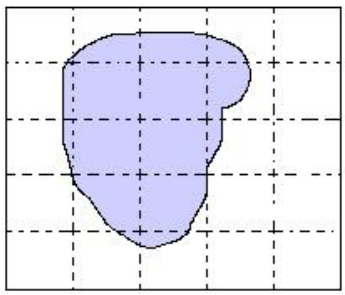
Se pegarmos outro campo de futebol e colocarmos em uma malha quadriculada, a sua área será equivalente à quantidade de quadradinho. Se cada quadrado for uma unidade de área:



Veremos que a área do campo de futebol é 70 unidades de área.

A unidade de medida da área é: m^2 (metros quadrados), cm^2 (centímetros quadrados), e outros.

Se tivermos uma figura do tipo:

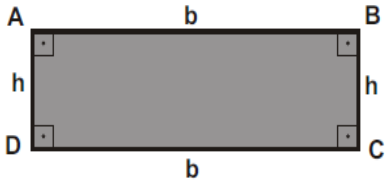


Sua área será um valor aproximado. Cada é uma unidade, então a área aproximada dessa figura será de 4 unidades.

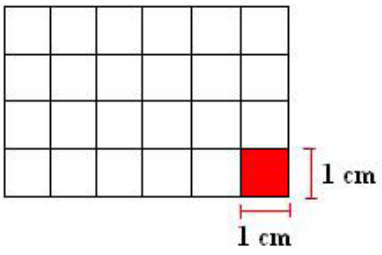
No estudo da matemática calculamos áreas de figuras planas e para cada figura há uma fórmula pra calcular a sua área.

Retângulo

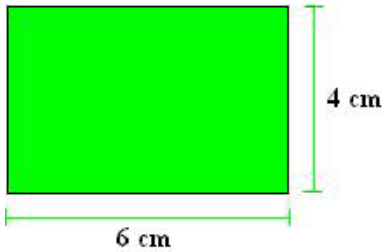
É o quadrilátero que tem todos os ângulos internos congruentes e iguais a 90°.



No cálculo da área de qualquer retângulo podemos seguir o raciocínio:



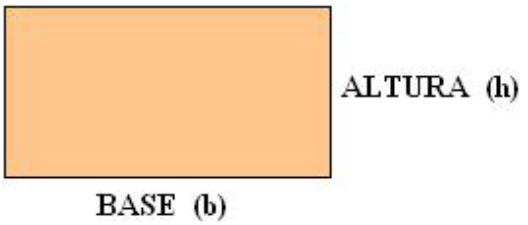
Pegamos um retângulo e colocamos em uma malha quadriculada onde cada quadrado tem dimensões de 1 cm. Se contarmos, veremos que há 24 quadrados de 1 cm de dimensões no retângulo. Como sabemos que a área é a medida da superfície de uma figuras podemos dizer que 24 quadrados de 1 cm de dimensões é a área do retângulo.



O retângulo acima tem as mesmas dimensões que o outro, só que representado de forma diferente. O cálculo da área do retângulo pode ficar também da seguinte forma:

A = 6 . 4 A = 24 cm²

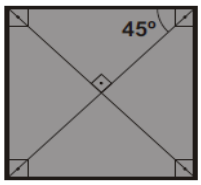
Podemos concluir que a área de qualquer retângulo é:



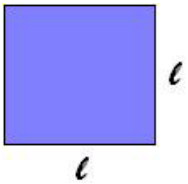
A = b . h

Quadrado

É o quadrilátero que tem os lados congruentes e todos os ângulos internos a congruentes (90º).



Sua área também é calculada com o produto da base pela altura. Mas podemos resumir essa fórmula:



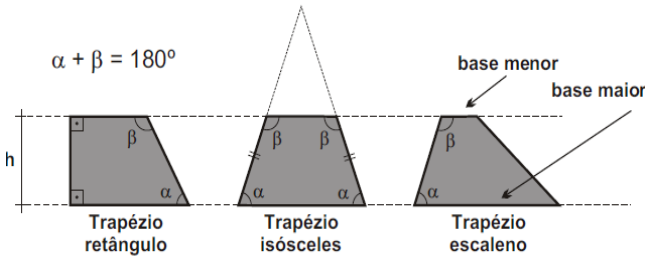
Como todos os lados são iguais, podemos dizer que base é igual a e a altura igual a , então, substituindo na fórmula A = b . h, temos:

$A = \ell . \ell$

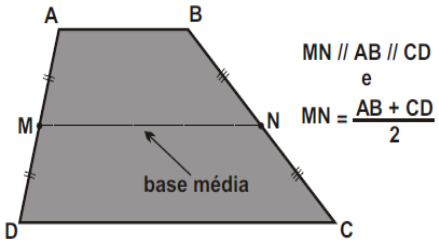
$A = \ell^2$

Trapézio

É o quadrilátero que tem dois lados paralelos. A altura de um trapézio é a distância entre as retas suporte de suas bases.



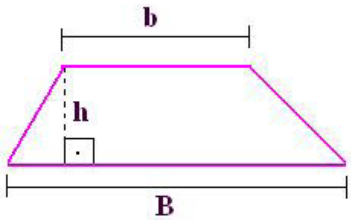
Em todo trapézio, o segmento que une os pontos médios dos dois lados não paralelos, é paralelo às bases e vale a média aritmética dessas bases.



A área do trapézio está relacionada com a área do triângulo que é calculada utilizando a seguinte fórmula:

A = b . h (b = base e h = altura).
2

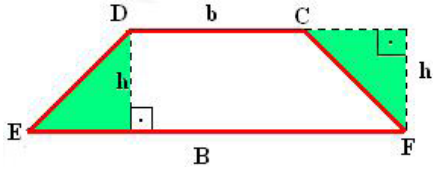
Observe o desenho de um trapézio e os seus elementos mais importantes (elementos utilizados no cálculo da sua área):



Um trapézio é formado por uma base maior (B), por uma base menor (b) e por uma altura (h).

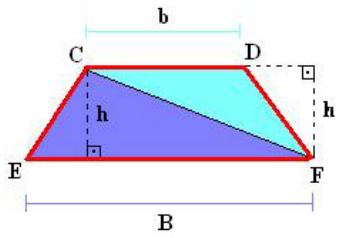
Para fazermos o cálculo da área do trapézio é preciso dividi-lo em dois triângulos, veja como:

Primeiro: completamos as alturas no trapézio:



NOVA CONCURSOS

Segundo: o dividimos em dois triângulos:



A área desse trapézio pode ser calculada somando as áreas dos dois triângulos (ΔCFD e ΔCEF).

Antes de fazer o cálculo da área de cada triângulo separadamente observamos que eles possuem bases diferentes e alturas iguais.

Cálculo da área do ΔCEF:

$$A\Delta 1 = \frac{B \cdot h}{2}$$

Cálculo da área do ΔCFD:

$$A\Delta 2 = \frac{b \cdot h}{2}$$

Somando as duas áreas encontradas, teremos o cálculo da área de um trapézio qualquer:

$AT = A\Delta 1 + A\Delta 2$

$$AT = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$AT = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \rightarrow$ colocar a altura (h) em evidência, pois é um termo comum aos dois fatores.

$$AT = \frac{h\,(B + b)}{2}$$

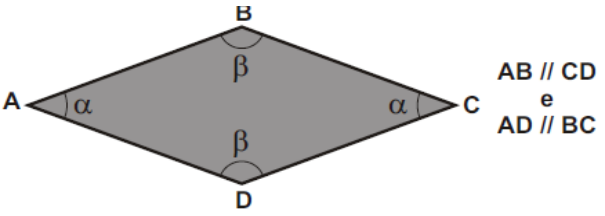
Portanto, no cálculo da área de um trapézio qualquer utilizamos a seguinte fórmula:

$$A = \frac{h\,(B + b)}{2}$$

h = altura
B = base maior do trapézio
b = base menor do trapézio

Losango

É o quadrilátero que tem os lados congruentes.



Em todo losango as diagonais são:

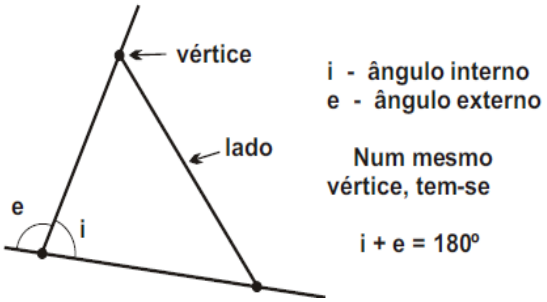
a) perpendiculares entre si;

b) bissetrizes dos ângulos internos.

A área do losango é definida pela seguinte fórmula: $S = \frac{d.D}{2}$ Onde D é a diagonal maior e d é a menor.

Triângulo

Figura geométrica plana com três lados.



Ângulo externo. O ângulo externo de qualquer polígono convexo é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado.

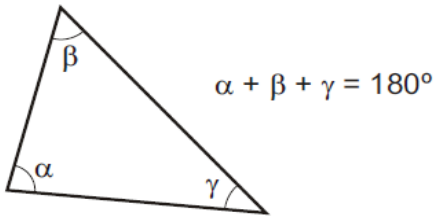
Classificação dos triângulos.

a) quanto aos lados:
- triângulo equilátero.
- triângulo isósceles.
- triângulo escaleno.

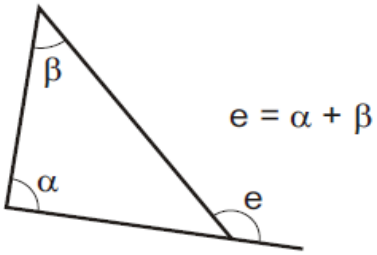
b) quanto aos ângulos:
- triângulo retângulo.
- triângulo obtusângulo.
- triângulo acutângulo.

Propriedades dos triângulos

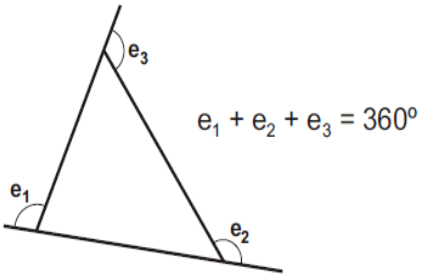
1) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos internos é 180º.



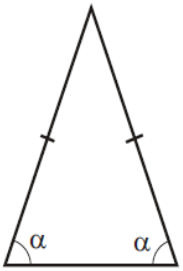
2) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos 2 ângulos internos não adjacentes.



3) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos externos é 360º.

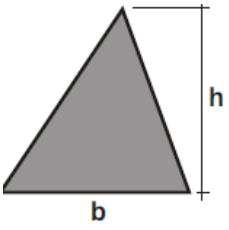


4) Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Observação - A base de um triângulo isósceles é o seu lado diferente.



Altura - É a distância entre o vértice e a reta suporte do lado oposto.

Área do triangulo

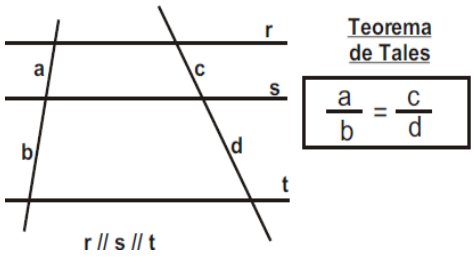


$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

Segmentos proporcionais

Teorema de Tales.

Em todo feixe de retas paralelas, cortado por uma reta transversal, a razão entre dois segmento quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.



Semelhança de triângulos

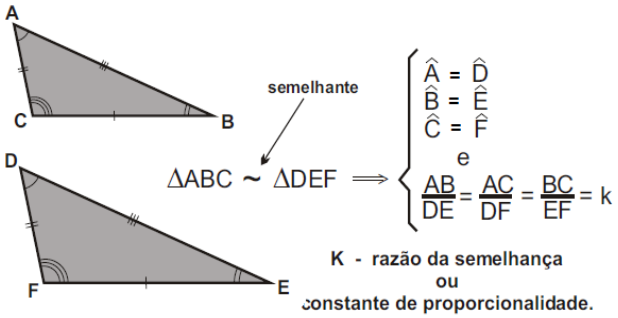
Definição.

Dois triângulos são semelhantes se têm os ângulos dois a dois congruentes e os lados correspondentes dois a dois proporcionais.

Definição mais "popular".

Dois triângulos são semelhantes se um deles é a redução ou a ampliação do outro.

Importante - Se dois triângulos são semelhantes, a proporcionalidade se mantém constante para quaisquer dois segmentos correspondentes, tais como: lados, medianas, alturas, raios das circunferências inscritas, raios das circunferências circunscritas, perímetros, etc.



NOVA CONCURSOS

Exercícios

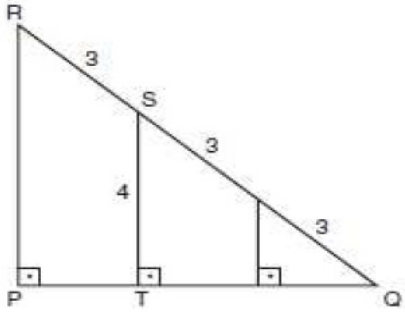
1. Seja um paralelogramo com as medidas da base e da altura respectivamente, indicadas por b e h. Se construirmos um outro paralelogramo que tem o dobro da base e o dobro da altura do outro paralelogramo, qual será relação entre as áreas dos paralelogramos?

2. Os lados de um triângulo equilátero medem 5 mm. Qual é a área deste triângulo equilátero?

3. Qual é a medida da área de um paralelogramo cujas medidas da altura e da base são respectivamente 10 cm e 2 dm?

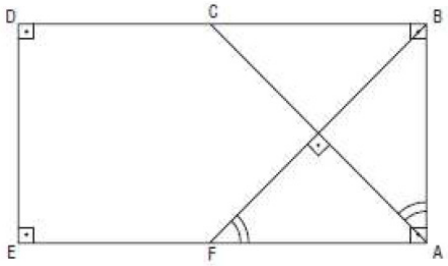
4. As diagonais de um losango medem 10 cm e 15 cm. Qual é a medida da sua superfície?

5. Considerando as informações constantes no triangulo PQR, pode-se concluir que a altura PR desse triângulo mede:



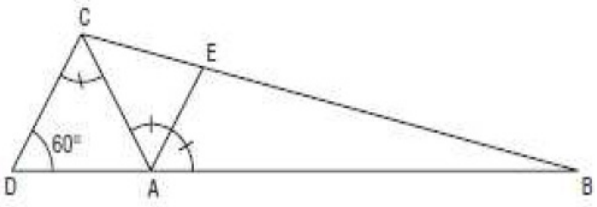
a)5 b)6 c)7 d)8

6. Num cartão retangular, cujo comprimento é igual ao dobro de sua altura, foram feitos dois vincos AC e BF, que formam, entre si, um ângulo reto (90°). Observe a figura:



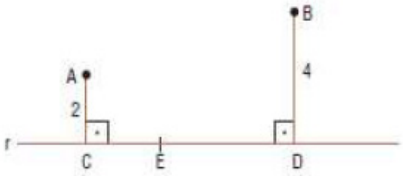
Considerando AF=16cm e CB=9cm, determine:
a) as dimensões do cartão;
b) o comprimento do vinco AC

7. Na figura, os ângulos assinalados sao iguais, AC=2 e AB=6. A medida de AE é:
a)6/5 b)7/4 c)9/5 d)3/2 e)5/4



8. Na figura a seguir, as distâncias dos pontos A e B à reta valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento CD, para que CÊA=DÊB

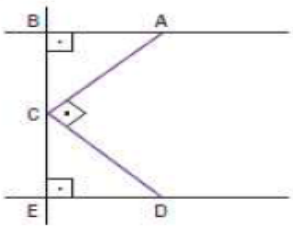
a)3
b)4
c)5
d)6
e)7



9. Para ladrilhar uma sala são necessários exatamente 400 peças iguais de cerâmica na forma de um quadrado. Sabendo-se que a área da sala tem 36m², determine:
a) a área de cada peça, em m².
b) o perímetro de cada peça, em metros.

10. Na figura, os ângulos ABC, ACD, CÊD, são retos. Se AB=$2\sqrt{3}$ m e CE=$\sqrt{3}$ m, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e CDE é:

a)6
b)4
c)3
d)2
e)$\sqrt{3}$



Respostas

1. A2 = (2b)(2h) = 4bh = 4A1

2. Segundo o enunciado temos:
l=5mm

Substituindo na fórmula:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3} \Rightarrow S = 10,8$$

3. Sabemos que 2 dm equivalem a 20 cm, temos:
h=10
b=20

Substituindo na fórmula:

$$S = b.h = 20.10 = 100cm^2 = 2dm^2$$

4. Para o cálculo da superfície utilizaremos a fórmula que envolve as diagonais, cujos valores temos abaixo:
d1=10
d2=15

Utilizando na fórmula temos:

$$S = \frac{d1.d2}{2} \Rightarrow \frac{10.15}{2} = 75cm^2$$

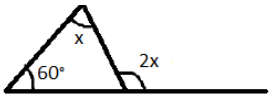
5. $\frac{4}{\overline{PR}} = \frac{6}{9} \Rightarrow \overline{PR} = \frac{36}{6} = 6$

6. $\frac{x}{16} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$a) x = 12(altura); 2x = 24(comprimento)$

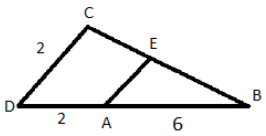
$b) \overline{AC} = \sqrt{9^2 + x^2} = \sqrt{81+144} = 15$

7.



3) $2x = x + 60 \Rightarrow$

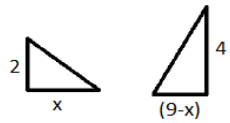
$x = 60$ (Triângulo Equilátero)



$\frac{2}{2+6} = \frac{\overline{AE}}{6} \Rightarrow 12 = 8 * \overline{AE} \Rightarrow$

$\overline{AE} = 12/8 = 6/4 = 3/2$

8.



2/4=x/(9-x)

18-2x=4x

6x=18

x=3

9.

$36m^2 \rightarrow 400$

$x \rightarrow 1$

$a) x = 36/400 = 9/100 = 0{,}09m^2$

$b) c = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3m$

10.

$\frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{b}$

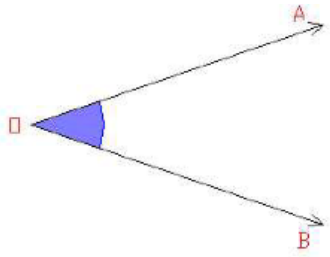
$a = 2b$

$\frac{2\sqrt{3} \times a}{2} \div \frac{\sqrt{3} \times b}{2} = \frac{2a}{b}$

$\frac{2(2b)}{b} = 4$

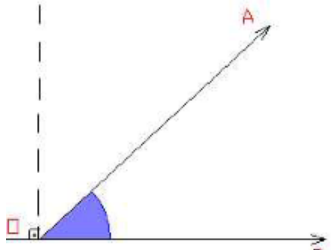
Ângulos

Ângulo: Do latim - angulu (canto, esquina), do grego - gonas; reunião de duas semi-retas de mesma origem não colineares.



Notação: AÔB
Lê-se ângulo AOB

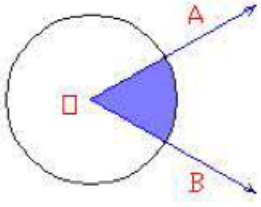
Ângulo Agudo: É o ângulo, cuja medida é menor do que 90º.

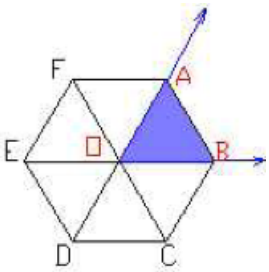


m (AÔB) $< 90^0$

Ângulo Central:

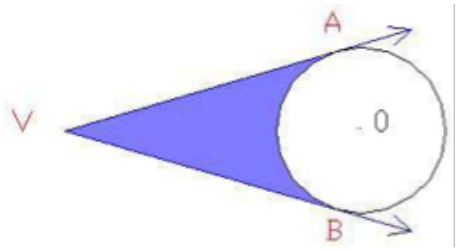
- Da circunferência: é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência;
- Do polígono: é o ângulo, cujo vértice é o centro do polígono regular e cujos lados passam por vértices consecutivos do polígono.



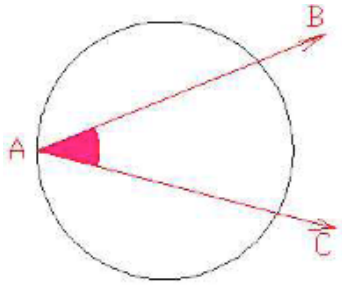


NOVA CONCURSOS

Ângulo Circunscrito: É o ângulo, cujo vértice não pertence à circunferência e os lados são tangentes à ela.

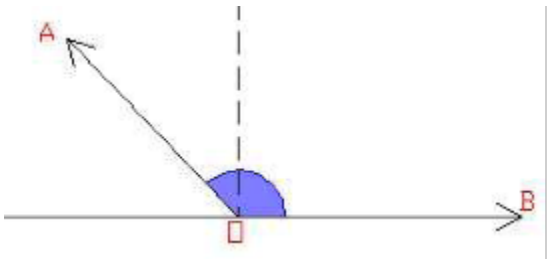


Ângulo Inscrito: É o ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e seus lados são secantes a ela.



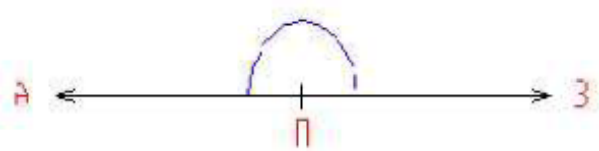
BÂC - ângulo inscrito

Ângulo Obtuso: É o ângulo cuja medida é maior do que 90º.



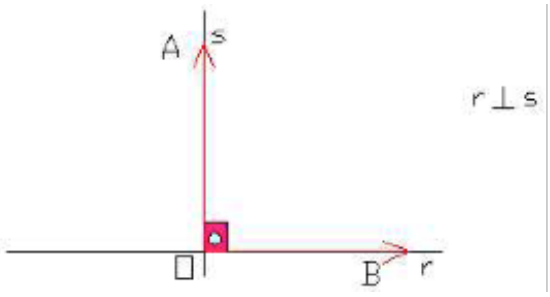
Ângulo Raso:

- É o ângulo cuja medida é 180º;
- É aquele, cujos lados são semi-retas opostas.

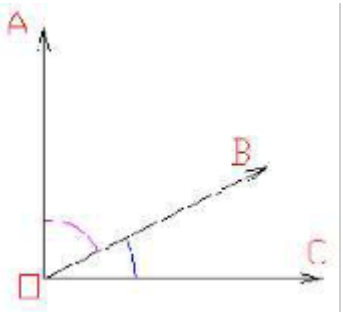


Ângulo Reto:

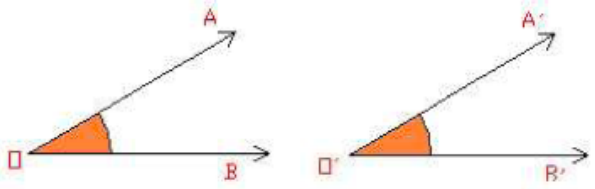
- É o ângulo cuja medida é 90º;
- É aquele cujos lados se apóiam em retas perpendiculares.



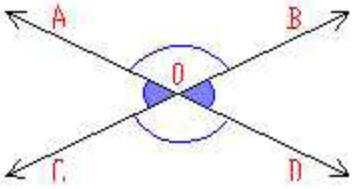
Ângulos Complementares: Dois ângulos são complementares se a soma das suas medidas é 90^0.



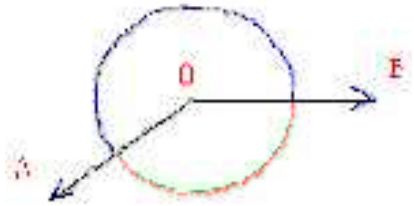
Ângulos Congruentes: São ângulos que possuem a mesma medida.



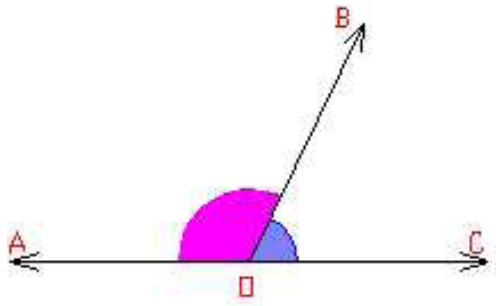
Ângulos Opostos pelo Vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.



Ângulos Replementares: Dois ângulos são ditos replementares se a soma das suas medidas é 360^0.



Ângulos Suplementares: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma das suas medidas de dois ângulos é 180°.



Poligonal: Linha quebrada, formada por vários segmentos formando ângulos.

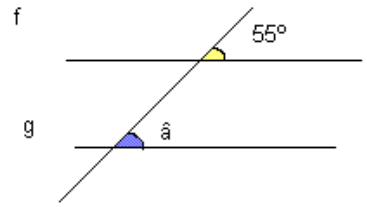
Grado: (gr.): Do latim - gradu; dividindo a circunferência em 400 partes iguais, a cada arco unitário que corresponde a 1/400 da circunferência denominamos de grado.

Grau: (º): Do latim - gradu; dividindo a circunferência em 360 partes iguais, cada arco unitário que corresponde a 1/360 da circunferência denominamos de grau.

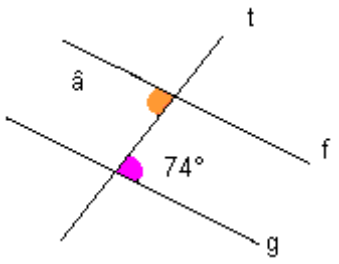
Exercícios

1. As retas f e g são paralelas (f // g). Determine a medida do ângulo â, nos seguintes casos:

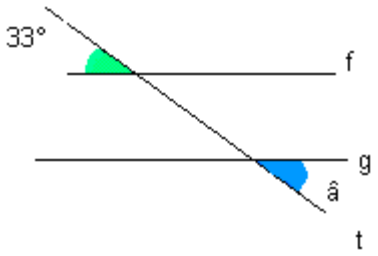
a)



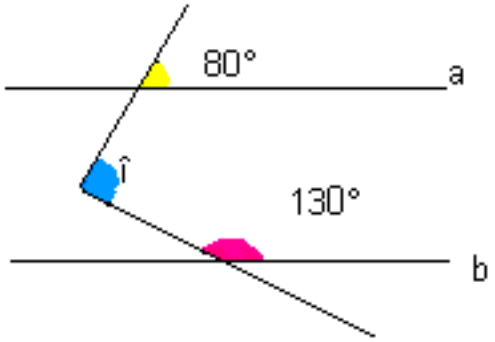
b)



c)



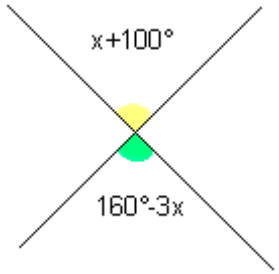
2. As retas a e b são paralelas. Quanto mede o ângulo î?



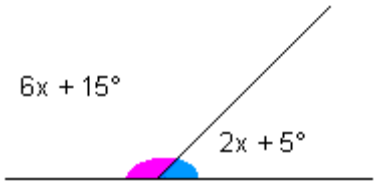
NOVA CONCURSOS

3. Obtenha as medidas dos ângulos assinalados:

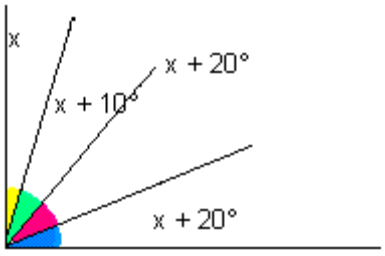
a)



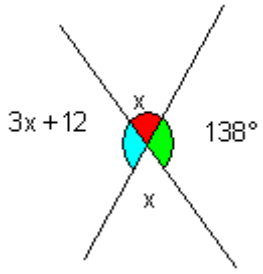
b)



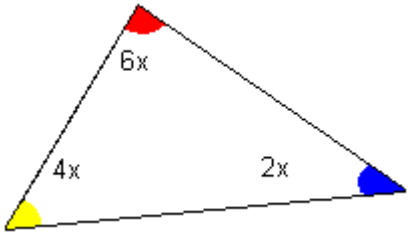
c)



d)



4. Usando uma equação, determine a medida de cada ângulo do triângulo:



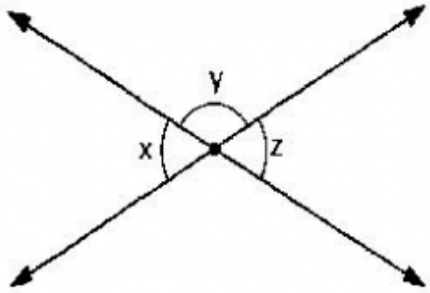
Quanto mede a soma dos ângulos de um quadrado?

5. Dois ângulos são complementares tais que o triplo de um deles é igual ao dobro do outro. Determine o suplemento do menor.

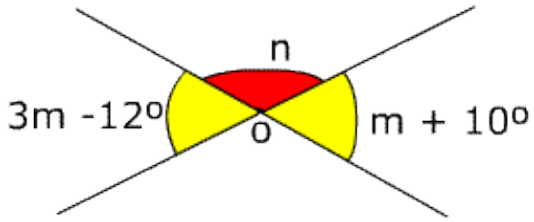
6. A metade de um ângulo menos a quinta parte de seu complemento mede 38 graus. Qual é esse angulo?

7. Cinco semi-retas partem de um mesmo ponto V, formando cinco ângulos que cobrem todo o plano e são proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6. Calcule o maior dos ângulos.

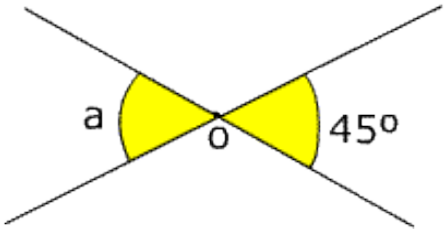
8. Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule y.



9. Observe a figura abaixo e determine o valor de m e n.



10. Determine o valor de a na figura seguinte:

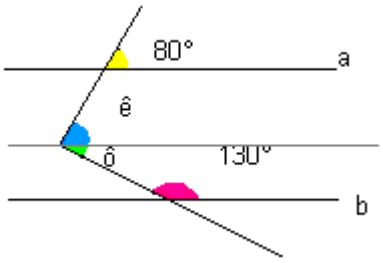


Respostas

1) Resposta
a) 55˚
b) 74˚
c) 33˚

2) Resposta "130".
Solução: Imagine uma linha cortando o ângulo **î**, formando uma linha paralela às retas "a" e "b".

Fica então decomposto nos ângulos **ê** e **ô.**



Sendo assim, **ê = 80°** e **ô = 50°**, pois o ângulo **ô** é igual ao complemento de 130° na reta b.

Logo, î = 80° + 50° = 130°.

3) Solução:
a) 160° - 3x = x + 100°
160° - 100° = x + 3x
60° = 4x
x = 60°/4
x = 15°
Então 15°+100° = 115° e 160°-3*15° = 115°

b) 6x + 15° + 2x + 5° = 180°
6x + 2x = 180° -15° - 5°
8x = 160°
x = 160°/8
x = 20°
Então, 6*20°+15° = **135°** e 2*20°+5° = **45°**

c) Sabemos que a figura tem 90°.
Então x + (x + 10°) + (x + 20°) + (x + 20°) = 90°
4x + 50° = 90°
4x = 40°
x = 40°/4
x = 10°

d) Sabemos que os ângulos laranja + verde formam 180°, pois são exatamente a metade de um círculo.
Então, 138° + x = 180°
x = 180° - 138°
x = 42°

Logo, o ângulo x mede 42°.

4) Solução: Sabemos que a soma dos ângulos do triângulo é 180°.

Então, 6x + 4x + 2x = 180°
12x = 180°
x = 180°/12
x = 15°
Os ângulos são: 30° 60° e 90°.

a) Um quadrado tem quatro ângulos de 90º, e, portanto a soma deles vale **360º**.

5) Resposta "144˚".
Solução:
- dois ângulos são complementares, então a + b = 90º
- o triplo de um é igual ao dobro do outro, então 3a = 2b

É um sistema de equações do 1º grau. Se fizermos a = 2b/3, substituímos na primeira equação:

2b/3 + b = 90
5b/3 = 90
b = 3/5 * 90
b = 54 → a = 90 – 54 = 36º

Como a é o menor ângulo, o suplemento de 36 é 180-36 = 144º.

6) Resposta "80˚".
Solução: (a metade de um ângulo) menos seu a [quinta parte] de seu [complemento] mede 38º.

[a/2] – [1/5] [(90-a)] = 38
a/2 – 90/5 + a/5 = 38
a/2 + a/5 = 38 + 90/5
7a/10 = 38 + 18
a = 10/7 * 56
a = 80º

7) Resposta "180˚".
Solução: Seja x a constante de proporcionalidade, temos para os ângulos: a, b, c, d, e..., a seguinte proporção com os números 2, 3, 4, 5 e 6:

a/2 = x → a = 2x
b/3 = x → b = 3x
c/4 = x → c = 4x
d/5 = x → d = 5x
e/6 = x → e = 6x

Assim as semi-retas: a + b + c + d + e = 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 360º

Agora a soma das retas: 20x

Então: 20x = 360º → x = 360°/20
x = 18°
Agora sabemos que o maior é 6x, então 6 . 18° = 108°.

8) Resposta "135°".
Solução: Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, **mais a metade do ângulo z. Calcule y.**

Então vale lembrar que:

x + y = 180 então y = 180 – x.

E também como x e z são opostos pelo vértice, x = z

E de acordo com a figura: o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, **mais a metade do ângulo z. Calcule y.**

x = y/6 + z/2
Agora vamos substituir lembrando que y = 180 - x e x = z
Então:

x = 180° - x/6 + x/2 agora resolvendo fatoração:
6x = 180°- x + 3x | 6x = 180° + 2x
6x – 2x = 180°
4x = 180°
x=180°/4
x=45°

Agora achar y, sabendo que y = 180° - x
y=180° - 45°
y=135°.

9) Resposta "11°; 159°".
Solução:
3m - 12° e m + 10°, são ângulos opostos pelo vértice logo são iguais.

3m - 12° = m + 10°
3m - m = 10° + 12°
2m = 22°
m = 22°/2
m = 11°
m + 10° e n são ângulos suplementares logo a soma entre eles é igual a 180°.
(m + 10°) + n = 180°
(11° + 10°) + n = 180°
21° + n = 180°
n = 180° - 21°
n = 159°

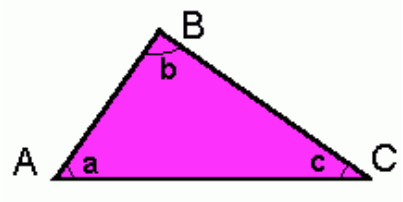
Resposta: m = 11° e n = 159°.

10) Resposta "45°".
É um ângulo oposto pelo vértice, logo, são ângulos iguais.

Triângulos

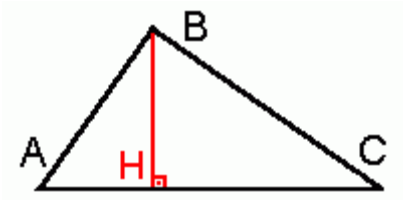
Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. Talvez seja o polígono mais importante que existe. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

Apresentaremos agora alguns objetos com detalhes sobre os mesmos.

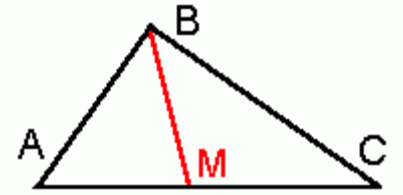


1. Vértices: A,B,C.
2. Lados: AB,BC e AC.
3. Ângulos internos: a, b e c.

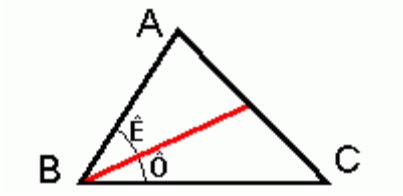
Altura: É um segmento de reta traçada a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. BH é uma altura do triângulo.



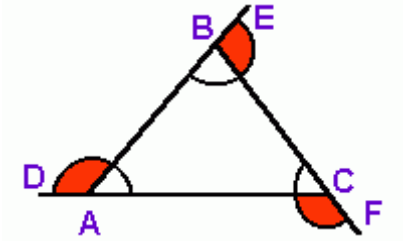
Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. BM é uma mediana.



Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo B está dividido ao meio e neste caso Ê = Ô.



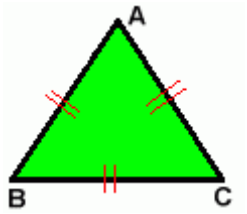
Ângulo Interno: É formado por dois lados do triângulo. Todo triângulo possui três ângulos internos.



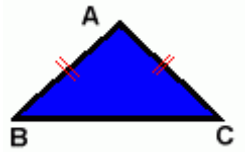
Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente (ao lado).

Classificação dos triângulos quanto ao número de lados

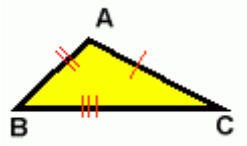
Triângulo Equilátero: Os três lados têm medidas iguais. m(AB) = m(BC) = m(CA)



Triângulo Isóscele: Pelo menos dois lados têm medidas iguais. m(AB) = m(AC).

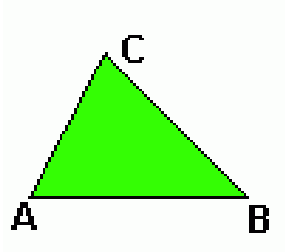


Triângulo Escaleno: Todos os três lados têm medidas diferentes.

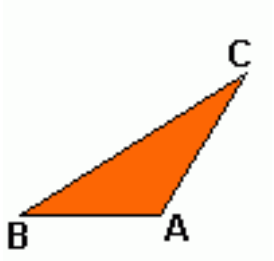


Classificação dos triângulos quanto às medidas dos ângulos

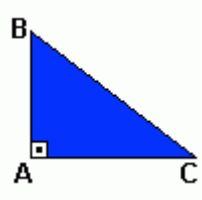
Triângulo Acutângulo: Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90º.



Triângulo Obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º.

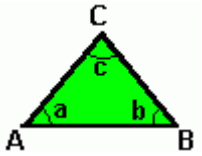


Triângulo Retângulo: Possui um ângulo interno reto (90 graus).



Medidas dos Ângulos de um Triângulo

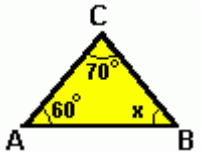
Ângulos Internos: Consideremos o triângulo ABC. Poderemos identificar com as letras **a**, **b** e **c** as medidas dos ângulos internos desse triângulo. Em alguns locais escrevemos as letras maiúsculas A, B e C para representar os ângulos.



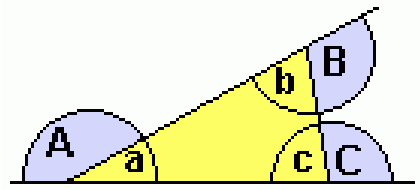
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus, isto é: a + b + c = 180º

Exemplo

Considerando o triângulo abaixo, podemos escrever que: 70º + 60º + x = 180º e dessa forma, obtemos x = 180º - 70º - 60º = 50º.



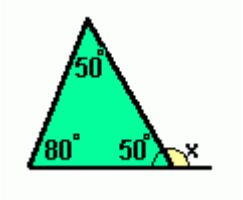
Ângulos Externos: Consideremos o triângulo ABC. Como observamos no desenho, em anexo, as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos.



Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim: A = b+c, B = a+c, C = a+b

Exemplo

No triângulo desenhado: x=50°+80°=130°.



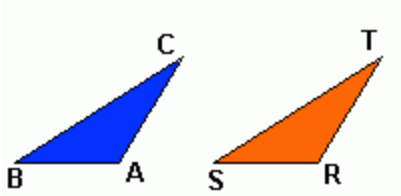
Congruência de Triângulos

A idéia de congruência: Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho.

Para escrever que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, usaremos a notação: ABC ~ DEF

Para os triângulos das figuras abaixo, existe a congruência entre os lados, tal que:

AB ~ RS, BC ~ ST, CA ~ T e entre os ângulos: A ~ R , B ~ S , C ~ T



Se o triângulo ABC é congruente ao triângulo RST, escrevemos: ABC ~ RST

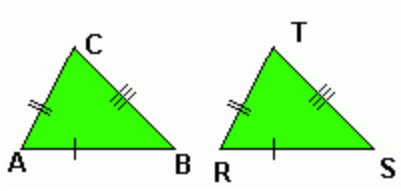
Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

Para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecerem três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado. Para facilitar o estudo, indicaremos os lados correspondentes congruentes marcados com símbolos gráficos iguais.

Casos de Congruência de Triângulos

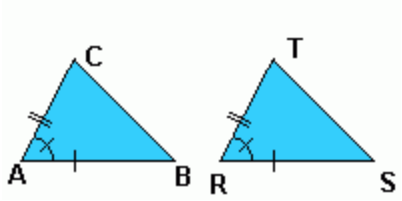
LLL (Lado, Lado, Lado): Os três lados são conhecidos.

Dois triângulos são congruentes quando têm, respectivamente, os três lados congruentes. Observe que os elementos congruentes têm a mesma marca.



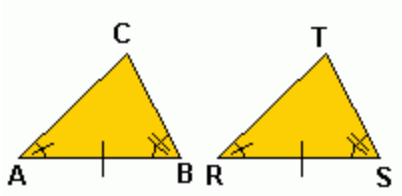
LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dados dois lados e um ângulo

Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados congruentes e os ângulos formados por eles também são congruentes.



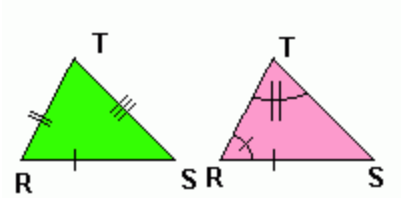
ALA (Ângulo, Lado, Ângulo): Dados dois ângulos e um lado

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, congruentes.



LAAo (Lado, Ângulo, Ângulo oposto): Conhecido um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado.

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, um ângulo, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruente.



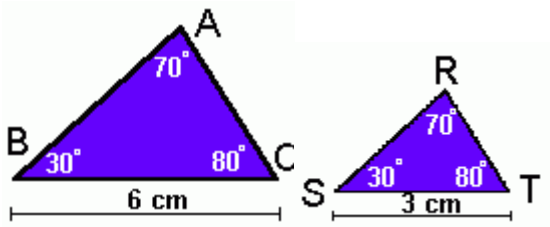
Semelhança de Triângulos

A idéia de semelhança: Duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

Se duas figuras R e S são semelhantes, denotamos: R~S.

Exemplo

As ampliações e as reduções fotográficas são figuras semelhantes. Para os triângulos:



os três ângulos são respectivamente congruentes, isto é: A~R, B~S, C~T

Observação: Dados dois triângulos semelhantes, tais triângulos possuem lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo é proporcional a um lado do outro triângulo, então estes dois lados são ditos homólogos. Nos triângulos acima, todos os lados proporcionais são homólogos.

Realmente:

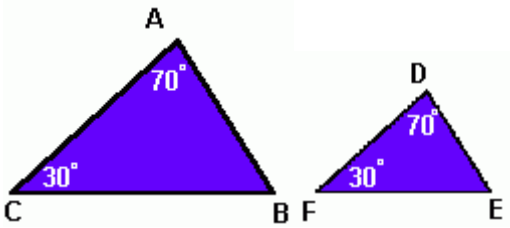
AB~RS pois m(AB)/m(RS) = 2
BC~ST pois m(BC)/m(ST) = 2
AC~RT pois m(AC)/m(RT) = 2

Como as razões acima são todas iguais a 2, este valor comum é chamado razão de semelhança entre os triângulos. Podemos concluir que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo RST.

Dois triângulos são semelhantes se, têm os 3 ângulos e os 3 lados correspondentes proporcionais, mas existem alguns casos interessantes a analisar.

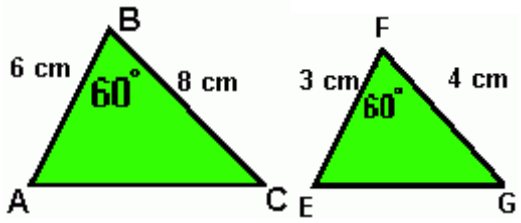
Casos de Semelhança de Triângulos

Dois ângulos congruentes: Se dois triângulos tem dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Se A~D e C~F então: ABC~DEF

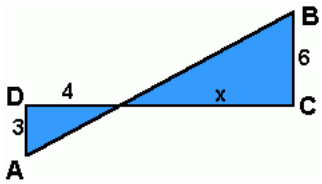
Dois lados congruentes: Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Como m(AB) / m(EF) = m(BC) / m(FG) = 2
Então ABC ~ EFG

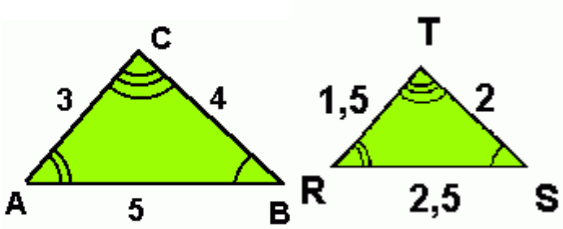
Exemplo

Na figura abaixo, observamos que um triângulo pode ser "rodado" sobre o outro para gerar dois triângulos semelhantes e o valor de x será igual a 8.



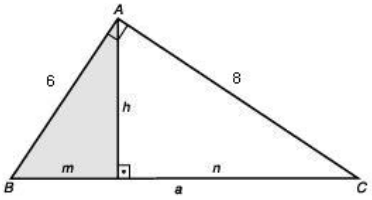
Realmente, x pode ser determinado a partir da semelhança de triângulos.

Três lados proporcionais: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

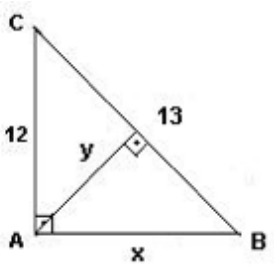


Exercícios

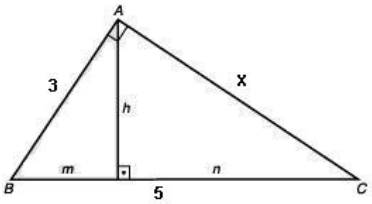
1. Neste triângulo ABC, vamos calcular a, h, m e n:



2. Determine os valores literais indicados na figura:

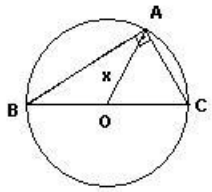


3. Determine os valores literais indicados na figura:

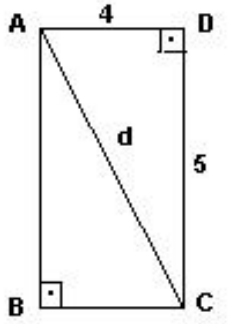


NOVA CONCURSOS

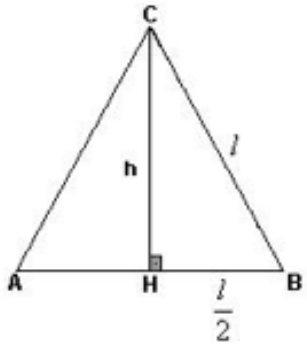
4. Determine os valores literais indicados na figura:



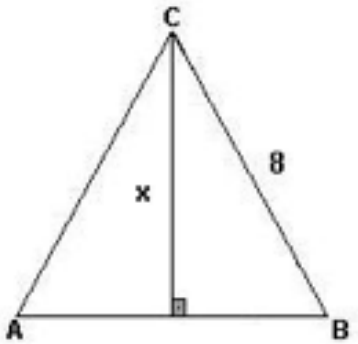
5. Determine os valores literais indicados na figura:



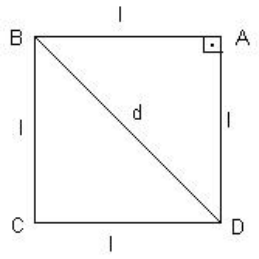
6. Determine a altura de um triângulo equilátero de lado l.



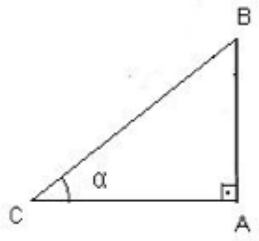
7. Determine x nas figuras.



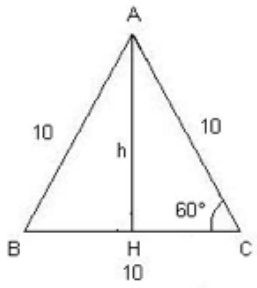
8. Determine a diagonal de um quadrado de lado l.



9. Calcule o perímetro do triângulo retângulo ABC da figura, sabendo que o segmento BC é igual a 10 m e cos α = 3/5



10. Calcule a altura de um triângulo equilátero que tem 10 cm de lado.



Respostas

1) Solução:
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow a = 10$
$b.c = a.h \rightarrow 8.6 = 10.h \rightarrow h = 48/10 = 4,8$
$c^2 = a.m \rightarrow 6^2 = 10.m \rightarrow m = 36/10 = 3,6$
$b^2 = a.n \rightarrow 8^2 = 10.n \rightarrow n = 64/10 = 6,4$

2) Solução:
$13^2 = 12^2 + x^2$
$169 = 144 + x^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$

$5.12 = 13.y$
$y = 60/13$

3) Solução:
$5^2 = 3^2 + x^2$
$25 = 9 + x^2$
$x^2 = 16$
$x = \sqrt{16} = 4$

$$3^2 = 5m$$
$$m = \frac{9}{5}$$
$$4^2 = 5n$$
$$n = \frac{16}{5}$$
$$h^2 = \frac{9}{5} x \frac{16}{5}$$
$$h^2 = \frac{144}{25}$$
$$h = \sqrt{\frac{144}{25}}$$
$$h = \frac{12}{5}$$

4) Solução:

$\overline{AC} = 10 \rightarrow e \leftarrow \overline{AB} = 24$

(O é o centro da circunferência)

Solução:

$$(\overline{BC})^2 = 10^2 + 24^2$$
$$(\overline{BC})^2 = 100 + 576$$
$$(\overline{BC})^2 = 676$$
$$\overline{BC} = \sqrt{676} = 26$$
$$x = \frac{26}{2} = 13$$

5) Solução:
$d^2 = 5^2 + 4^2$
$d^2 = 25 + 16$
$d^2 = 41$
$d = \sqrt{41}$

6) Solução:

$$l^2 = h^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$l^2 = h^2 + \frac{1^2}{4}$$
$$h^2 = l^2 - \frac{1^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

7) Solução: O triângulo ABC é equilátero.

$$x = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

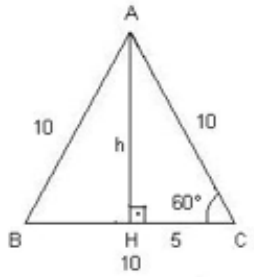
8) Solução:
$d^2 = l^2 + 1^2$
$d^2 = 2l^2$
$d = \sqrt{2l^2}$
$d = 1\sqrt{2}$

9) Solução:

$$\cos\alpha = \frac{x}{10}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$$
$$5x = 30$$
$$x = \frac{30}{5} = 6$$
$$10^2 = 6^2 + y^2$$
$$100 = 36 + y2$$
$$y^2 = 100 - 36$$
$$y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 = 8}$$
$$P = 10 + 6 + 8 = 24m$$

NOVA CONCURSOS

10) Solução:



$10^2 = 5^2 + h^2$

$h^2 = 100 - 25$

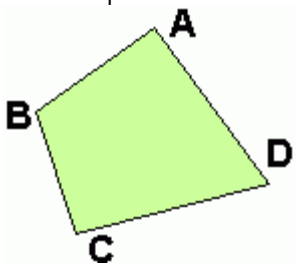
$h^2 = 75$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{5^2.3} = 5\sqrt{3}cm$

Quadrilátero

Quadriláteros e a sua classificação

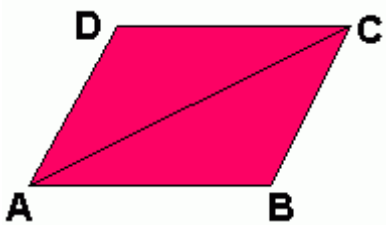
Quadrilátero é um polígono com quatro lados e os principais quadriláteros são: quadrado, retângulo, losango, trapézio e trapezóide.



No quadrilátero acima, observamos alguns elementos geométricos:

- Os vértices são os pontos: A, B, C e D.
- Os ângulos internos são A, B, C e D.
- Os lados são os segmentos AB, BC, CD e DA.

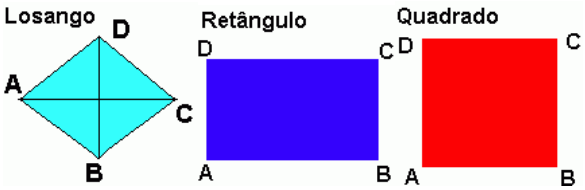
Observação: Ao unir os vértices opostos de um quadrilátero qualquer, obtemos sempre dois triângulos e como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus.



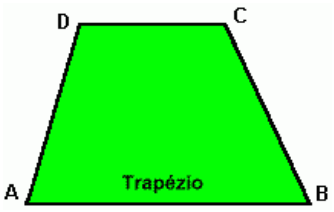
Classificação dos Quadriláteros

Paralelogramo: É o quadrilátero que tem lados opostos paralelos. Num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes. Os paralelogramos mais importantes recebem nomes especiais:

- Losango: 4 lados congruentes
- Retângulo: 4 ângulos retos (90 graus)
- Quadrado: 4 lados congruentes e 4 ângulos retos.



Trapézio: É o quadrilátero que tem apenas dois lados opostos paralelos. Alguns elementos gráficos de um trapézio (parecido com aquele de um circo).



- AB é paralelo a CD
- BC é não é paralelo a AD
- AB é a base maior
- DC é a base menor

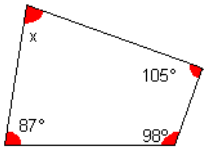
Os trapézios recebem nomes de acordo com os triângulos que têm características semelhantes. Um trapézio pode ser:

- Retângulo: dois ângulos retos
- Isósceles: lados não paralelos congruentes
- Escaleno: lados não paralelos diferentes

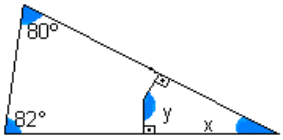
Exercícios

1. Determine a medida dos ângulos indicados:

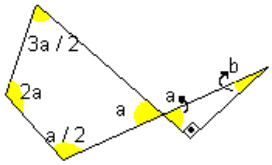
a)



b)

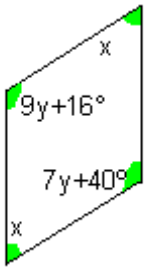


c)

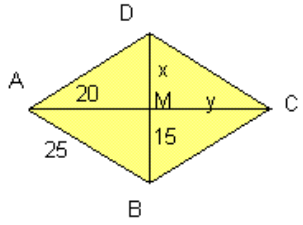


2. As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são: x + 17°; x + 37°; x + 45° e x + 13°. Determine as medidas desses ângulos.

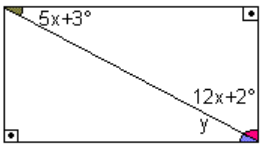
3. No paralelogramo abaixo, determine as medidas de x e y.



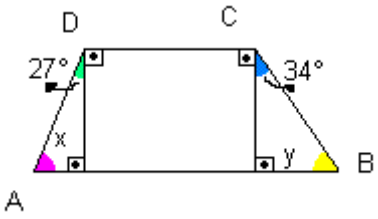
4. A figura abaixo é um losango. Determine o valor de x e y, a medida da diagonal $\overline{AC}$, da diagonal $\overline{BD}$ e o perímetro do triângulo BMC.



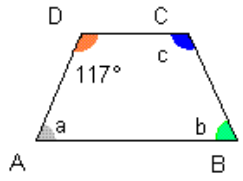
5. No retângulo abaixo, determine as medidas de x e y indicadas:



6. Determine as medidas dos ângulos do trapézio da figura abaixo:



7. A figura abaixo é um trapézio isósceles, onde a, b, c representam medidas dos ângulos internos desse trapézio. Determine a medida de a, b, c.



8. Sabendo que x é a medida da base maior, y é a medida da base menor, 5,5 cm é a medida da base média de um trapézio e que x - y = 5 cm, determine as medidas de x e y.

9. Seja um paralelogramo com as medidas da base e da altura respectivamente, indicadas por b e h. Se construirmos um outro paralelogramo que tem o dobro da base e o dobro da altura do outro paralelogramo, qual será relação entre as áreas dos paralelogramos?

10. É possível obter a área de um losango cujo lado mede 10 cm?

NOVA CONCURSOS

Respostas

1) Solução:
a) x + 105° + 98° + 87° = 360°
x + 290° = 360°
x = 360° - 290°
x = 70°

b) x + 80° + 82° = 180°
x + 162° = 180°
x = 180° - 162°
x = 18°
18° + 90° + y + 90° = 360°
y + 198° = 360°
y = 360° - 198°
y = 162°

c) 3a / 2 + 2a + a / 2 + a = 360°
(3a + 4a + a + 2a) / 2 = 720° /2
10a = 720°
a = 720° / 10
a = 72°
72° + b + 90° = 180°
b + 162° = 180°
b = 180° - 162°
b = 18°.

2) Solução:
x + 17° + x + 37° + x + 45° + x + 13° = 360°
4x + 112° = 360°
4x = 360° - 112°
x = 248° / 4
x = 62°

Então, os ângulos são:
x + 17° = 79°
x + 37° = 99°
x + 45° = 107°
x + 13° = 75°.

3) Solução:
9y + 16° = 7y + 40°
9y = 7y + 40° - 16°
9y = 7y + 24°
9y - 7y = 24°
2y = 24°
y = 24° /2
y = 12°

Então:
x + (7 * 12° + 40°) = 180°
x = 180° - 124°
x = 56°

4) Solução:
x = 15
y = 20
$\frac{AC}{BD}$ = 20 + 20 = 40
= 15 + 15 = 30
BMC = 15 + 20 + 25 = 60.

5) Solução:
12 x + 2° + 5 x + 3° = 90°
17 x + 5° = 90°
17 x = 90° - 5°
17 x = 85°
x = 85° / 17° = 5°
y = 5x + 3°
y = 5 (5°) + 3°
y = 28°

6) Solução:
x + 27° + 90° = 180°
x + 117° = 180°
x = 180° - 117°
x = 63°

y + 34° + 90° = 180°
y + 124° = 180°
y = 180° - 124°
y = 56°

As medidas dos ângulos são:
63° ; 56° ; 90° + 27° = 117° ; 90 + 34° = 124°.
7) Solução:
c = 117°
a + 117° = 180°
a = 180° - 117°
a = 63°
b = 63°

8) Solução:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5,5 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\frac{x+y}{2} = 5,5$$

$$x + y = 11$$

x + y = 11
x - y = 5
_____

2x + 0 = 16
2x = 16/2
x = 8

x + y = 11
8 + y = 11
y = 11 – 8
y = 3

9) Solução:
A2 = (2b)(2h) = 4 bh = 4 A1

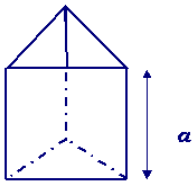
10) Solução:
Não, pois os ângulos entre os lados de dois losangos, podem ser diferentes.

GEOMETRIA ESPACIAL

Sólidos Geométricos

Para explicar o cálculo do volume de figuras geométricas, podemos pedir que visualizem a seguinte figura:

Prisma



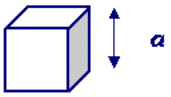
a) *A figura representa a planificação de um prisma reto;*
b) O volume de um prisma reto é igual ao produto da área da base pela altura do sólido, isto é

V = Ab x a

c) O cubo e o paralelepípedo retângulo são prismas;
d) O volume do cilindro também se pode calcular da mesma forma que o volume de um prisma reto.
Os formulários seguintes, das figuras geométricas são para calcular da mesma forma que as acima apresentadas:

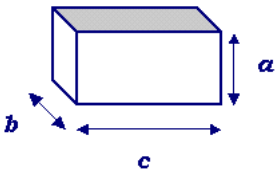
Figuras Geométricas:

Cubo



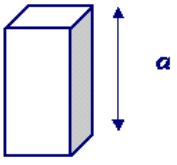
$V = a^3$

Paralelepípedo



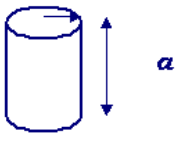
$V = a \times b \times c$

Prisma



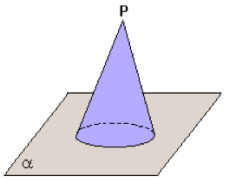
$Al = P \times a$
$At = Al + 2Ab$

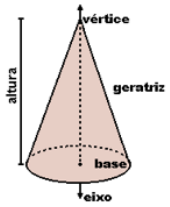
Cilindro



$At = Al + 2Ab$
$= 2\pi r a + 2\pi r^2$

O conceito de cone



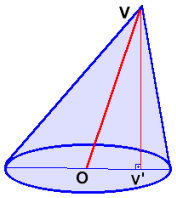


Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

Elementos do cone

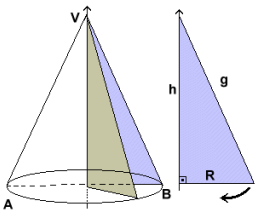
- Base: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
- Vértice: O vértice do cone é o ponto P.
- Eixo: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- Geratriz: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- Altura: Distância do vértice do cone ao plano da base.
- Superfície lateral: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
- Superfície do cone: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
- Seção meridiana: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

Classificação do cone



Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto** quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.



Observações sobre um cone circular reto

1. Um cone circular reto é chamado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos

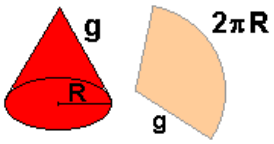
2. A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. No caso acima, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.

3. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos: $g^2 = h^2 + R^2$

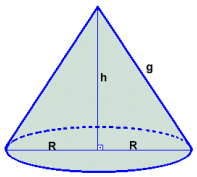
4. A **Área Lateral** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):A_{Lat} = Pi R g

5. A **Área total** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

A_{Total} = Pi R g + Pi R^2



Cones Equiláteros



Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.

A área da base do cone é dada por:

A_{Base}=Pi R^2

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$(2R)^2 = h^2 + R^2$

$h^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Assim:

$h = R\sqrt{3}$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$V = (1/3)\ Pi\ \sqrt{3}R^3$

Como a área lateral pode ser obtida por:

A_{Lat} = Pi R g = Pi R 2R = 2 Pi R^2

então a área total será dada por:

A_{Total} = 3 Pi R^2

O conceito de esfera

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações a problemas da vida. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico (disco esférico) envolvido pela mesma, razão pela quais muitas pessoas calculam o *volume* da esfera. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido, herança da Geometria Euclidiana.

Embora não seja correto, muitas vezes necessitamos falar palavras que sejam entendidas pela coletividade. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento, mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n-dimensional. Um caso interessante é a esfera na reta unidimensional:

S^o = {x em R: x^2=1} = {+1,-1}

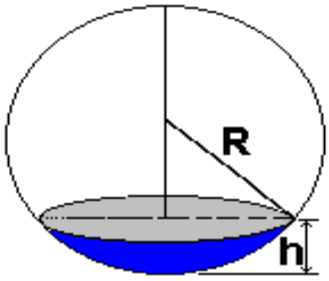
Por exemplo, a esfera

S^1 = { (x,y) em R^2: $x^2 + y^2 = 1$ }

é conhecida por nós como uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano.

Aplicação: volumes de líquidos

Um problema fundamental para empresas que armazenam líquidos em tanques esféricos, cilíndricos ou esféricos e cilíndricos é a necessidade de realizar cálculos de volumes de regiões esféricas a partir do conhecimento da altura do líquido colocado na mesma. Por exemplo, quando um tanque é esférico, ele possui um orifício na parte superior (pólo Norte) por onde é introduzida verticalmente uma vara com indicadores de medidas. Ao retirar a vara, observa-se o nível de líquido que fica impregnado na vara e esta medida corresponde à altura de líquido contido na região esférica. Este não é um problema trivial, como observaremos pelos cálculos realizados na sequência.



A seguir apresentaremos elementos esféricos básicos e algumas fórmulas para cálculos de áreas na esfera e volumes em um sólido esférico.

A superfície esférica

A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

Uma notação para a esfera com raio unitário centrada na origem de R^3 é:

$S^2 = \{ (x,y,z) \text{ em } R^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

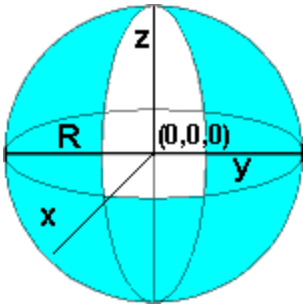
Uma esfera de raio unitário centrada na origem de R^4 é dada por:

$S^3 = \{ (w,x,y,z) \text{ em } R^4: w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

Você conseguiria imaginar espacialmente tal esfera?

Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico. Em uma melancia esférica, a esfera poderia ser considerada a película verde (casca) que envolve a fruta.

É comum encontrarmos na literatura básica a definição de esfera como sendo o sólido esférico, no entanto não se devem confundir estes conceitos. Se houver interesse em aprofundar os estudos desses detalhes, deve-se tomar algum bom livro de Geometria Diferencial que é a área da Matemática que trata do detalhamento de tais situações.



O disco esférico é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados na casca e dentro da esfera. Do ponto de vista prático, o disco esférico pode ser pensado como a reunião da película fina que envolve o sólido esférico com a região sólida dentro da esfera. Em uma melancia esférica, o disco esférico pode ser visto como toda a fruta.

Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (0,0,0), a equação da esfera é dada por:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

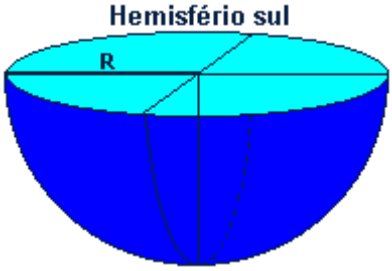
Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (x_o,y_o,z_o), a equação da esfera é dada por:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em R^3 tal que:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 \leq R^2$

Da forma como está definida, a esfera centrada na origem pode ser construída no espaço euclidiano R^3 de modo que o centro da mesma venha a coincidir com a origem do sistema cartesiano R^3, logo podemos fazer passar os eixos OX, OY e OZ, pelo ponto (0,0,0).



Seccionando a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ com o plano z=0, obteremos duas superfícies semelhantes: o hemisfério Norte ("boca para baixo") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z é não negativa e o hemisfério Sul ("boca para cima") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z não é positiva.

Se seccionarmos a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ por um plano vertical que passa em (0,0,0), por exemplo, o plano x=0, teremos uma circunferência maximal C da esfera que é uma circunferência contida na esfera cuja medida do raio coincide com a medida do raio da esfera, construída no plano YZ e a equação desta circunferência será:

$x=0, y^2 + z^2 = R^2$

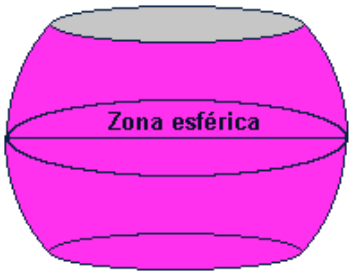
sendo que esta circunferência intersecta o eixo OZ nos pontos de coordenadas (0,0,R) e (0,0,-R). Existem infinitas circunferências maximais em uma esfera.

Se rodarmos esta circunferência maximal C em torno do eixo OZ, obteremos a esfera através da rotação e por este motivo, a esfera é uma superfície de revolução.

Se tomarmos um arco contido na circunferência maximal cujas extremidades são os pontos (0,0,R) e (0,p,q) tal que $p^2+q^2=R^2$ e rodarmos este arco em torno do eixo OZ, obteremos uma superfície denominada calota esférica.

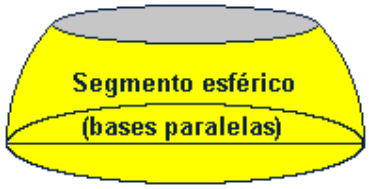
Na prática, as pessoas usam o termo calota esférica para representar tanto a superfície como o sólido geométrico envolvido pela calota esférica. Para evitar confusões, usarei "calota esférica" com aspas para o sólido e sem aspas para a superfície.

A partir da rotação, construiremos duas calotas em uma esfera, de modo que as extremidades dos arcos sejam (0,0,R) e (0,p,q) com $p^2+q^2=R^2$ no primeiro caso (calota Norte) e no segundo caso (calota Sul) as extremidades dos arcos (0,0,-R) e (0,r,-s) com $r^2+s^2=R^2$ e retirarmos estas duas calotas da esfera, teremos uma superfície de revolução denominada zona esférica.



De um ponto de vista prático, consideremos uma melancia esférica. Com uma faca, cortamos uma "calota esférica" superior e uma "calota esférica" inferior. O que sobra da melancia é uma região sólida envolvida pela zona esférica, algumas vezes denominada zona esférica.

Consideremos uma "calota esférica" com altura h_1 e raio da base r_1 e retiremos desta calota uma outra "calota esférica" com altura h_2 e raio da base r_2, de tal modo que os planos das bases de ambas sejam paralelos. A região sólida determinada pela calota maior menos a calota menor recebe o nome de segmento esférico com bases paralelas.



No que segue, usaremos esfera tanto para o sólido como para a superfície, "calota esférica" para o sólido envolvido pela calota esférica, a letra maiúscula R para entender o raio da esfera sobre a qual estamos realizando os cálculos, V será o volume, A(lateral) será a área lateral e A(total) será a área total.

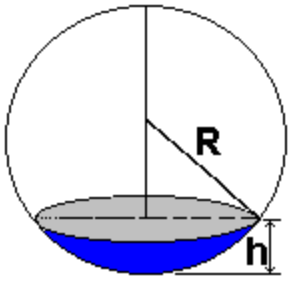
Algumas fórmulas (relações) para objetos esféricos

Objeto	Relações e fórmulas
Esfera	Volume = (4/3) Pi R^3 A(total) = 4 Pi R^2
Calota esférica (altura h, raio da base r)	R^2 = h (2R-h) A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = Pi h (4R-h) $V=Pi.h^2(3R-h)/3=Pi(3R^2+h^2)/6$
Segmento esférico (altura h, raios das bases $r_1>r^2$)	$R^2 = a^2 + [(r_1^2 - r_2^2-h^2)/2h)]^2$ A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = $Pi(2Rh+r_1^2+r_2^2)$ $Volume=Pi.h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)/6$

Estas fórmulas podem ser obtidas como aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, mas nós nos limitaremos a apresentar um processo matemático para a obtenção da fórmula do cálculo do volume da "calota esférica" em função da altura da mesma.

Volume de uma calota no hemisfério Sul

Consideremos a esfera centrada no ponto (0,0,R) com raio R.



A equação desta esfera será dada por:

$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$

A altura da calota será indicada pela letra h e o plano que coincide com o nível do líquido (cota) será indicado por z=h. A interseção entre a esfera e este plano é dado pela circunferência

$x^2 + y^2 = R^2 - (h-R)^2$

Obteremos o volume da calota esférica com a altura h menor ou igual ao raio R da esfera, isto é, h pertence ao intervalo [0,R] e neste caso poderemos explicitar o valor de z em função de x e y para obter:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Para simplificar as operações algébricas, usaremos a letra r para indicar:

$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = h(2R-h)$

A região circular S de integração será descrita por $x^2+y^2 \leq R^2$ ou em coordenadas polares através de:

$0 \leq m \leq R$, $0 \leq t \leq 2Pi$

A integral dupla que representa o volume da calota em função da altura h é dada por:

$$Vc(h) = \int\int_s (h - z)dxdy$$

ou seja

$$Vc(h) = \int\int_s (h - R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})dxdy$$

Escrita em Coordenadas Polares, esta integral fica na forma:

$$Vc(h) = \int_{t=0}^{2x}\int_{m=0}^{R} (h - R + \sqrt{R^2 - m^2})mdmdt$$

Após realizar a integral na variável t, podemos separá-la em duas integrais:

$$Vc(h) = 2\pi\{\int_0^R (h-R)m\,dm + \int_0^R \sqrt{R^2-m^2}\,mdm\}$$

ou seja:

$$Vc(h) = \pi\{(h-R)R^2 - \int_0^R \sqrt{R^2-m^2}\,(-2m)dm\}$$

Com a mudança de variável $u=R^2-m^2$ e $du=(-2m)dm$ poderemos reescrever:

$$Vc(h) = \pi\{(h-R)R^2 + \int_{u=0}^{R^2} \sqrt{u}\,du\}$$

Após alguns cálculos obtemos:

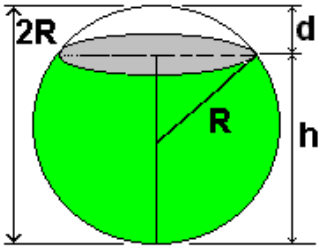
$V_C(h) = Pi\ (h-R)\ [R^2 - (h-R)^2] - (2/3)Pi[(R-h)^3 - R^3]$

e assim temos a fórmula para o cálculo do volume da calota esférica no hemisfério Sul com a altura h no intervalo [0,R], dada por:

$V_C(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Volume de uma calota no hemisfério Norte

Se o nível do líquido mostra que a altura h já ultrapassou o raio R da região esférica, então a altura h está no intervalo [R,2R]



Lançaremos mão de uma propriedade de simetria da esfera que nos diz que o volume da calota superior assim como da calota inferior somente depende do raio R da esfera e da altura h e não da posição relativa ocupada.

Aproveitaremos o resultado do cálculo utilizado para a calota do hemisfério Sul. Tomaremos a altura tal que: h=2R-d, onde d é a altura da região que não contém o líquido. Como o volume desta calota *vazia* é dado por:

$V_C(d) = Pi\ d^2(3R-d)/3$

e como h=2R-d, então para h no intervalo [R,2R], poderemos escrever o volume da calota vazia em função de h:

$V_C(h) = Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

Para obter o volume ocupado pelo líquido, em função da altura, basta tomar o volume total da região esférica e retirar o volume da calota *vazia*, para obter:

$V(h) = 4Pi\ R^3/3 - Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

que pode ser simplificada para:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Independentemente do fato que a altura h esteja no intervalo [0,R] ou [R,2R] ou de uma forma geral em [0,2R], o cálculo do volume ocupado pelo líquido é dado por:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

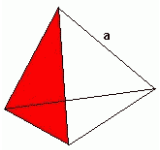
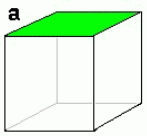
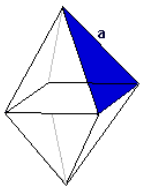
Poliedro

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. Cada face é uma região poligonal contendo *n* lados.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus. Outra definição: Dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Poliedros Regulares

Um poliedro é regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com *n* lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.

Tetraedro	Hexaedro (cubo)	Octaedro
		

Áreas e Volumes

Poliedro regular	Área	Volume
Tetraedro	$a^2\ R[3]$	$(1/12)\ a^3\ R[2]$
Hexaedro	$6\ a^2$	a^3
Octaedro	$2\ a^2\ R[3]$	$(1/3)\ a^3\ R[2]$
Dodecaedro	$3a^2\ R\{25+10\cdot R[5]\}$	$(1/4)\ a^3\ (15+7\cdot R[5])$
Icosaedro	$5a^2\ R[3]$	$(5/12)\ a^3\ (3+R[5])$

Nesta tabela, a notação R[z] significa a raiz quadrada de $z \geq 0$.

Prisma

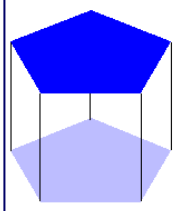
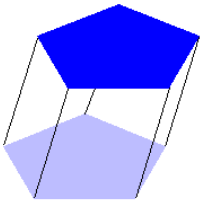
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto

As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.
As faces laterais são retangulares.

Prisma oblíquo

As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são oblíquas ao plano da base.
As faces laterais não são retangulares.

	**Bases**: regiões poligonais congruentes **Altura**: distância entre as bases **Arestas laterais paralelas**: mesmas medidas **Faces laterais**: paralelogramos	
Prisma reto	**Aspectos comuns**	**Prisma oblíquo**

Seções de um prisma

Seção transversal
É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

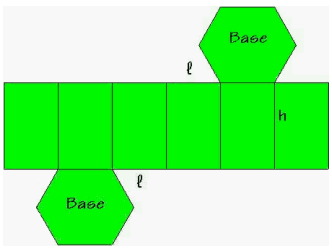
Seção reta (seção normal)
É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavaliere
Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

Prisma regular
É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

Exemplos:
Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero.
Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma



Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases. As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano.

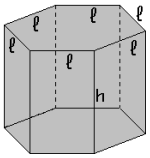
Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases.

A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.

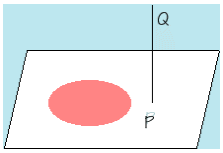
Volume de um prisma
O volume de um prisma é dado por:

Vprisma = Abase . h

Área lateral de um prisma reto com base poligonal regular
A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:



Cilindros

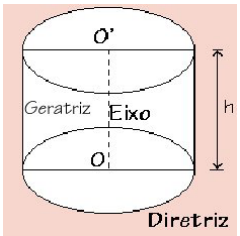


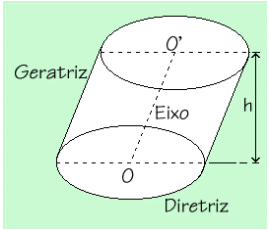
Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r. Tomemos também um segmento de reta PQ que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P.

Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ com uma extremidade no círculo.

Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3, mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro com a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido usaremos aspas, isto é, *"cilindro"* e quando for à superfície, simplesmente escreveremos *cilindro*.

A reta que contém o segmento PQ é denominada *geratriz* e a curva que fica no plano do "chão" é a *diretriz*.





Em função da inclinação do segmento PQ em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento PQ for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.

Objetos geométricos em um "cilindro"

Num cilindro, podemos identificar vários elementos:

- Base É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.

- Eixo É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".

- Altura A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".

- Superfície Lateral É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.

- Superfície Total É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.

- Área lateral É a medida da superfície lateral do cilindro.

- Área total É a medida da superfície total do cilindro.

- Seção meridiana de um cilindro É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Classificação dos cilindros circulares

Cilindro circular oblíquo Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.

Cilindro circular reto As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.

Cilindro equilátero É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

$V = A_{base} \times h$

Se a base é um círculo de raio r, então:

$V = \pi r^2 h$

Áreas lateral e total de um cilindro circular reto

Quando temos um cilindro circular reto, a área lateral é dada por:

$A_{lat} = 2 \pi r h$

onde **r** é o raio da base e **h** é a altura do cilindro.

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$

$A_{tot} = 2 \pi r(h+r)$

Exercícios

1. Dado o cilindro circular equilátero (h = 2r), calcular a área lateral e a área total.

2. Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

3. As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

4. Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio R e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

Respostas

1) Solução: No cilindro equilátero, a área lateral e a área total é dada por:

$A_{lat} = 2 \pi r. 2r = 4 \pi r^2$

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 4 \pi r^2 + 2 \pi r^2 = 6 \pi r^2$

$V = A_{base} h = \pi r^2. 2r = 2 \pi r^3$

2) Solução: Cálculo da Área lateral $A_{lat} = 2 \pi r h = 2 \pi 2.3 = 12 \pi cm^2$

Cálculo da Área total $A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$ $A_{tot} = 12 \pi + 2 \pi 2^2 = 12 \pi + 8 \pi = 20 \pi cm^2$

Cálculo do Volume $V = Abase \times h = \pi r^2 \times h$ $V = \pi 2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12 \pi cm^{33}$

3) Solução:

$h_{prisma} = 12$

$A_{base\ do\ prisma} = A_{base\ do\ cone} = A$

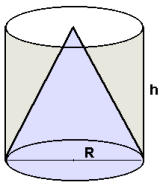
$V_{prisma} = 2 V_{cone}$

$A\ h_{prisma} = 2(A\ h)/3$

$12 = 2.h/3$

$h = 18$ cm

4) Solução:



$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

$V = A_{base} h - (1/3) A_{base} h$

$V = Pi\ R^2 h - (1/3) Pi\ R^2 h$

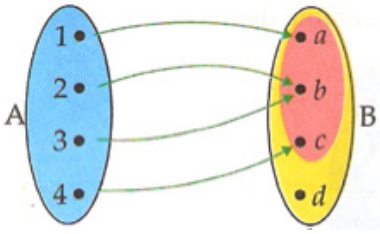
$V = (2/3) Pi\ R^2 h\ cm^3$

NOVA CONCURSOS

FUNÇÕES DO 1º E 2º GRAUS;

Função do 1˚ Grau

Dados dois conjuntos *A* e *B*, não-vazios, função é uma relação binária de *A* em *B* de tal maneira que todo elemento *x*, pertencente ao conjunto *A*, tem para si um único correspondente *y*, pertencente ao conjunto *B*, que é chamado de imagem de *x*.



Notemos que, para uma relação binária dos conjuntos *A* e *B*, nesta ordem, representarem uma função é preciso que:

- Todo elemento do conjunto *A* tenha algum correspondente (imagem) no conjunto *B*;
- Para cada elemento do conjunto *A* exista um único correspondente (imagem) no conjunto *B*.

Assim como em relação, usamos para as funções, que são relações especiais, a seguinte linguagem:

Domínio: Conjunto dos elementos que possuem imagem. Portanto, todo o conjunto *A*, ou seja, D = *A*.

Contradomínio: Conjunto dos elementos que se colocam à disposição para serem ou não imagem dos elementos de *A*. Portanto, todo conjunto *B*, ou seja, CD = *B*.

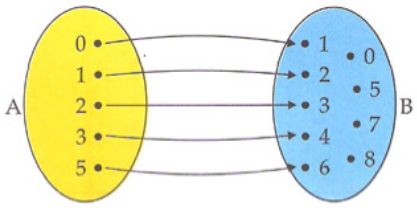
Conjunto Imagem: Subconjunto do conjunto *B* formado por todos os elementos que são imagens dos elementos do conjunto *A*, ou seja, no exemplo anterior: Im = {a, b, c}.

Exemplo

Consideremos os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 5} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

Vamos definir a função *f* de A em B com $f(x) = x + 1$.

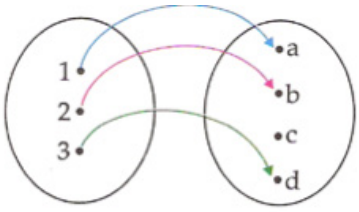
Tomamos um elemento do conjunto A, representado por *x*, substituímos este elemento na sentença $f(x)$, efetuamos as operações indicadas e o resultado será a imagem do elemento *x*, representada por *y*.



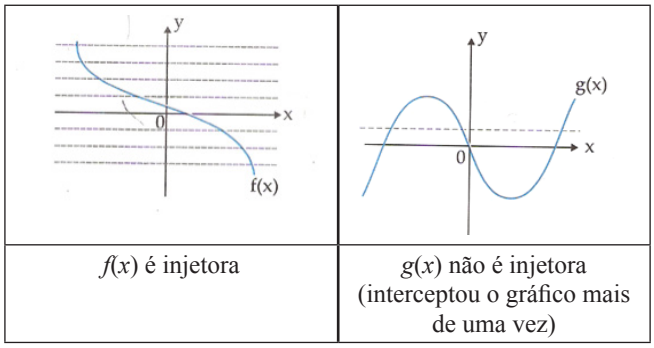
$f: A \rightarrow B$
$y = f(x) = x + 1$

Tipos de Função

Injetora: Quando para ela elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio.

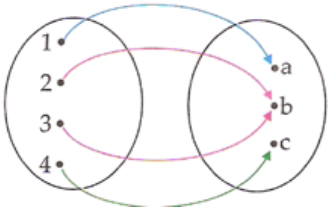


Reconhecemos, graficamente, uma função injetora quando, uma reta horizontal, qualquer que seja interceptar o gráfico da função, uma única vez.

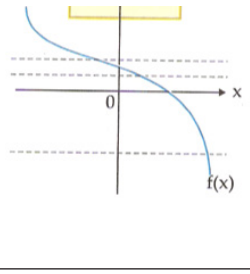
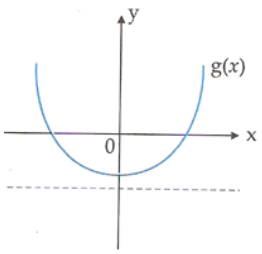


$f(x)$ é injetora	$g(x)$ não é injetora (interceptou o gráfico mais de uma vez)

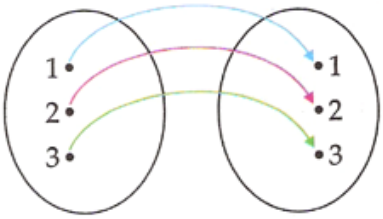
Sobrejetora: Quando todos os elementos do contradomínio forem imagens de pelo menos um elemento do domínio.



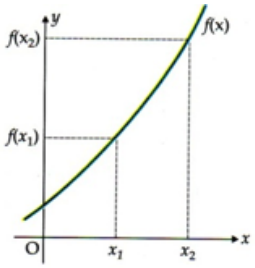
Reconhecemos, graficamente, uma função sobrejetora quando, qualquer que seja a reta horizontal que interceptar o eixo no contradomínio, interceptar, também, pelo menos uma vez o gráfico da função.

	
$f(x)$ é sobrejetora	$g(x)$ não é sobrejetora (não interceptou o gráfico)

Bijetora: Quando apresentar as características de função injetora e ao mesmo tempo, de sobrejetora, ou seja, elementos distintos têm sempre imagens distintas e todos os elementos do contradomínio são imagens de pelo menos um elemento do domínio.

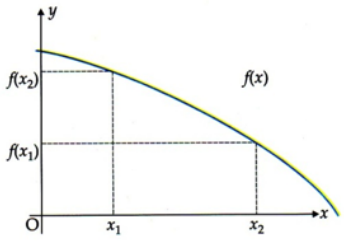


Função crescente: A função $f(x)$, num determinado intervalo, é crescente se, para quaisquer x_1 e x^2 pertencentes a este intervalo, com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)<f(x_2)$.



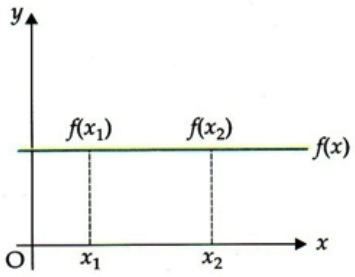
$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Função decrescente: Função $f(x)$, num determinado intervalo, é decrescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente a este intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1)>f(x_2)$.



$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Função constante: A função $f(x)$, num determinado intervalo, é constante se, para quaisquer $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.



Gráficos de uma Função

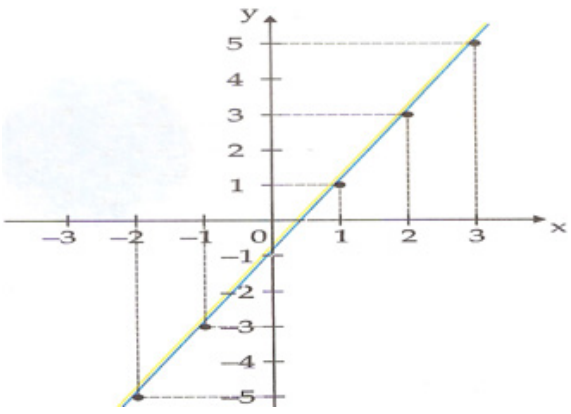
A apresentação de uma função por meio de seu gráfico é muito importante, não só na Matemática como nos diversos ramos dos estudos científicos.

Exemplo

Consideremos a função real $f(x) = 2x - 1$. Vamos construir uma tabela fornecendo valores para x e, por meio da sentença $f(x)$, obteremos as imagens y correspondentes.

x	$y = 2x - 1$
–2	–5
–1	–3
0	–1
1	1
2	3
3	5

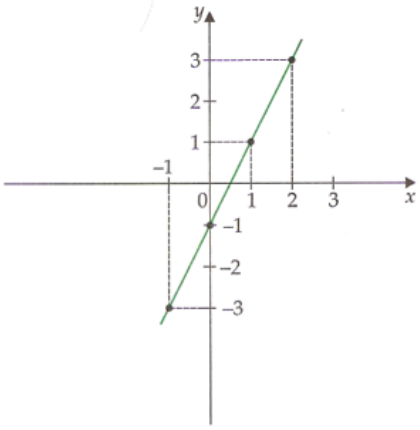
Transportados os pares ordenados para o plano cartesiano, vamos obter o gráfico correspondente à função $f(x)$.



NOVA CONCURSOS

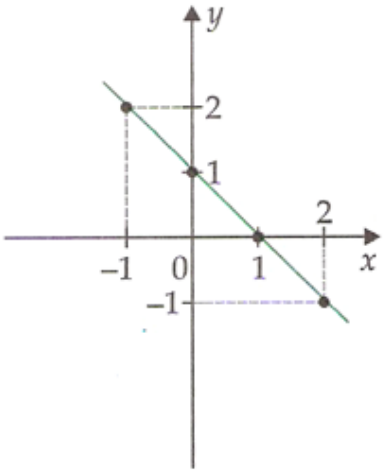
Exemplo para $a > 0$
Consideremos $f(x) = 2x - 1$.

x	$f(x)$
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

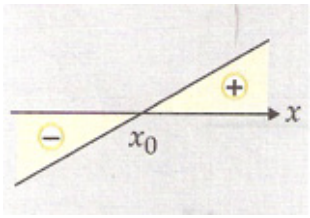
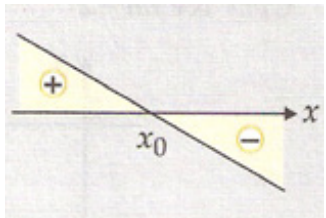


Exemplo para $a < 0$
Consideremos $f(x) = -x + 1$.

x	$f(x)$
-1	2
0	1
1	0
2	-1



Consideremos a função $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, em que x_0 é a raiz da função $f(x)$.

a>0	a<0
	
$x>x_0 \Rightarrow f(x)>0$	$x>x_0 \Rightarrow f(x)<0$
$x=x_0 \Rightarrow f(x)=0$	$x=x_0 \Rightarrow f(x)=0$
$x<x_0 \Rightarrow f(x)<0$	$x<x_0 \Rightarrow f(x)>0$

Conclusão: O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta crescente para a > 0 e uma reta decrescente para a < 0.

Zeros da Função do 1º grau:
Chama-se zero ou raiz da função do 1º grau $y = ax + b$ o valor de x que anula a função, isto é, o valor de x para que y seja igual à zero.
Assim, para achar o zero da função $y = ax + b$, basta resolver a equação $ax + b = 0$.

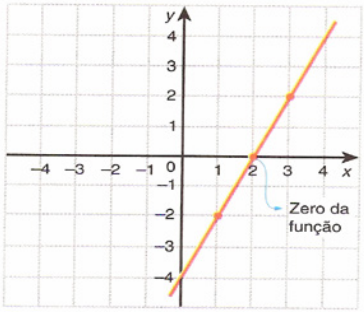
Exemplo
Determinar o zero da função:
$y = 2x - 4$.
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$

$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$

O zero da função $y = 2x - 4$ é 2.
No plano cartesiano, o zero da função do 1º grau é representado pela abscissa do ponto onde a reta corta o eixo x.

x	y	(x,y)
1	-2	(1, -2)
3	2	(3,2)



Observe que a reta $y = 2x - 4$ intercepta o eixo x no ponto (2,0), ou seja, no ponto de abscissa 2, que é o zero da função.
Conhecido o zero de uma função do 1º grau e lembrando a inclinação que a reta pode ter, podemos esboçar o gráfico da função.

Estudo do sinal da função do 1º grau:
Estudar o sinal da função do 1º grau $y = ax + b$ é determinar os valores reais de x para que:
- A função se anule (y = 0);
- A função seja positiva (y > 0);
- A função seja negativa (y < 0).

Exemplo
Estudar o sinal da função $y = 2x - 4$ (a = 2 > 0).
a) Qual o valor de x que anula a função?
$y = 0$
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$

$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$
A função se anula para x = 2.

b) Quais valores de x tornam positiva a função?

$y > 0$

$2x - 4 > 0$

$2x > 4$

$x > \frac{4}{2}$

$x > 2$

A função é positiva para todo x real maior que 2.

c) Quais valores de x tornam negativa a função?

$y < 0$

$2x - 4 < 0$

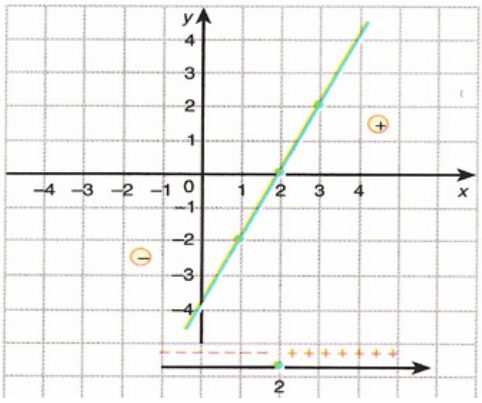
$2x < 4$

$x < \frac{4}{2}$

$x < 2$

A função é negativa para todo x real menor que 2.

Podemos também estudar o sinal da função por meio de seu gráfico:



- Para x = 2 temos y = 0;
- Para x > 2 temos y > 0;
- Para x < 2 temos y < 0.

Relação Binária

Par Ordenado

Quando representamos o conjunto (*a, b*) ou (*b, a*) estamos, na verdade, representando o mesmo conjunto. Porém, em alguns casos, é conveniente distinguir a ordem dos elementos.

Para isso, usamos a idéia de par ordenado. A princípio, trataremos o par ordenado como um conceito primitivo e vamos utilizar um exemplo para melhor entendê-lo. Consideremos um campeonato de futebol e que desejamos apresentar, de cada equipe, o total de pontos ganhos e o saldo de gols. Assim, para uma equipe com 12 pontos ganhos e saldo de gols igual a 18, podemos fazer a indicação (12, 18), já tendo combinado, previamente, que o primeiro número se refere ao número de pontos ganhos, e o segundo número, ao saldo de gols.

Portanto, quando tivermos para outra equipe a informação de que a sua situação é (2, -8) entenderemos, que esta equipe apresenta 2 pontos ganhos e saldo de gols -8. Note que é importante a ordem em que se apresenta este par de números, pois a situação (3, 5) é totalmente diferente da situação (5,3). Fica, assim, estabelecida a idéia de par ordenado: um par de valores cuja ordem de apresentação é importante.

Observações: (*a, b*) = (*c, d*) se, e somente se, *a* = *c* e *b* = *d*

(*a, b*) = (*b, a*) se, o somente se, *a* = *b*

Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos *A* e *B*, chamamos de produto cartesiano *A x B* ao conjunto de todos os possíveis pares ordenados, de tal maneira que o 1º elemento pertença ao 1º conjunto (*A*) e o 2º elemento pertença ao 2º conjunto (*B*).

$A \times B = \{(x,y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$

Quando o produto cartesiano for efetuado entre o conjunto *A* e o conjunto *A*, podemos representar *A* x *A* = A^2. Vejamos, por meio de o exemplo a seguir, as formas de apresentação do produto cartesiano.

Exemplo

Sejam *A* = {1, 4, 9} e *B* = {2, 3}. Podemos efetuar o produto cartesiano *A* x *B*, também chamado *A* cartesiano *B*, e apresentá-lo de várias formas.

a) Listagem dos elementos

Apresentamos o produto cartesiano por meio da listagem, quando escrevemos todos os pares ordenados que constituam o conjunto. Assim, no exemplo dado, teremos:

A e *B* = {(1, 2),(1, 3),(4, 2),(4, 3),(9, 2),(9, 3)}

Vamos aproveitar os mesmo conjuntos *A* e *B* e efetuar o produto *B* e *A* (*B* cartesiano *A*): *B* x *A* = {(2, 1),(2, 4),(2, 9),(3, 1),(3, 4),(3, 9)}.

Observando *A* x *B* e *B* x *A*, podemos notar que o produto cartesiano não tem o privilégio da propriedade comutativa, ou seja, *A* x *B* é diferente de *B* x *A*. Só teremos a igualdade *A* x *B* = *B* x *A quando A* e *B* forem conjuntos iguais.

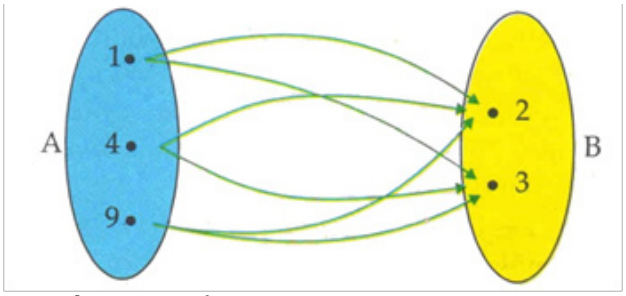
Observação: Considerando que para cada elemento do conjunto *A* o número de pares ordenados obtidos é igual ao número de elementos do conjunto *B,* teremos: *n(A* x *B) = n(A)* x *n(B).*

b) Diagrama de flechas

Apresentamos o produto cartesiano por meio do diagrama de flechas, quando representamos cada um dos conjuntos no diagrama de Euler-Venn, e os pares ordenados por "flechas" que partem do 1º elemento do par ordenado (no 1º conjunto) e chegam ao 2º elemento do par ordenado (no 2º conjunto).

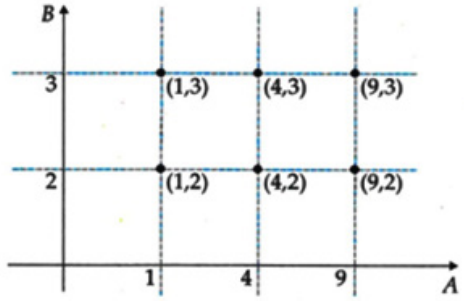
NOVA CONCURSOS

Considerando os conjuntos *A* e *B* do nosso exemplo, o produto cartesiano *A* x *B* fica assim representado no diagrama de flechas:



c) Plano cartesiano

Apresentamos o produto cartesiano, no plano cartesiano, quando representamos o 1º conjunto num eixo horizontal, e o 2º conjunto num eixo vertical de mesma origem e, por meio de pontos, marcamos os elementos desses conjuntos. Em cada um dos pontos que representam os elementos passamos retas (horizontais ou verticais). Nos cruzamentos dessas retas, teremos pontos que estarão representando, no plano cartesiano, cada um dos pares ordenados do conjunto *A* cartesiano *B (B* x *A)*.



Domínio de uma Função Real

Para uma função de *R* em *R*, ou seja, com elementos no conjunto dos números reais e imagens também no conjunto dos números reais, será necessária, apenas, a apresentação da sentença que faz a "ligação" entre o elemento e a sua imagem.

Porém, para algumas sentenças, alguns valores reais não apresentam imagem real.

Por exemplo, na função $f(x) = \sqrt{(x-1)}$, o número real 0 não apresenta imagem real e, portanto, *f(x)* características de função, precisamos limitar o conjunto de partida, eliminando do conjunto dos números reais os elementos que, para essa sentença, não apresentam imagem. Nesse caso, bastaria estabelecermos como domínio da função *f(x)* o conjunto $D = \{x \in R / x \geq 1\}$.

Para determinarmos o domínio de uma função, portanto, basta garantirmos que as operações indicadas na sentença são possíveis de serem executadas. Dessa forma, apenas algumas situações nos causam preocupação e elas serão estudadas a seguir.

1ª $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ $\quad f(x) \geq (n \in N^*)$

2ª $y = \frac{1}{f(x($ $\Rightarrow f(x) \neq 0$

Vejamos alguns exemplos de determinação de domínio de uma função real.

Exemplos

Determine o domínio das seguintes funções reais.

- $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$
$D = R$

- $f(x) = \sqrt{x+7}$
$x - 7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7$
$D = \{x \in R / x \geq 7\}$

- $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
$D = R$

Observação: Devemos notar que, para raiz de índice impar, o radicando pode assumir qualquer valor real, inclusive o valor negativo.

- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+8}}$
$x + 8 > 0 \rightarrow x > -8$
$D = \{x \in R / x > -8\}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-8}$
$x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$
$x - 8 \geq 0 \rightarrow x \neq 8$
$D = \{x \in R / x \geq 5 \text{ e } x \neq 8\}$

Exercícios

1. Determine o domínio das funções reais apresentadas abaixo.

a) $f(x) = 3x^2 + 7x - 8$

b) $f(x) = \frac{3}{3x-6}$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

e) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{7x+5}}$

2. Um número mais a sua metade é igual a 150. Qual é esse número?

3. Considere a função *f*, de domínio *N*, definida por $f(1) = 4$ **e** $f(x+1) = 3f(x)-2$**. O valor de** $f(0)$ **é:**

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

4. Sejam *f* e *g* funções definidas em *R* por *f(x)=2x-1* e *g(x)=x-3*. O valor de *g(f(3))* é:
a) -1
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

5. Numa loja, o salário fixo mensal de um vendedor é 500 reais. Além disso, ele recebe de comissão 50 reais por produto vendido.
a) Escreva uma equação que expresse o ganho mensal y desse vendedor, em função do número x de produto vendido.
b) Quanto ele ganhará no final do mês se vendeu 4 produtos?
c) Quantos produtos ele vendeu se no final do mês recebeu 1000 reais?

6. Considere a função dada pela equação y = x + 1, determine a raiz desta função.

7. Determine a raiz da função y = - x + 1 e esboce o gráfico.

8. Determine o intervalo das seguintes funções para que f(x) > 0 e f(x) < 0.
a) *y = f(x) = x + 1*
b) *y = f(x) = -x + 1*

9. Determine o conjunto imagem da função:
D(f) = {1, 2, 3}
y = f(x) = x + 1

10. Determine o conjunto imagem da função:
D(f) = {1, 3, 5}
y = f(x) = x^2

Respostas

1) Solução:
a) D = R

b) 3x – 6 ≠ 0
x ≠ 2
D = R –{2}

c) x + 2 ≥ 0
x ≥ -2
D = {x ∈ R/ x ≥ -2}

d) D = R
Devemos observar que o radicando deve ser maior ou igual a zero para raízes de índice par.

e) Temos uma raiz de índice par no denominado, assim:
7x + 5 > 0
x > - 7/5
D = {x ∈ R/ x > -5/7}.

2) Resposta "100".
Solução:
n + n/2 = 150
2n/2 + n/2 = 300/2
2n + n = 300
3n = 300
n = 300/3
n = 100.

3. Resposta "C".
Solução : Com a função dada *f(x + 1) = 3f(x) – 2* substituímos o valor de x por x = 0:
f(0 + 1) = 3f (0) – 2
f(1) = 3f(0) - 2

É dito que f(1) = 4, portanto:
4 = 3f(0) - 2
Isolando f(0):
4+2 = 3f(0)
6 = 3f(0)
f(0) = 6/3 = 2.

4) Resposta "E".
Solução: Começamos encontrando *f(3)*:
f(3) = 2.(3) + 1, ou seja, *f(3) = 7*
Se está pedindo *g[f(3)]* então está pedindo g(7):
g(7) = 7 - 3 = 4
Logo, a resposta certa, letra "E".

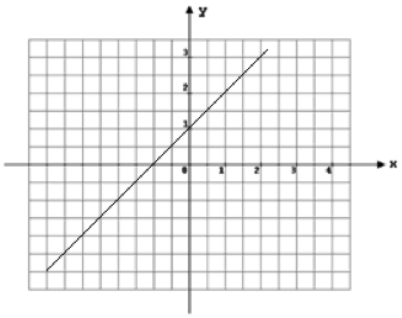
5) Solução
a) y = salário fixo + comissão
y = 500 + 50x

b) y = 500 + 50x , onde x = 4
y = 500 + 50 . 4 = 500 + 200 = 700

c) y = 500 + 50x , onde y = 1000
1000 = 500 + 50x
50x = 1000 – 500
50x = 500
x = 10.

6) Solução: Basta determinar o valor de x para termos y = 0
x + 1 = 0
x = -1

Dizemos que -1 é a raiz ou zero da função.

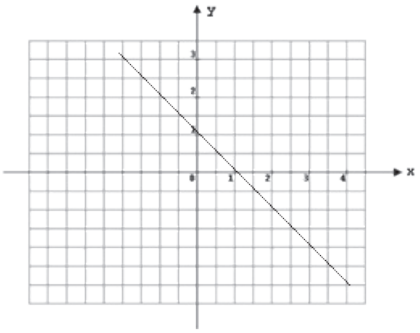


Note que o gráfico da função y = x + 1, interceptará (cortará) o eixo x em -1, que é a raiz da função.

NOVA CONCURSOS

7) Solução: Fazendo y = 0, temos:
0 = -x + 1
x = 1

Gráfico:



Note que o gráfico da função y = -x + 1, interceptará (cortará) o eixo x em 1, que é a raiz da função.

8) Solução:
a) y = f(x) = x + 1
x + 1 > 0
x > -1
Logo, f(x) será maior que 0 quando x > -1
x + 1 < 0
x < -1
Logo, f(x) será menor que 0 quando x < -1

b) y = f(x) = -x + 1
* -x + 1 > 0
-x > -1
x < 1
Logo, f(x) será maior que 0 quando x < 1

-x + 1 < 0
-x < -1
x > 1
Logo, f(x) será menor que 0 quando x > 1
(*ao multiplicar por -1, inverte-se o sinal da desigualdade).

9) Solução:
f(1) = 1 + 1 = 2
f(2) = 2 + 1 = 3
f(3) = 3 + 1 = 4
Logo: Im(f) = {2, 3, 4}.

10) Solução:
f(1) = 1^2 = 1
f(3) = 3^2 = 9
f(5) = 5^2 = 25
Logo: Im(f) = {1, 9, 25}

Função do 2º Grau

Chama-se função do 2º grau ou função quadrática toda função *f* de R em R definida por um polinômio do 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b* e *c* reais e $a \neq 0$.

Exemplo

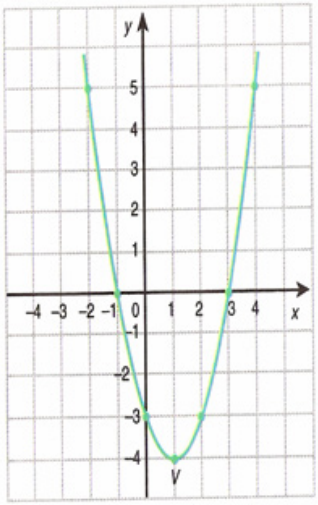
- $y = x^2 - 5x + 4$, sendo a = 1, b = –5 e c = 4
- $y = x^2 - 9$, sendo a = 1, b = 0 e c = –9
- $y = x^2$, sendo a = 1, b = 0 e c = 0

Representação gráfica da Função do 2º grau

Exemplo

Se a função *f* de R em R definida pela equação $y = x^2 - 2x - 3$. Atribuindo à variável *x* qualquer valor real, obteremos em correspondência os valores de *y*:

Para x = –2 temos $y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
Para x = –1 temos $y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$
Para x = 0 temos $y = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$
Para x = 1 temos $y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$
Para x = 2 temos $y = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$
Para x = 3 temos $y = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$
Para x = 4 temos $y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$



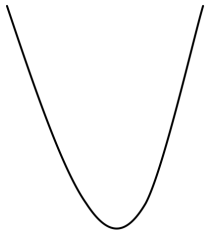
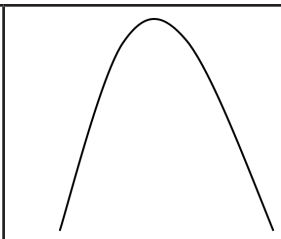
x	y	(x,y)
–2	5	(–2,5)
–1	0	(–1,0)
0	–3	(0, –3)
1	–4	(1, –4)
2	–3	(2, –3)
3	0	(3,0)
4	5	(4,5)

O gráfico da função de 2º grau é uma curva aberta chamada parábola.

O ponto V indicado na figura chama-se vértice da parábola.

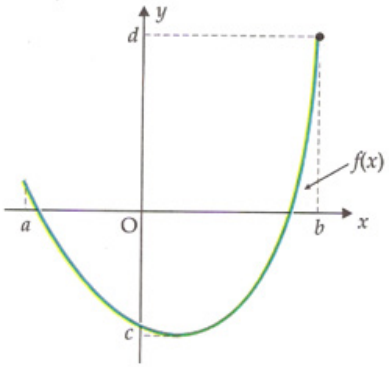
Concavidade da Parábola

No caso das funções do 2º grau, a parábola pode ter sua concavidade voltada para cima (a > 0) ou voltada para baixo (a < 0).

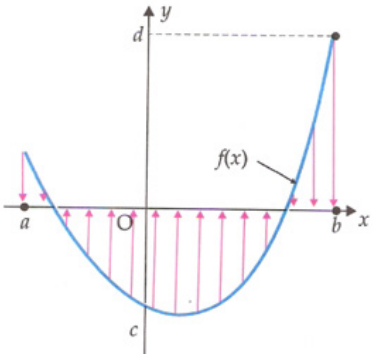
	
a>0	a<0

Podemos por meio do gráfico de uma função, reconhecer o seu domínio e o conjunto imagem.

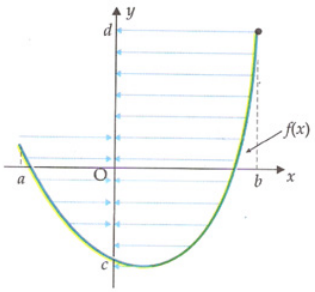
Consideremos a função *f*(*x*) definida por A = [a, b] em R.



Domínio: Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo *x*. Assim, D = [a, b] = A



Conjunto Imagem: Projeção ortogonal do gráfico da função no eixo *y*. Assim, Im = [c, d].



Zeros da Função do 2º grau

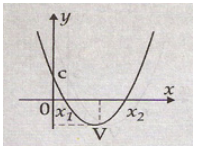
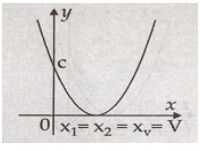
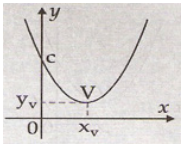
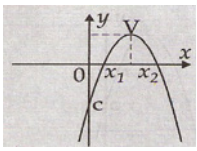
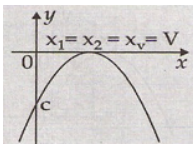
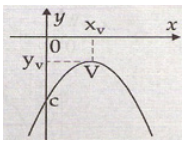
As raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do 2º grau.

$ax^2 + bx + c = 0$

A resolução de uma equação do 2º grau é feita com o auxílio da chamada "fórmula de Bhaskara".

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \text{Onde } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

As raízes (quando são reais), o vértice e a intersecção com o eixo y são fundamentais para traçarmos um esboço do gráfico de uma função do 2º grau.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$			
	Δ>0	Δ=0	Δ<0
a>0			
a<0			

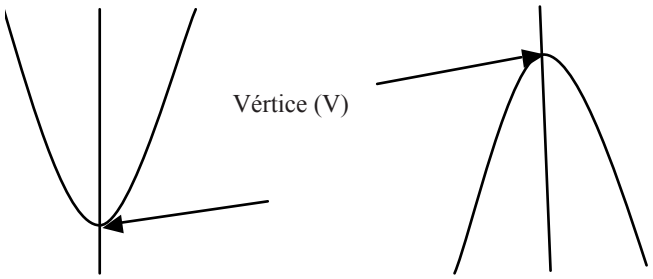
Coordenadas do vértice da parábola

A parábola que representa graficamente a função do 2º grau apresenta como eixo de simetria uma reta vertical que intercepta o gráfico num ponto chamado de vértice.

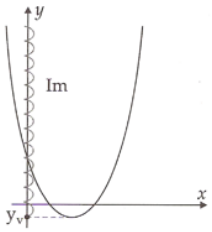
As coordenadas do vértice são:

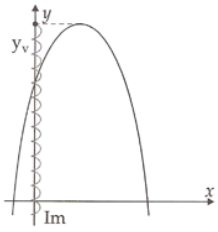
$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad x_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

NOVA CONCURSOS



O Conjunto Imagem de uma função do 2º grau está associado ao seu ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice (y_v).





Exemplo

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola da seguinte função quadrática: $y = x^2 - 8x + 15$.

Cálculo da abscissa do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Cálculo da ordenada do vértice:
Substituindo x por 4 na função dada:

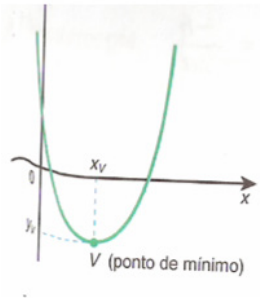
$y_V = (4)2 - 8(4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

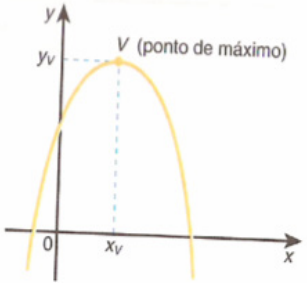
Logo, o ponto V, vértice dessa parábola, é dado por V (4, –1).

Valor máximo e valor mínimo da função do 2º grau

- Se a > 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado ponto de mínimo e a ordenada do vértice é chamada valor mínimo da função;

- Se a < 0, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é ponto de máximo e a ordenada do vértice é chamada valor máximo da função.





Construção do gráfico da função do 2º grau
- Determinamos as coordenadas do vértice;
- Atribuímos a *x* valores menores e maiores que x_v e calculamos os correspondentes valores de *y*;
- Construímos assim uma tabela de valores;
- Marcamos os pontos obtidos no sistema cartesiano;
- Traçamos a curva.

Exemplo
$y = x^2 - 4x + 3$

Coordenadas do vértice:

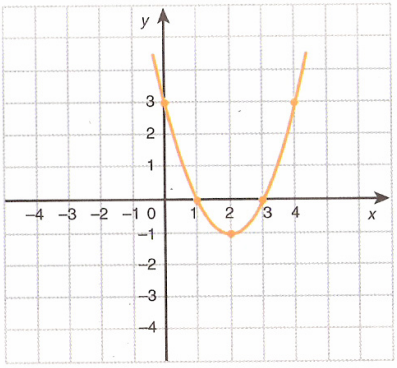
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad V\ (2, -1)$$

$y_V = (2)2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Tabela:
Para x = 0 temos $y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$
Para x = 1 temos $y = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$
Para x = 3 temos $y = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$
Para x = 4 temos $y = (4)^2 - 4(4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

x	y	(x,y)
0	3	(0,3)
1	0	(1,0)
2	–1	(2,–1)Vértice
3	0	(3,0)
4	3	(4,3)

Gráfico:



Estudos do sinal da função do 2º grau

Estudar o sinal de uma função quadrática é determinar os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

Exemplo

$y = x^2 - 6x + 8$

Zeros da função:

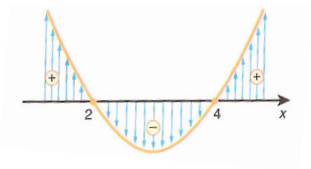
$y = x^2 - 6x + 8$

$\Delta = (-6)2 - 4(1)(8)$

$\Delta = 36 - 32 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Esboço do Gráfico



Estudo do Sinal:

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Para $x < 2$ ou $x > 4$ temos $y > 0$

Para $x = 2$ ou $x = 4$ temos $y = 0$

Para $2 < x < 4$ temos $y < 0$

Exercícios

1. O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro tem?

2. Uma tela retangular com área de 9600cm² tem de largura uma vez e meia a sua altura. Quais são as dimensões desta tela?

3. O quadrado da minha idade menos a idade que eu tinha 20 anos atrás e igual a 2000. Quantos anos eu tenho agora?

4. Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi R$ 8,00 de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

5. O produto da idade de Pedro pela idade de Paulo é igual a 374. Pedro é 5 anos mais velho que Paulo. Quantos anos tem cada um deles?

6. Há dois números cujo triplo do quadrado é a igual 15 vezes estes números. Quais números são estes?

7. Quais são as raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$?

8. O dobro do quadrado da nota final de Pedrinho é zero. Qual é a sua nota final?

9. Solucione a equação biquadrada: $-x^4 + 113x^2 - 3136 = 0$.

10. Encontre as raízes da equação biquadrada: $x^4 - 20x^2 - 576 = 0$.

Respostas

1) Resposta "3".

Solução: Sendo x o número de filhos de Pedro, temos que $3x^2$ equivale ao triplo do quadrado do número de filhos e que 63 - 12x equivale a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Montando a sentença matemática temos:

$3x^2 = 63 - 12x$

Que pode ser expressa como:

$3x^2 + 12x - 63 = 0$

Temos agora uma sentença matemática reduzida à forma ax^2 **+ bx + c = 0**, que é denominada equação do 2° grau. Vamos então encontrar as raízes da equação, que será a solução do nosso problema:

Primeiramente calculemos o valor de Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 12^2 - 4 \,.\, 3 \,.(-63) = 144 + 756 = 900$

Como Δ é maior que zero, de antemão sabemos que a equação possui duas raízes reais distintas. Vamos calculá-las:

$$3x^2 + 12 - 63 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \,.\, 3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-12 + \sqrt{900}}{6} \Rightarrow x1 = \frac{-12 \pm 30}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{18}{6} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{-12 - \sqrt{900}}{6} \Rightarrow x1 = \frac{-12 - 30}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{-42}{6} \Rightarrow x_2 = -7 \end{cases}$$

A raízes encontradas são 3 e -7, mas como o número de filhos de uma pessoa não pode ser negativo, descartamos então a raiz -7.

Portanto, Pedro tem 3 filhos.

2) Resposta "80cm; 120 cm".

Solução: Se chamarmos de x altura da tela, temos que 1,5x será a sua largura. Sabemos que a área de uma figura geométrica retangular

é calculada multiplicando-se a medida da sua largura, pela medida da sua altura. Escrevendo o enunciado na forma de uma sentença matemática temos:

$x \,.\, 1{,}5x = 9600$

Que pode ser expressa como:

$1{,}5x^2 - 9600 = 0$

Note que temos uma equação do 2° grau incompleta, que como já vimos terá duas raízes reais opostas, situação que ocorre sempre que o coeficiente b é igual a zero. Vamos aos cálculos:

$$1{,}5x^2 - 9600 = 0 \Rightarrow 1{,}5x^2 = 9600 \Rightarrow x^2 = \frac{9600}{1{,}5}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{6400} \Rightarrow x = \pm 80$$

As raízes reais encontradas são -80 e 80, no entanto como uma tela não pode ter dimensões negativas, devemos desconsiderar a raiz -80.

NOVA CONCURSOS

Como 1,5x representa a largura da tela, temos então que ela será de 1,5 . 80 = 120.

Portanto, esta tela tem as dimensões de 80cm de altura, por 120cm de largura.

3) Resposta "45".

Solução: Denominando x a minha idade atual, a partir do enunciado podemos montar a seguinte equação:

$x^2 - (x - 20) = 2000$

Ou ainda:

$x^2 - (x - 20) = 2000 \Rightarrow x^2 - x + 20 = 2000 \Rightarrow x^2 - x - 1980 = 0$

A solução desta equação do 2° grau completa nós dará a resposta deste problema. Vejamos:

$$x^2 - x - 1980 = \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-1980)}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7921}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 89}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + 89}{2} \Rightarrow x_1 = 45 \\ x_2 = \frac{1 - 89}{2} \Rightarrow x_2 = -44 \end{cases}$$

As raízes reais da equação são -44 e 45. Como eu não posso ter -44 anos, é óbvio que só posso ter 45 anos.

Logo, agora eu tenho 45 anos.

4) Resposta "12".

Solução: O enunciado nos diz que os dois tipos de lanche têm o mesmo valor unitário. Vamos denominá-lo então de x.

Ainda segundo o enunciado, de um dos produtos eu comprei 4 unidades e do outro eu comprei x unidades.

Sabendo-se que recebi R$ 8,00 de troco ao pagar R$ 200,00 pela mercadoria, temos as informações necessárias para montarmos a seguinte equação:

$4 \,.\, x + x \,.\, x + 8 = 200$

Ou então:

$4x + x \,.\, x + 8 = 200 \Rightarrow 4x + x^2 + 8 = 200 \Rightarrow x^2 + 4x - 192 = 0$

Como x representa o valor unitário de cada lanche, vamos solucionar a equação para descobrimos que valor é este:

$$x^2 + 4x - 192 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-192)}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm 28}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + 28}{2} \Rightarrow x_1 = 12 \\ x_2 = \frac{-4 - 89}{2} \Rightarrow x_2 = -16 \end{cases}$$

As raízes reais da equação são -16 e 12. Como o preço não pode ser negativo, a raiz igual -16 deve ser descartada.

Assim, o preço unitário de cada produto é de R$ 12,00.

5) Resposta "22; 17".

Solução: Se chamarmos de x a idade de Pedro, teremos que x - 5 será a idade de Paulo. Como o produto das idades é igual a 374, temos que $x \,.\, (x - 5) = 374$.

Esta sentença matemática também pode ser expressa como:

$x.(x - 5) = 374 \Rightarrow x^2 - 5x = 374 \Rightarrow x^2 - 5x - 374 = 0$

Primeiramente para obtermos a idade de Pedro, vamos solucionar a equação:

$$x^2 - 5x - 374 = 0 \Rightarrow \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-374)}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1521}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm 39}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 + 39}{2} \Rightarrow x_1 = 22 \\ x_2 = \frac{5 - 39}{2} \Rightarrow x_2 = -17 \end{cases}$$

As raízes reais encontradas são -17 e 22, por ser negativa, a raiz -17 deve ser descartada.

Logo a idade de Pedro é de 22 anos.

Como Pedro é 5 anos mais velho que Paulo, Paulo tem então 17 anos.

Logo, Pedro tem 22 anos e Paulo tem 17 anos.

6) Resposta "0; 5".

Solução: Em notação matemática, definindo a incógnita como x, podemos escrever esta sentença da seguinte forma:

$3x^2 = 15x$

Ou ainda como:

$3x^2 - 15x = 0$

A fórmula geral de resolução ou fórmula de Bhaskara pode ser utilizada na resolução desta equação, mas por se tratar de uma equação incompleta, podemos solucioná-la de outra forma.

Como apenas o coeficiente c é igual a zero, sabemos que esta equação possui duas raízes reais. Uma é igual azero e a outra é dada pelo oposto do coeficiente b dividido pelo coeficiente a. Resumindo podemos dizer que:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Temos então:

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{-15}{3} \Rightarrow x = 5$$

7) Resposta "6; 8".

Solução: Podemos resolver esta equação simplesmente respondendo esta pergunta:

Quais são os dois números que somados totalizam 14 e que multiplicados resultam em 48?

Sem qualquer esforço chegamos a 6 e 8, pois 6 + 8 = 14 e 6 . 8 = 48.

Segundo as relações de Albert Girard, que você encontra em detalhes em outra página deste site, estas são as raízes da referida equação.

Para simples conferência, vamos solucioná-la também através da fórmula de Bhaskara:

$$x^2 - 14x + 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 48}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14 + 2}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \\ x_2 = \frac{14 - 2}{2} \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

8) Resposta "0".

Solução: Sendo x a nota final, matematicamente temos:

$2x^2 = 0$

Podemos identificar esta sentença matemática como sendo uma equação do segundo grau incompleta, cujos coeficientes b e c são iguais a zero.

Conforme já estudamos este tipo de equação sempre terá como raiz real o número zero. Apenas para verificação vejamos:

$$2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x \pm \sqrt{0} \Rightarrow x = 0$$

9) Resposta "-8; -7; 7 e 8".

Solução: Substituindo na equação x^4 por y^2 e também x^2 e y temos:

$-y^2 + 113y - 3136 = 0$

Resolvendo teremos:

$$-y^2 + 113y - 3136 = 0 \Rightarrow y = \frac{-113 \pm \sqrt{113^2 - 4.(-1).(-3136)}}{2 + (-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-113 + \sqrt{225}}{-2} \Rightarrow y_1 = \frac{-113 + 15}{-2} \\ y_2 = \frac{-113 - \sqrt{225}}{-2} \Rightarrow y_2 = \frac{-113 - 15}{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-98}{-2} \Rightarrow y_1 = 49 \\ y_2 = \frac{-128}{-2} \Rightarrow y_2 = 64 \end{cases}$$

Substituindo os valores de y na expressão $x^2 = y$ temos:

Para y_1 temos:

$$x^2 = 49 \Rightarrow x \pm \sqrt{49} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{49} \Rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = -\sqrt{49} \Rightarrow x_2 = -7 \end{cases}$$

Para y_2 temos:

$$x^2 = 64 \Rightarrow x \pm \sqrt{64} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \sqrt{64} \Rightarrow x_3 = 8 \\ x_4 = -\sqrt{64} \Rightarrow x_4 = -8 \end{cases}$$

Assim sendo, as raízes da equação biquadrada $-x^4 + 113x^2 - 3136 = 0$ são: -8, -7, 7 e 8.

10) Resposta "-6; 6".

Solução: Iremos substituir x^4 por y^2 e x^2 e y, obtendo uma equação do segundo grau:

$y^2 - 20y - 576 = 0$

Ao resolvermos a mesma temos:

$$y^2 - 20y - 576 = 0 \Rightarrow \frac{-20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4.1.(-576)}}{2.3}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{20 + \sqrt{2704}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{20 + 52}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{72}{2} \Rightarrow y_1 = 36 \\ y_2 = \frac{20 - \sqrt{2704}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{20 - 52}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{-32}{2} \Rightarrow y_2 = -16 \end{cases}$$

Substituindo os valores de y na expressão $x^2 = y$ obtemos as raízes da equação biquadrada:

Para y_1 temos:

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{36} \Rightarrow x_1 = 6 \\ x_2 = -\sqrt{36} \Rightarrow x_2 = -6 \end{cases}$$

Para y_2, como não existe raiz quadrada real de um número negativo, o valor de -16 não será considerado.

Desta forma, as raízes da equação biquadrada $x^4 - 20x^2 - 576 = 0$ são somente: -6 e 6.

NOVA CONCURSOS

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Progressão Aritmética (PA)

Podemos, no nosso dia-a-dia, estabelecer diversas sequências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola.

Podemos, também, adotar para essas sequências uma ordem numérica, ou seja, adotando a_1 para o 1º termo, a_2 para o 2º termo até a_n para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo a_n é também chamado termo geral das sequências, em que *n* é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das sequências numéricas.

As sequências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou, infinitas, quando não apresentam um último termo. As sequências infinitas são indicadas por reticências no final.

Exemplos:

- Sequência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.
- Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$; $a_6 = 11$ etc.
- Sequência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma sequência finita com $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 5$; $a_7 = 6$; $a_8 = 7$; $a_9 = 8$; $a_{10} = 9$.

1. Igualdade

As sequências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos em ordem diferente serão consideradas sucessões diferentes.

Duas sequências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

Exemplo

A sequência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à sequência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, x = 5; y = 8; z = 15; e t = 17.

Notemos que as sequências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

2. Formula Termo Geral

Podemos apresentar uma sequência através de uma determina o valor de cada termo a_n em função do valor de *n*, ou seja, dependendo da posição do termo. Esta formula que determina o valor do termo a_n e chamada formula do termo geral da sucessão.

Exemplos

- Determinar os cincos primeiros termos da sequência cujo termo geral e igual a:

$a_n = n - 2n$,com n € N* a

Teremos:

$A_1 = 1^2 - 2 . 1$ a $a_1 = 1$
$A_2 = 2^2 - 2 . 2$ a $a_2 = 0$
$A_3 = 3^2 - 2 . 3$ a $a_3 = 3$
$A_4 = 4^2 - 4 . 2$ a $a_4 = 8$
$A_5 = 5^5 - 5 . 2$ a $a_5 = 15$

- Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 3 . n + 2$, com n € N*.
$a_1 = 3 . 1 + 2$ a $a_1 = 5$
$a_2 = 3 . 2 + 2$ a $a_2 = 8$
$a_3 = 3 . 3 + 2$ a $a_3 = 11$
$a_4 = 3 . 4 + 2$ a $a_4 = 14$
$a_5 = 3 . 5 + 2$ a $a_5 = 17$

- Determinar os termos a_{12} e a_{23} da sequência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 45 - 4 + n$, com n € N*.

Teremos:

$a_{12} = 45 - 4 . 12$ a $a_{12} = -3$
$a_{23} = 45 - 4 . 23$ a $a_{23} = -47$

3. Lei de Recorrências

Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um "caminho" (uma formula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

Exemplos

- Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:

$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 . a_n - 4$, em que n € N*.

Teremos:

$a_1 = 3$
$a_2 = 2 . a_1 - 4$ a $a_2 = 2 . 3 - 4$ a $a_2 = 2$
$a_3 = 2 . a_2 - 4$ a $a_3 = 2 . 2 - 4$ a $a_3 = 0$
$a_4 = 2 . a_3 - 4$ a $a_4 = 2 . 0 - 4$ a $a_4 = -4$
$a_5 = 2 . a_4 - 4$ a $a_5 = 2 .(-4) - 4$ a $a_5 = -12$

- Determinar o termo a_5 de uma sequência em que:

$a_1 = 12$ e $a_{n+1} = a_n - 2$, em que n € N*.

$a_2 = a_1 - 2 \rightarrow a_2 = 12 - 2 \rightarrow a_2 = 10$
$a_3 = a_2 - 2 \rightarrow a_3 = 10 - 2 \rightarrow a_3 = 8$
$a_4 = a_3 - 2 \rightarrow a_4 = 8 - 2 \rightarrow a_4 = 6$
$a_5 = a_4 - 2 \rightarrow a_5 = 6 - 2 \rightarrow a_5 = 4$

Observação 1

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais pratica, visto que podemos determinar um termo no "meio" da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

Observação 2

Algumas sequências não podem, pela sua forma "desorganizada" de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela formula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já "destruiu" todas as tentativas de se encontrar uma formula geral para seus termos.

4. Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornar o procedimento mais simples:

PA com três termos: (a – r), a e (a + r), razão igual a r.

PA com quatro termos: (a – 3r), (a – r), (a + r) e (a + 3r), razão igual a 2r.

PA com cinco termos: (a – 2r), (a – r), a, (a + r) e (a + 2r), razão igual a r.

Exemplo

- Determinar os números a, b e c cuja soma é, igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.

Teremos:

Fazendo a = (b – r) e c = (b + r) e sendo a + b + c = 15, teremos:

(b – r) + b + (b + r) = 15 → 3b = 15 → b = 5.

Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.

Dessa forma a sequência passa a ser:

(5 – r), 5 e (5 + r), cujo produto é igual a 105, ou seja:

(5 – r) .5 . (5 + r) = 105 → $5^2 - r^2 = 21$

$r^2 = 4 \rightarrow 2$ ou r = -2.

Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com r= 2.

Finalmente, teremos a = 3, b = 5 e c= 7.

5. Propriedades

P_1: para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

I - $a_n = a_{n-1} + r$

II - $a_n = a_{n+1} - r$

Fazendo I + II, obteremos:

$2a_n = a_{n-1} + r + a_n + 1 - r$

$2a_n = a_{n-1} + a_n + 1$

Logo: $a_n = a_n - 1 + \frac{an+1}{2}$

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

6. Termos Equidistantes dos Extremos

Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:

(a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_p,..., a_k,..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), temos:

a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;
a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;
a_4 a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos a_p e a_k são equidistantes dos extremos, então: p + k = n+1.

Propriedade

Numa PA com *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PA de n termos, a_p e a_k termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:

I - $a_p = a_1 + (p - 1) . r$ a $ap = a_1 + p . r - r$

II - $a_k = a_1 + (k - 1) . r$ a $ak = a_1 + k . r - r$

Fazendo I + II, teremos:

$A_p + a_k = a_1 + p . r - r + a_1 + k . r - r$

$A_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) . r$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:

$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 - 1) . r$

$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1) . r$

$a_p + a_k = a_1 + a_n$

Portanto numa PA com *n* termos, em que *n* é um numero ímpar, o termo médios (a_m) é a media aritmética dos extremos.

$$A_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

7. Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PA

Vamos considerar a PA (a_1, a_2, a_3,...,a_{n-2}, a_{n-1},a_n) e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (igualdade I)

Podemos escrever também:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (igualdade II)

Somando-se I e II, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

NOVA CONCURSOS

Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + +... + (a_1 + a_n) \rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) . n$

E, assim, finalmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exemplo

- Ache a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2 , 5, 8,...).

Dados: $a_1 = 2$

$r = 5 - 2 = 3$

Calculo de a_{60}:

$A_{60} = a_1 + 59r \rightarrow a_{60} = 2 + 59 . 3$

$a_{60} = 2 + 177$

$a_{60} = 179$

Calculo da soma:

]

$$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S60 = \frac{(a_1 + a_{60}).60}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(2 + 179).60}{2}$$

$S_{60} = 5430$

Resposta: 5430

Progressão Geométrica (PG)

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.

$a_{n+1} = a_n . q$

Com a_1 conhecido e n € N*

Exemplos

- (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.

- (-36, -18, -9, $\frac{-9}{2}$, $\frac{-9}{4}$,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = -36$ e razão q = $\frac{1}{2}$.

- (15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 15$ e razão q = $\frac{1}{3}$.

- (-2, -6, -18, -54, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = -2$ e razão q = 3.

- (1, -3, 9, -27, 81, -243, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q = -3.

- (5, 5, 5, 5, 5, 5,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão q = 1.

- (7, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 7$ e razão q = 0.

- (0, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão q qualquer.

Observação: Para determinar a razão de uma PG, basta efetuar o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_n + 1}{a_n} (a_n \neq 0)$$

Classificação

As classificações geométricas são classificadas assim:

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.

- Alternante: Quando cada termo apresenta sinal contrario ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

- Constante: Quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando q = 1. Uma PG constante é também uma PA de razão r = 0. A PG constante é também chamada de PG estacionaria.

- Singular: Quando zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou q = 0.

Formula do Termo Geral

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nos já aprendemos nos módulos anteriores que a formula do termo geral é mais pratica. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a1 e razão q. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_2 . q = a_1 . q^2$

$a_4 = a_3 . q = a_1 . q^3$

$a_5 = a_4 . q = a_1 . q^4$

. .

. .

. .

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Exemplos

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão q = 3, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 2 . 3^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_5 desta PG, faremos:

$A_5 = 2 . 3^4 \rightarrow a^5 = 162$

- Numa PG de termo $a_1 = 15$ e razão q = , temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 15 . ^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_6 desta PG, faremos:

$A_6 = 15 . \frac{(1).5}{2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão = -3 temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 . (-3)^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_4 desta PG, faremos:

$A_4 = 1 . (-3)^3 \rightarrow a_4 = -27$

Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível através de alguns elementos de resolução, tornar o procedimento mais simples.

PG com três termos:

$\frac{a}{q}$ a; aq

PG com quatro termos:

$\frac{a}{q^3}; \frac{q}{q}$; aq; aq^3

PG com cinco termos:

$\frac{a}{q^2}; \frac{q}{q}$; a; aq; aq^2

Exemplo

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a, b e c, onde a = e c = b . q.

Assim,

$\frac{b}{q} . b . bq = 27 \rightarrow b^3 = 27 \rightarrow b = 3.$

Temos:

$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 13 \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$ a

$q = 3$ ou $q = \frac{1}{3}$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas q = 3. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

Propriedades

P_1**:** Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

I – $a_n = a_{n-1} . q$ e

II – $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

Fazendo I . II, obteremos:

$(a_n)^2 = (a_{n-1} . q) . (\frac{a_{n+1}}{q})$ a $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Logo: $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Observação: Se a PG for positive, o termo médio será a media geométrica dos outros dois:

$a_n = \sqrt{a_{n-1} . a_{n+1}}$

P_2**:** Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PG de n termos, a_p e a_k dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:

I – $a_p = a_1 . q^{p-1}$

II – $a_k = a_1 . q^{k-1}$

Multiplicando I por II, ficaremos com:

$a_p . a_k = a_1 . q^{p-1} . a_1 . q^{k-1}$

$a_p . a_k = a_1 . a_1 . q^{p-1+k-1}$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:

$a_p . a_k = a_1 . a_n$

Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Observação**:** Numa PG positiva, com *n* termos, onde *n* é um numero impar, o termo médio (a_m) é a media geométrica dos extremos ou de 2 termos equidistantes dos extremos.

$a_m = \sqrt{a_1 . a_n}$

Soma dos termos de uma PG

Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PG

Vamos considerar a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), com q diferente de 1 e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

NOVA CONCURSOS

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade (I) por q:

$q . S_n = q . a_1 + q . a_2 + q . a_3 + ...+ q . a_{n-2} +$
$+ q . a_{n-1} + q . a_n$

Utilizando a formula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, teremos:
$q . S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n\ +a1} . q^n$
(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$q . S_n – S_n = a_1 . q^n – a_1 \rightarrow s_n . (q – 1) =$
$= a_1 . (q^n – 1)$

E assim: $S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$S_n = \frac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$

Evidentemente que por qualquer um dos "caminhos" o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação: Para q = 1, teremos $s_n = n . a_1$

Série Convergente – PG Convergente

Dada a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), chamamos de serie a sequência S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,..., S_{n-2}, s_{n-1}, s_n, tal que:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
.
.
.
$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2}$
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2} + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos observar como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão q = , à série que ela vai gerar.

Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: (4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$ ...)

E, portanto, a série correspondente será:

$S_1 = 4$
$S_2 = 4 + 2 = 6$
$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$
$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7, 5$
$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{31}{4} = 7, 75$

$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{63}{8} = 7, 875$

$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{127}{16} = 7, 9375$

$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{255}{32} = 7, 96875$

$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{511}{64} = 7, 984375$

$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=\frac{1023}{128} = 7, 9921875$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica convergente.

Por outro lado, na serie, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o ultimo termos da serie vai tendendo a um valor que parece ser o limite para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o numero 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, um valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

PG convergente $\rightarrow |q| < 1$
ou
PG convergente $\rightarrow -1 < 1$

Resta estabelecermos o limite da serie, que é o S_n para quando *n* tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos *n* primeiros termos da PG:

$S_n = \frac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$

Estando q entre os números -1e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil deduzir que q^n vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de *n* não constitui erro considerar que q^n é igual a zero. E, assim, teremos:

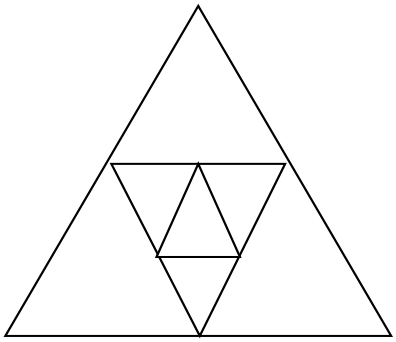
$$S = \frac{a^1}{1-q}$$

Observação: Quando a PG é não singular (sequência com termos não nulos) e a razão q é de tal forma que q | ≥ 1, a serie é divergente. Séries divergentes não apresentam soma finita.

Exemplos

- A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se o segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triangulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:



Temos: perímetro do 1º triangulo = 30
perímetro do 2º triangulo = 15
perímetro do 3º triangulo = $\frac{15}{2}$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita 30, 15, $\frac{15}{2}$,... na qual a_1 = 30 e q =. $\frac{1}{2}$

S = $\underline{a}_1 \rightarrow s = \frac{30}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}}$ = 60.

Exercícios

1. Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

2. O valor de n que torna a sequência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
a) [– 2, –1]
b) [– 1, 0]
c) [0, 1]
d) [1, 2]
e) [2, 3]

3. Os termos da sequência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; ...) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que *n* pertence a N*, é o termo de ordem *n* dessa sequência, então a_{30} + a_{55} é igual a:
a) 58
b) 59
c) 60
d) 61
e) 62

4. A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é:
a) 3,1
b) 3,9
c) 3,99
d) 3, 999
e) 4

5. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. A soma do sexto termo dessa PA., com o décimo quinto termo, vale:
a) 3,0
b) 1,0
c) 1,5
d) -1,5
e) -3,0

6. Os números que expressam os ângulos de um quadrilátero, estão em progressão geométrica de razão 2. Um desses ângulos mede:
a) 28°
b) 32°
c) 36°
d) 48°
e) 50°

7. Sabe-se que S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999...9 onde a última parcela contém n algarismos. Nestas condições, o valor de 10n+1 - 9(S + n) é:
a) 1
b) 10
c) 100
d) -1
e) -10

8. Se a soma dos três primeiros termos de uma PG decrescente é 39 e o seu produto é 729, então sendo a, b e c os três primeiros termos, pede-se calcular o valor de a2 + b2 + c2.

9. O limite da expressão $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}}}$ onde x é positivo, quando o número de radicais aumenta indefinidamente é igual a:

a) 1/x
b) x
c) 2x
d) n.x
e) 1978x

10. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

Respostas

1) Resposta "D".

Solução:

Sejam (a_1, a_2, a_3,...) a PA de r e (g_1, g_2, g_3, ...) a PG de razão *q*. Temos como condições iniciais:

1 - $a_1 = g_1 = 4$
2 - $a_3 > 0$, $g_3 > 0$ e $a_3 = g_3$
3 - $a_2 = g_2 + 2$

Reescrevendo (2) e (3) utilizando as fórmulas gerais dos termos de uma PA e de uma PG e (1) obtemos o seguinte sistema de equações:

4 - $a_3 = a_1 + 2r$ e $g_3 = g_1 . q^2 \rightarrow 4 + 2r = 4q^2$
5 - $a_2 = a_1 + r$ e $g_2 = g_1 . q \rightarrow 4 + r = 4q + 2$

Expressando, a partir da equação (5), o valor de *r* em função de ***q*** e substituindo ***r*** em (4) vem:

5 - r = 4q + 2 – 4 → r = 4q – 2
4 - 4 + 2(4q – 2) = $4q^2 \rightarrow 4 + 8q – 4 = 4q^2 \rightarrow 4q^2 – 8q = 0$
→ q(4q – 8) = 0 → q = 0 ou 4q – 8 = 0 → q = 2

Como g3 > 0, *q* não pode ser zero e então q = 2. Para obter *r* basta substituir *q* na equação (5):

r = 4q – 2 → r = 8 – 2 = 6

Para concluir calculamos a_3 e g_3:

$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow a_3 = 4 + 12 = 16$
$g_3 = g_1.q^2 \rightarrow g_3 = 4.4 = 16$

2) Resposta "B".

Solução: Para que a sequência se torne uma PA de razão *r* é necessário que seus três termos satisfaçam as igualdades (aplicação da definição de PA):

(1) -5n = 2 + 3n + r
(2) 1 – 4n = -5n + r

Determinando o valor de **r** em (1) e substituindo em (2):

(1) → r = -5n – 2 – 3n = -8n – 2
(2) → 1 – 4n = -5n – 8n – 2 → 1 – 4n = -13n – 2
→ 13n – 4n = -2 – 1 → 9n = -3 → n = -3/9 = -1/3

Ou seja, -1 < n < 0 e, portanto, a resposta correta é a b.

3) Resposta "B".

Solução: Primeiro, observe que os termos ímpares da sequência é uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 - (10; 11; 12; 13; ...). Da mesma forma os termos pares é uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 - (8; 9; 10; 11; ...).

Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) ai = a1 + (i - 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é impar temos que n = 2i - 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.

Daqui e de (1) obtemos que:

a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1 se n é ímpar
a_n = 8 + (n/2) - 1 se n é par

Logo:

a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22 e
a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37

E, portanto:

$a_{30} + a_{55}$ = 22 + 37 = 59.

4) Resposta "E".

Solução: Sejam S as somas dos elementos da sequência e S_1 a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009;...) de razão q = 10 - 1 = 0,1. Assim:

S = 3 + S_1

Como -1 < q < 1 podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:

S_1 = 0,9/(1 - 0,1) = 0,9/0,9 = 1 → S = 3 + 1 = 4

5) Resposta "D".

Solução: Aplicando a fórmula da soma dos 20 primeiros termos da PA:

$S_{20} = 20(a_1 + a_{20})/2 = -15$

Na PA finita de 20 termos, o sexto e o décimo quinto são equidistantes dos extremos, uma vez que:

15 + 6 = 20 + 1 = 21

E, portanto:

$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20}$

Substituindo este valor na primeira igualdade vem:

$20(a_6 + a_{15})/2 = -15 \rightarrow 10(a6 + a15) = -15 \rightarrow a_6 + a_{15} = -15/10 = -1,5$.

6) Resposta "D".

Solução: Seja x o menor ângulo interno do quadrilátero em questão. Como os ângulos estão em Progressão Geométrica de razão 2, podemos escrever a PG de 4 termos:

(**x, 2x, 4x, 8x**).

Ora, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360º.

Logo,

x + 2x + 4x + 8x = 360º
15.x = 360º

Portanto, **x = 24º**. Os ângulos do quadrilátero são, portanto: **24º, 48º, 96º e 192º.**

O problema pede um dos ângulos. Logo, alternativa **D**.

7) Resposta "B".

Solução: Observe que podemos escrever a soma S como:

$S = (10 – 1) + (100 – 1) + (1000 – 1) + (10000 – 1) + ... + (10^n – 1)$

$S = (10 – 1) + (10^2 – 1) + (10^3 – 1) + (10^4 – 1) + ... + (10^n – 1)$

Como existem n parcelas, observe que o número (– 1) é somado n vezes, resultando em n(-1) = **- n.**

Logo, poderemos escrever:

$S = (10 + 102 + 103 + 104 + ... + 10n) – n$

Vamos calcular a soma $S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^n$, que é uma PG de primeiro termo $a_1 = 10$, razão q = 10 e último termo $a_n = 10^n$.

Teremos:

$S_n = (a_n.q – a_1) / (q –1) = (10^n . 10 – 10) / (10 – 1) = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo em S, vem:

$S = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n$

Deseja-se calcular o valor de $10^{n+1} - 9(S + n)$

Temos que $S + n = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n + n = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo o valor de S + n encontrado acima, fica:

$10^{n+1} – 9(S + n) = 10^{n+1} – 9(10^{n+1} – 10) / 9 = 10^{n+1} – (10^{n+1} – 10) =$ **10.**

8) Resposta "819".

Solução: Sendo q a razão da PG, poderemos escrever a sua forma genérica: (x/q, x, xq).

Como o produto dos 3 termos vale 729, vem:

$x/q . x . xq = 729$ de onde concluímos que: $x^3 = 729 = 3^6 = 3^3 . 3^3 = 9^3$, logo, x = 9.

Portanto a PG é do tipo: 9/q, 9, 9q

É dado que a soma dos 3 termos vale 39, logo:

$9/q + 9 + 9q = 39$ de onde vem: $9/q + 9q – 30 = 0$

Multiplicando ambos os membros por q, fica: $9 + 9q^2 – 30q = 0$

Dividindo por 3 e ordenando, fica: $3q^2 – 10q + 3 = 0$, que é uma equação do segundo grau.

Resolvendo a equação do segundo grau acima encontraremos q = 3 ou q = 1/3.

Como é dito que a PG é decrescente, devemos considerar apenas o valor

q = 1/3, já que para q = 3, a PG seria crescente.

Portanto, a PG é: 9/q, 9, 9q, ou substituindo o valor de q vem: 27, 9, 3.

O problema pede a soma dos quadrados, logo:

$a^2 + b^2 + c^2 = 27^2 + 9^2 + 3^2 = 729 + 81 + 9 =$ **819.**

9) Resposta "B".

Solução: Observe que a expressão dada pode ser escrita como:

$x^{1/2} . x^{1/4} . x^{1/8} . x^{1/16} . ... = x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...}$

O expoente é a soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo $a_1 = 1/2$ e razão q = 1/2.

Logo, a soma valerá:

$S = a_1 / (1 – q) = (1/2) / 1 – (1/2) = 1$

Então, $x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...} = x^1 =$ **x**

10) Resposta "6171".

Solução: Dados:

M(5) = 1000, 1005, ..., 9995, 10000.

M(7) = 1001, 1008, ..., 9996.

M(35) = 1015, 1050, ... , 9975.

M(1) = 1, 2, ..., 10000.

Para múltiplos de 5, temos: $a_n = a1 + (n-1).r \rightarrow 10000 = 1000 + (n - 1). 5 \rightarrow n = 9005/5 \rightarrow n = 1801$.

Para múltiplos de 7, temos: $a_n = a1 + (n-1).r \rightarrow 9996 = 1001 + (n - 1). 7 \rightarrow n = 9002/7 \rightarrow n = 1286$.

Para múltiplos de 35, temos: $a_n = a1 + (n - 1).r \rightarrow 9975 = 1015 + (n - 1).35 \rightarrow n = 8995/35 \rightarrow n = 257$.

Para múltiplos de 1, temos: $a_n = a1 = (n -1).r \rightarrow 10000 = 1000 + (n - 1).1 \rightarrow n = 9001$.

Sabemos que os múltiplos de 35 são múltiplos comuns de 5 e 7, isto é, eles aparecem no conjunto dos múltiplos de 5 e no conjunto dos múltiplos de 7 (daí adicionarmos uma vez tal conjunto de múltiplos).

Total = M(1) - M(5) - M(7) + M(35).

Total = 9001 - 1801 - 1286 + 257 = 6171

NOVA CONCURSOS

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. (TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012) Considere que os termos da sucessão seguinte foram obtidos segundo determinado padrão.

(20, 21, 19, 22, 18, 23, 17, ...)

Se, de acordo com o padrão estabelecido, X e Y são o décimo e o décimo terceiro termos dessa sucessão, então a razão Y/X é igual a

A) 44%.
B) 48%.
C) 56%.
D) 58%.
E) 64%.

Pensando no décimo termo da sequência como o 5º termo da sequência par(2ºtermo,4ºtermo..):

$$a_1 = 21 \; e \; r = 1$$
$$a_5 = a_1 + (n-1)r$$
$$a_5 = 21 + 4 = 25 = X$$

Décimo terceiro termo é o 7º termo da sequência impar

A sequência ímpar(1ºtermo,3ºtermo..) a r=-1

$$a_7 = a_1 - (n-1)r$$
$$a_7 = 20 - 6 = 14 = Y$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{14}{25} = 0{,}56 = 56\%$$

RESPOSTA: "C".

2. (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

A sequência (5, 8, 11, 14, 17, ..., 68, 71) é uma progressão aritmética finita que possui

A) 67 termos
B) 33 termos
C) 28 termos
D) 23 termos
E) 21 termos

$a_n = 71$
$a_1 = 5$
r=8-5=3

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$71 = 5 + (n-1)3$$
$$3n - 3 + 5 = 71$$
$$3n = 69$$
$$n = 23 \; termos$$

RESPOSTA: "D".

3. (TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL – VUNESP/2013) Em uma reunião de condomínio com 160 pessoas presentes, cada uma recebeu um número diferente, a partir de 1 até 160. Na reunião, foram feitas duas comissões (A e B) com os seguintes integrantes: na comissão A, as pessoas portadoras de número ímpar e, na comissão B, as pessoas portadoras de número múltiplo de 3. Dentre as pessoas presentes na reunião, os participantes de ambas as comissões correspondem à

A) 16,875%.
B) 16,250%.
C) 17,500%.
D) 18,750%.
E) 18,125%.

O último número ímpar e múltiplo de 3 é o 159.
Sequência ímpar: 1,3,5,7,9 11,13,15,17,19,21....
Sequência múltiplo: 3,6,9,12,15,18,21...
A cada 6 números (3,9,15..) o número estará nas duas comissões.

$a_1 = 3$
$a_n = 159$
r=6

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$159 = 3 + (n-1)6$$
$$6n - 6 + 3 = 159$$
$$6n = 156$$
$$n = 26$$
$$P = \frac{26}{160} = 0{,}1625 = 16{,}25\%$$

Participarão de ambas as comissões 16,25%
RESPOSTA: "B".

4. (PETROBRAS – TÉCNICO AMBIENTAL JÚNIOR – CESGRANRIO/2012) Álvaro, Bento, Carlos e Danilo trabalham em uma mesma empresa, e os valores de seus salários mensais formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Danilo ganha mensalmente R$ 1.200,00 a mais que Álvaro, enquanto Bento e Carlos recebem, juntos, R$ 3.400,00 por mês.

Qual é, em reais, o salário mensal de Carlos?

A) 1.500,00
B) 1.550,00
C) 1.700,00
D) 1.850,00
E) 1.900,00

Álvaro ganha: x
De Álvaro para Bento:r
Álvaro para Carlos: 2r
Álvaro para Danilo: 3r
3r=1200
r=400

x+r+x+2r=3400
x+400+x+800=3400
2x=2200
X=1100
Portanto, o salário de Carlos é 1100+800=1900

RESPOSTA: "E".

5. (PM/SP – SARGENTO CFS – CETRO/2012) O 12 termo da progressão aritmética (-7, -9, -11,...) é
A) -27.
B) -29.
C) -31.
D) -32.

a1=-7
r=-9-(-7)=-2

$$a_{12} = a_1 + 11r$$
$$a_{12} = -7 + 11 \cdot (-2)$$
$$a_{12} = -7 - 22 = -29$$

RESPOSTA: "B".

6. (PM/SP – CABO – CETRO/2012) Para participar da Corrida Ciclística da Polícia Militar, um policial faz o seguinte treinamento: na primeira hora, ele percorre 30km; na segunda hora, ele percorre 27km, e, assim por diante, em progressão aritmética. Portanto, após 5 horas de treinamento, ele terá percorrido
A) 90km.
B) 100km.
C) 110km.
D) 120km.

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$a_5 = 30 - 12 = 18$$

$$S_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{n}{2}$$

$$S_5 = (30 + 18) \cdot \frac{5}{2} = 120\ km$$

RESPOSTA: "D".

7. (METRÔ/SP – USINADOR FERRAMENTEIRO – FCC/2014) O setor de almoxarifado do Metrô necessita numerar peças de 1 até 100 com adesivos. Cada adesivo utilizado no processo tem um único algarismo de 0 a 9. Por exemplo, para fazer a numeração da peça número 100 são gastos três adesivos (um algarismo 1 e dois algarismos 0). Sendo assim, o total de algarismos 9 que serão usados no processo completo de numeração das peças é igual a
A) 20.
B) 10.
C) 19.
D) 18.
E) 9.

$$99 = 9 + (n-1)10$$
$$10n - 10 + 9 = 99$$
$$n = 10$$

Vamos tirar o 99 pra ser contato a parte: 10-1=9

$$99 = 90 + (n-1)$$
$$n = 99 - 90 + 1 = 10$$

São 19 números que possuem o algarismo 9, mas o 99 possui 2
19+1=20

RESPOSTA: "A".

8. (TJ/MT – DISTRIBUIDOR, CONTADOR E PARTIDOR– TJ/2012) Considere que, no mês de setembro, o número de e-mails recebidos por uma empresa cresceu diariamente obedecendo a uma progressão aritmética de razão 8. Se no primeiro dia a empresa recebeu 112 e-mails, quantos e-mails foram recebidos nos 30 dias de setembro?
A) 13.680
B) 8.640
C) 11.232
D) 6.840

$$a_{30} = a_1 + 29r$$
$$a_{30} = 112 + 29 \cdot 8 = 344$$
$$S_{30} = (a_1 + a_{30}) \cdot \frac{n}{2}$$
$$S_{30} = \frac{112+344}{2} \cdot 30 = 6840$$

RESPOSTA: "D".

9. (UEM/PR – AGENTE UNIVERSITÁRIO – MOTORISTA – UEM/2013) A sequência (2, a, b, 20) é uma progressão aritmética e a sequência (2, a, 32, (b + 6a + 2)) é uma progressão geométrica, com a e b números reais. Sobre a e b, é correto afirmar que
A) a é raiz da equação 2x + 5 = 17.
B) b é raiz da equação $x^2 - 4 = 32$.
C) b é menor do que 10.
D) b = a + 6.
E) b é múltiplo de a.

NOVA CONCURSOS

$a_4 = a_1 + 3r$
$20 = 2 + 3r$

r=6
portanto, b=a+6

RESPOSTA: "D".

10. (DETRAN /RJ – ANALISTA DE DOCUMENTAÇÃO – EXATUS/2012) Miagui observa dois reservatórios. O reservatório A contém, inicialmente, 10 mil litros de água e, a cada dia, o volume em seu interior, aumenta 0,3 m³, enquanto que no reservatório B, o volume inicial é de 1536 m³ de água, e a cada dia, seu volume passa a ser equivalente à metade do volume existente no dia anterior. Sabe-se que Miagui iniciou sua observação no dia 10 de março. O volume do reservatório B será menor que o volume do reservatório A no dia:

A) 15 de março.
B) 16 de março.
C) 17 de março.
D) 18 de março.

10 mil litros=10 m³

Depois de 5 dias
Reservatório A

$a_6 = a_1 + 5r$
$a_5 = 10 + 5.0{,}3 = 11{,}5$

Reservatório B

$a_6 = a_1 \cdot q^5$
$a_5 = 1536 \cdot \frac{1}{32} = 48$

Dia 16
Reservatório A

$a_7 = 11{,}5 + 0{,}3 = 11{,}8$

Reservatório B

$a_7 = \frac{48}{2} = 24$

Dia 17
Reservatório A

$a_8 = 11{,}8 + 0{,}3 = 12{,}1$

Reservatório B

$a_8 = \frac{24}{2} = 12$

RESPOSTA: "C".

11. (SAMU/SC – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO – SPDM/2012) A soma dos termos de uma P.G. de primeiro termo igual a 3 e cuja razão é igual à da P.A. 2, 5/2,..., é igual a:

A) 9
B) 12
C) 6
D) 3/2

$r = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

Soma PG infinita

$S = \frac{a_1}{1 - q}$

$S = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$

RESPOSTA: "C".

12. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O trabalho de varrição de 6.000 m² de calçada é feita em um dia de trabalho por 18 varredores trabalhando 5 horas por dia. Mantendo-se as mesmas proporções, 15 varredores varrerão 7.500 m² de calçadas, em um dia, trabalhando por dia, o tempo de

A) 8 horas e 15 minutos.
B) 9 horas.
C) 7 horas e 45 minutos.
D) 7 horas e 30 minutos.
E) 5 horas e 30 minutos.

M²↑ trabalhadores↓ horas↑
6000 ----------18----------5
7500----------15----------x

Quanto mais a área, mais horas(diretamente proporcionais)

Quanto menos trabalhadores, mais horas(inversamente proporcionais)

M²↑ trabalhadores↑ horas↑
6000 ----------15----------5
7500----------18----------x

$\frac{5}{x} = \frac{6000}{7500} \cdot \frac{15}{18}$

$6000 \cdot 15x = 5 \cdot 7500 \cdot 18$
$90000x = 675000$
$x = 7{,}5\ horas = 7\ horas\ e\ 30\ minutos$

RESPOSTA: "D".

13. (PREF. CORBÉLIA/PR – CONTADOR – FAUEL/2014) Uma equipe constituída por 20 operários, trabalhando 8 horas por dia durante 60 dias, realiza o calçamento de uma área igual a 4800 m². Se essa equipe fosse constituída por 15 operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 80 dias, faria o calçamento de uma área igual a:

A) 4500 m²
B) 5000 m²
C) 5200 m²
D) 6000 m²

Operários↑ horas↑ dias↑ área↑
20----------8----------60-------4800
15----------10----------80--------x

$$\frac{4800}{x} = \frac{20}{15} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{60}{80}$$

$$20 \cdot 8 \cdot 60x = 4800 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 80$$
$$9600x = 57600000$$
$$x = 6000m^2$$

RESPOSTA: "D".

14. (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Os 5 funcionários de uma padaria produzem, utilizando três fornos, um total de 2500 pães ao longo das 10 horas de sua jornada de trabalho. No entanto, o dono de tal padaria pretende contratar mais um funcionário, comprar mais um forno e reduzir a jornada de trabalho de seus funcionários para 8 horas diárias. Considerando que todos os fornos e funcionários produzem em igual quantidade e ritmo, qual será, após as mudanças, o número de pães produzidos por dia?

A) 2300 pães.
B) 3000 pães.
C) 2600 pães.
D) 3200 pães.
E) 3600 pães.

Funcionários↑ Fornos ↑ pães ↑ horas↑
5----------3----------2500------10
6----------4----------x----------8

As flecham indicam se as grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais.

Quanto mais funcionários mais pães são feitos(diretamente)

$$\frac{2500}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{8}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 10x = 2500 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8$$
$$150x = 480000$$
$$x = 3200\ pães.$$

RESPOSTA: "D".

15. (PC/SP – OFICIAL ADMINISTRATIVO – VUNESP/2014) Dez funcionários de uma repartição trabalham 8 horas por dia, durante 27 dias, para atender certo número de pessoas. Se um funcionário doente foi afastado por tempo indeterminado e outro se aposentou, o total de dias que os funcionários restantes levarão para atender o mesmo número de pessoas, trabalhando uma hora a mais por dia, no mesmo ritmo de trabalho, será

A) 29.
B) 30.
C) 33.
D) 28.
E) 31.

Funcionários↓ horas↓ dias↑
10----------8----------27
8----------9----------x

Quanto menos funcionários, mais dias devem ser trabalhados (inversamente proporcionais).

Quanto mais horas por dia, menos dias (inversamente proporcionais).

Funcionários↓ horas↓ dias↓
10----------8----------x
8----------9----------27

$$\frac{x}{27} = \frac{10}{8} \cdot \frac{8}{9}$$

$$72x = 2160$$
$$x = 30\ dias$$

RESPOSTA: "B".